1- FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ
Colégio: COLÉGIO ESTADUAL DR. JOÃO NERY
Professor: MÁRCIA FONSECA SOUTELLO MOREIRA RAYMUNDO
Matrículas: 805320-9/927125-5
Série: 2º ANO – ENSINO MÉDIO
Tutora: EDILEIZER

PLANO DE TRABALHO SOBRE PIRÂMIDE E CONE

mrsoutello@yahoo.com.br
Márcia Fonseca Soutello Moreira Raymundo

- **ÁREA DE CONHECIMENTO**: Pirâmide e cone

INTRODUÇÃO

Este Plano de Trabalho (P.T.) tem por objetivo permitir que os alunos desenvolvam o pensamento espacial onde inclui a habilidade para a visualizar mentalmente objetos e relações espaciais – para girar e virar as coisas em sua mente. Isto inclui um confronto com as descrições geométricas de objetos e suas posições. Alunos que desenvolve o senso espacial apreciam formas geométricas na arte, na natureza e na arquitetura. Elas são capazes de usar ideias geométricas para descrever e analisar o mundo em que vive.

Como pressuposto centrar, a atenção nas atividades que podem ser desenvolvidas dentro e fora de sala de aula, com a intenção de buscar alternativas adequadas para a minimização ou superação dos problemas de aprendizagem no conteúdo específico de Geometria Espacial.

A atividade proposta neste Plano de Trabalho envolve conhecimentos ligados ao espaço e à forma e enquanto cuidamos do desenvolvimento do pensamento espacial, avançamos com propostas para que os alunos recordem tópicos da Geometria Plana trabalhados no Ensino Fundamental. Para facilitar a visualização propomos atividades de montagem de sólidos com materiais diversos.

Para a totalização do plano, serão necessários 2 tempos de cinquenta minutos para a construção do material e 8 tempos para desenvolvimento dos conteúdos.

DESENVOLVIMENTO DO PLANO DE TRABALHO

Atividade 1

_ HABILIDADE RELACIONADA: visualização, analise, organização e sistematização do conhecimento espacial.

_ PRÉ-REQUISITOS: Não será necessário

_ TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

_ RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Máquina fotográfica ou celular, computador e data show.

_ ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em grupo

_ OBJETIVOS: Identificar, aos arredores do colégio, objetos que tenham a mesma forma dos sólidos pirâmide e cone.

_ METODOLOGIA ADOTADA: Excursão ao redor do colégio com o objetivo de fotografar objetos com o formato de pirâmide e cone. Após isso, abordar os topicos descritos abaixo.

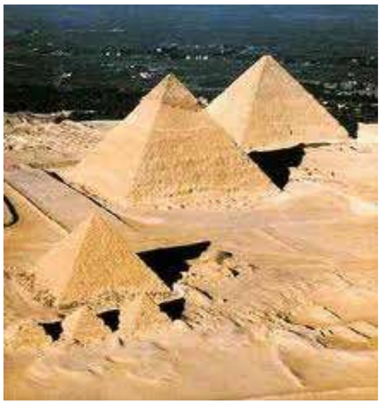
Desenvolvimento

1ª ETAPA

Pedir para que os alunos percorram os arredores do colégio para fotografar objetos e monumentos que apresentam a forma de pirâmide e de cone.

2ª ETAPA

Projetar as fotos em data show fazendo uma análise oral de suas características.Em seguida o professor apresenta outras fotos de objetos, monumentos e figuras com as mesmas características das fotos.




Beelicious!
Ice Cream Social

Atividade 2

_ **HABILIDADE RELACIONADA**: visualização, habilidade motora e construção das propriedades dos objetos geométricos.
_ **PRÉ-REQUISITOS**: Área de figuras planas
_ **TEMPO DE DURAÇÃO**: 100 minutos
_ **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**: Cartolina com as planificações dos sólidos, tesoura, cola, papelão, elástico, massinha de modelar e palitos de madeira.
_ **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em grupo

_ **OBJETIVOS**: Construir pirâmides e cone através de planificação. Construir estruturas dos sólidos utilizando massa de modelar e palitos de madeira. Recordar vértice faces e vértices e a aplicação da relação de Euler.

_ **METODOLOGIA ADOTADA**: Montagem dos sólidos utilizando materiais diversos. Utilizar o Roteiro de Ação 5.

Desenvolvimento

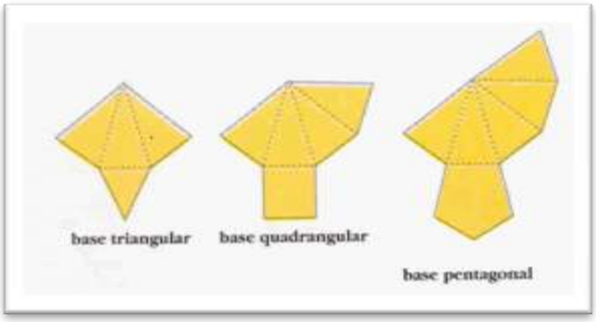
1ª ETAPA

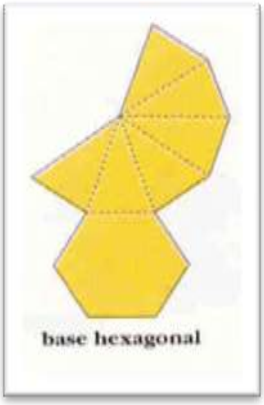
O professor dispõe sobre a mesa da sala várias planificações de sólidos onde os alunos deverão reconhecer os que na montagem formam pirâmides e cones.

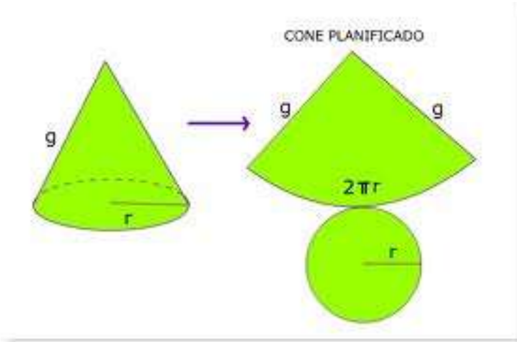
2ª ETAPA

Construção dos sólidos selecionados.

Fazer a exposição dos sólidos no fundo da sala de aula, nomeando cada um pelas suas caracteríticas.

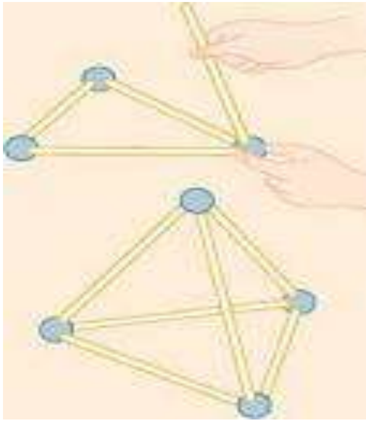


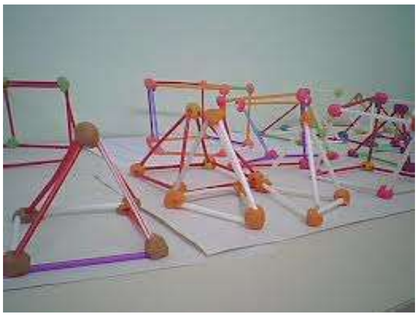




2ª ETAPA

Construção das estruturas das pirâmides com massinha de modelar e palitos de madeira.





3ª ETAPA

Solicite que os alunos analisem os sólidos construídos através da observação de suas faces para em seguida nomeá-los

Em seguida fazer a exposição na sala de aula.

4ª ETAPA

Recordar com os alunos a relação de Euler confeccionando etiquetas para os sólidos.

SÓLIDO	VÉRTICE	FACES	ARESTAS

RELAÇÃO DE EULER
$V + F = A + 2$

Atividade 3

_ **HABILIDADE RELACIONADA**: H24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (pirâmide,cone)

_ **PRÉ-REQUISITOS**: Conceitos de Geometria Plana

_ **TEMPO DE DURAÇÃO**: 300 minutos

_ **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**: Data show, computador, lista de exercícios

_ **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: Individual

_ **OBJETIVOS**: Levar os alunos a reconhecer os tipos de pirâmides. Identificar, através da observação a presença de pirâmides em objetos, na arquitetura, na história. Que os alunos calculem corretamente a área da superfície de uma pirâmide, assim como o volume da mesma.

_ **METODOLOGIA ADOTADA:**

Desenvolvimento

1ª ETAPA : apresentar em data show o texto abaixo fazendo a explicação do conteúdo.

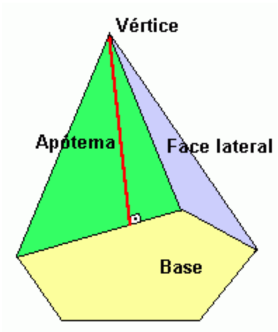
O conceito de pirâmide

Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.

Exemplo: As pirâmides do Egito, eram utilizadas para sepultar faraós, bem como as pirâmides no México e nos Andes, que serviam a finalidades de adoração aos seus deuses. As formas piramidais eram usadas por tribos indígenas e mais recentemente por escoteiros para construir barracas.

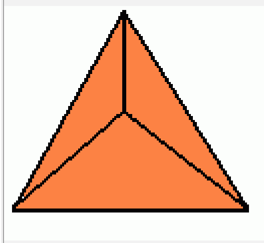
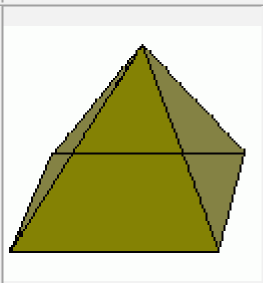
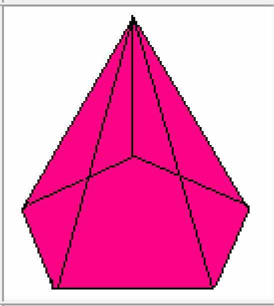
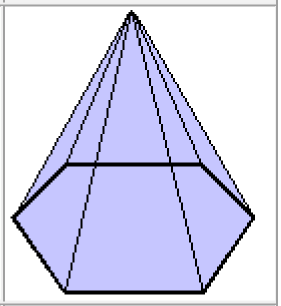
Elementos de uma pirâmide

Em uma pirâmide, podemos identificar vários elementos:



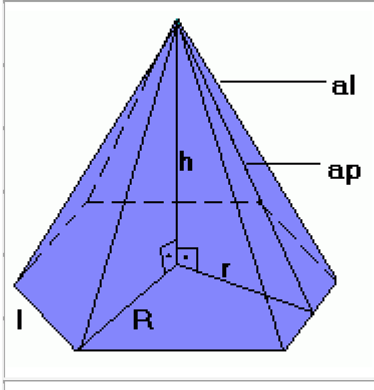
1. Base: A base da pirâmide é a região plana poligonal sobre a qual se apoia a pirâmide.
2. Vértice: O vértice da pirâmide é o ponto isolado P mais distante da base da pirâmide.
3. Eixo: Quando a base possui um ponto central, isto é, quando a região
4. poligonal é simétrica ou regular, o eixo da pirâmide é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
5. Altura: Distância do vértice da pirâmide ao plano da base.
6. Faces laterais: São regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base.
7. Arestas Laterais: São segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base.
8. Apótema: É a altura de cada face lateral.
9. Superfície Lateral: É a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
10. Aresta da base: É qualquer um dos lados do polígono da base.

Classificação das pirâmides pelo número de lados da base

triangular	quadrangular	pentagonal	hexagonal
			
base:triângulo	base:quadrado	base:pentágono	base:hexágono

Pirâmide Regular reta

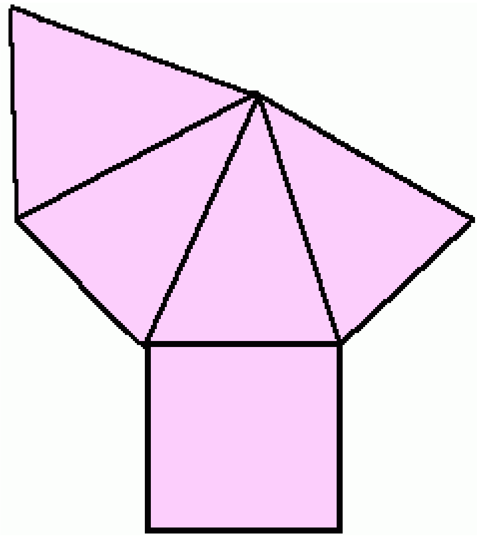
Pirâmide regular reta é aquela que tem uma base poligonal regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.

	R	raio do circulo circunscrito
	r	raio do círculo inscrito
	l	aresta da base
	ap	apótema de uma face lateral
	h	altura da pirâmide
	al	aresta lateral
As faces laterais são triângulos isósceles congruentes		

Área Lateral de uma pirâmide

Às vezes podemos construir fórmulas para obter as áreas das superfícies que envolvem um determinado sólido. Tal processo é conhecido como a planificação desse sólido. Isto pode ser realizado se tomarmos o sólido de forma que a sua superfície externa seja feita de papelão ou algum outro material.

No caso da pirâmide, a ideia é tomar uma tesoura e cortar (o papelão) a pirâmide exatamente sobre as arestas, depois reunimos as regiões obtidas num plano que pode ser o plano de uma mesa.



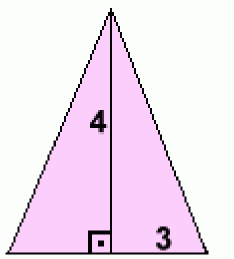
As regiões planas obtidas são congruentes às faces laterais e também à base da pirâmide.

Se considerarmos uma pirâmide regular cuja base tem **n** lados e indicarmos por **A(face)** a área de uma face lateral da pirâmide, então a soma das áreas das faces laterais recebe o nome de área lateral da pirâmide e pode ser obtida por:

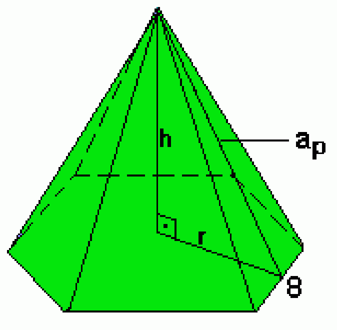
A(lateral) = n A(face)

Exemplo: Seja a pirâmide quadrangular regular que está planificada na figura acima, cuja aresta da base mede 6cm e cujo apótema mede 4cm.

Como **A(lateral)=n.A(face)** e como a pirâmide é quadrangular temos n=4 triângulos isósceles, a área da face lateral é igual à área de um dos triângulos, assim:

A(face) = b h/2 = 6.4/2 = 12 A(lateral) = 4.12 = 48 cm²	

Exemplo: A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 8 cm e a altura 10 cm. Calcular a área lateral.



Tomaremos a aresta com a=8 cm e a altura com h=10 cm. Primeiro vamos calcular a medida do apótema da face lateral da pirâmide hexagonal. Calcularemos o raio r da base.

Como a base é um hexágono regular temos que r=(a/2)R[3], assim r=8R[3]/2=4R[3] e pela relação de Pitágoras, segue que $(ap)^2=r^2+h^2$, logo:

$(ap)^2= (4R[3])^2+10^2 = 48+100 = 148 = 4\cdot37 = 2R[37]$

A área da face e a área lateral, são dadas por:

A(face) = 8.2[37]/2 = 8.R[37] **A(lateral) = n.A(face) = 6.8.R[37] = 48.R[37]**

Área total de uma Pirâmide

A área total de uma pirâmide é a soma da área da base com a área lateral, isto é:

A(total) = A(lateral) + A(base)

Exemplo: As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular formam ângulos de 60 graus com a base e têm as arestas da base medindo 18 cm. Qual é a área total?

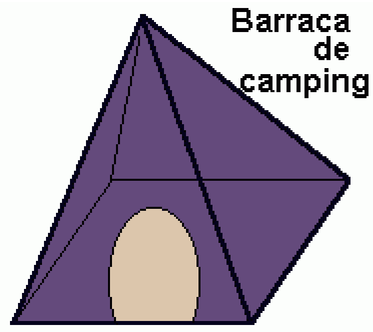
Já vimos que A(lateral)=n.A(face) e como cos(60º)=(lado/2)/a, então 1/2=9/a donde segue que a=18, assim:

A(face) = b.h/2 = (18.18)/2 = 162 **A(lateral) = 4.162 = 648** **A(base) = 18^2 = 324**

Concluímos que:

A(total) = A(lateral) + A(base) = 648+324 = 970

Exemplo: Um grupo de escoteiros quer obter a área total de suas barracas, as quais têm forma piramidal quadrangular. Para isso, eles usam medidas escoteiras. Cada dois passos de um escoteiro mede 1 metro. A barraca tem 4 passos escoteiros de lado da base e 2 passos de apótema. Calcular a área da base, área lateral e a área total.



A(base) = 2.2 = 4 m^2

A(lateral) = 4.2.1 = 8 m^3

Logo, a área total da barraca é

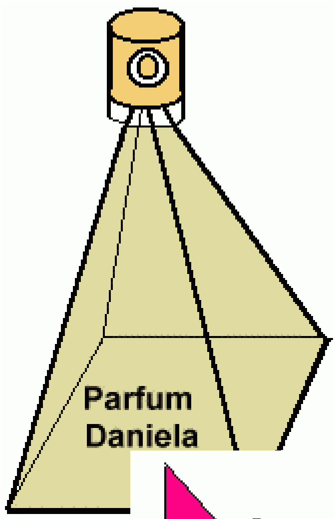
A(total) = A(lateral) + A(base) = 8+4 = 12 m^2

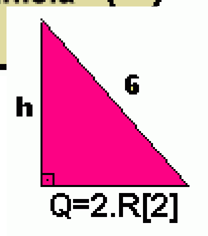
Volume de uma Pirâmide

O volume de uma pirâmide pode ser obtido como um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide, isto é:

Volume = (1/3) A(base) h

Exemplo: Juliana tem um perfume contido em um frasco com a forma de uma pirâmide regular com base quadrada. A curiosa Juliana quer saber o volume de perfume que o frasco contém. Para isso ela usou uma régua e tirou duas informações: a medida da aresta da base de 4cm e a medida da aresta lateral de 6cm. Como V(pirâmide)=A(base).h/3, devemos calcular a área da base e a medida da altura. Como a base tem forma quadrada de lado a=4cm, temos que A(base)=a²=4cm.4cm=16 cm².

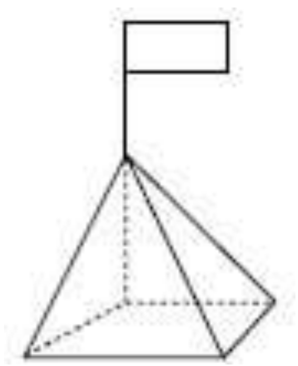




A altura h da pirâmide pode ser obtida como a medida de um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada pela altura L=6cm da aresta lateral e o outro cateto Q=2×R[2] que é a metade da medida da diagonal do quadrado. Dessa forma h²=L²-Q², se onde segue que h²=36-8=28 e assim temos que h=2R[7] e o volume será dado por V=(1/3).16.2R[7]=(32/3)R[7].

EXERCÍCIOS - PIRÂMIDE

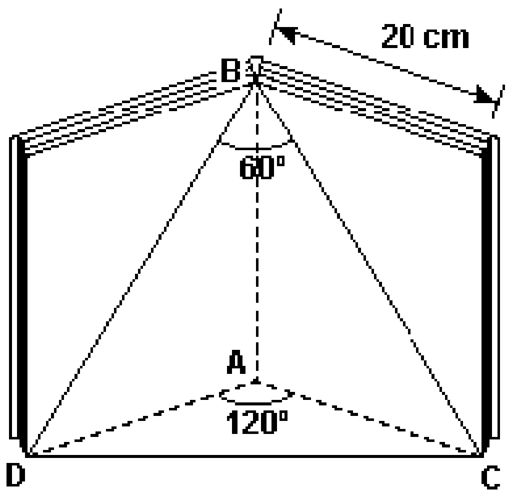
1) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3m e que a altura da pirâmide será de 4m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será

A) 36.
B) 27.
C) 18.
D) 12.
E) 4.

2) Suponha que um livro de 20 cm de largura esteja aberto conforme a figura a seguir, sendo DÂC = 120º e DBC = 60º.



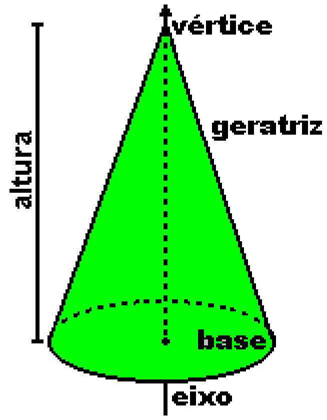
(

a) Calcule a altura AB do livro:

b) Calcule o volume do tetraedro de vértice A, B, C e D.

Elementos do cone

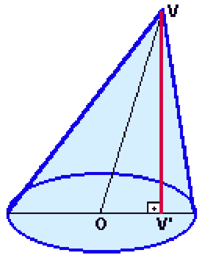
Em um cone, podem ser identificados vários elementos:



1. Vértice de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.
2. Base de um cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
3. Eixo do cone é quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
4. Geratriz é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
5. Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.
6. Superfície lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
7. Superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
8. Seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

Classificação do cone

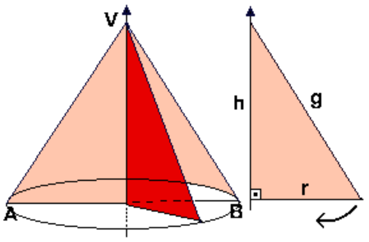
Ao observar a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é oblíquo quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.



Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.

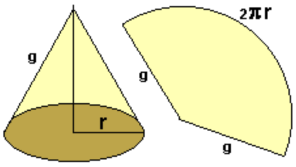
Observações sobre um cone circular reto

Um cone circular reto é denominado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos



A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. Na figura ao lado, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.

Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida da geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos uma relação notável no cone: $g^2=h^2+r^2$, que pode ser "vista" na figura abaixo:



A Área Lateral de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e r (raio da base do cone):

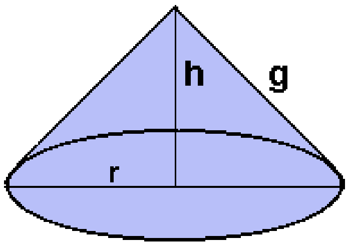
A(lateral) = pi.r.g

A Área total de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e r (raio da base do cone):

A(total) = pi.r.g + pi.r² = = pi.r.(g+r)

Cones Equiláteros

Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.



A área da base do cone é dada por:

A(base) = pi r²

Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$(2r)^2=h^2+r^2$, logo $h^2=4r^2-r^2=3r^2$,

assim:

$h = r\sqrt{3}$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$V = (1/3)\ pi \sqrt{3}\, r^3$

Como a área lateral pode ser obtida por:

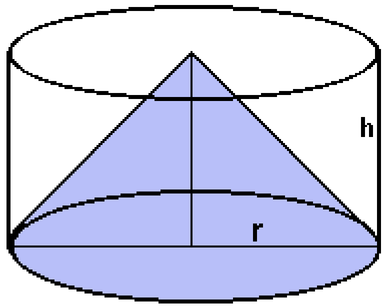
A(lateral) = pi.r.g = pi.r.2r = 2.pi.r²

então a área total será dada por:

$$A(total) = 3 \pi r^2$$

EXERCÍCIOS - CONE

1. Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio r e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

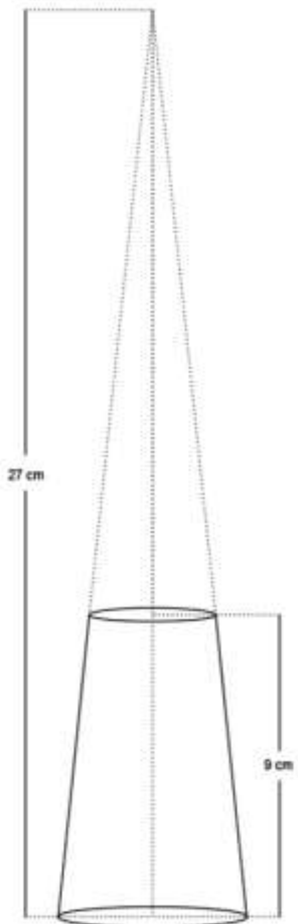


RETIRADA DO ROTEIRO DE AÇÃO 6

2) Até a bem pouco tempo atrás, não estranharíamos se parássemos para tomar caldo-de-cana no centro da cidade do Rio de Janeiro e fossemos servidos em copos descartáveis de papel. Estes copos eram bem diferentes dos que circulam por aí em grandes redes de lanchonetes, seu formato era cônico, como o de um cálice de Dry Martini.

A mudança no recipiente onde são servidos os caldos-de-cana trouxe mudanças na quantidade consumida. Vamos entender essa mudança juntos?

1. Considere que o copo cônico de servir caldo-de-cana era um cone equilátero de raio 7 cm e calcule o volume de um desses copos, completamente cheio.



2. Calcule agora o volume desse copo, quando o nível do caldo é igual a 6/7 da altura deste cone. Entenda o nível do líquido como a distância entre o vértice do cone e um plano secante que o interseciona paralelo à base. Calcule o volume de caldo nessa situação.

No Rio de Janeiro, os cariocas estão acostumados com o “Chorinho” que se ganha de caldo. (quase uma segunda “dose”). Isso ainda é costume! Imagine que um bom vendedor cativasse os seus clientes com o Chorinho, completando seus copos cônicos que eram servidos como no item 2 sempre que estavam com altura igual a metade altura do cone.

3. Qual o volume total de caldo, servido por esse vendedor?

4. Se ele cobrasse R$ 1,50 pelo copo de caldo, quanto estaria cobrando por litro de caldo?

Com a possibilidade de cuidarmos melhor da saúde, evitamos copos descartáveis que não passam por um rigoroso processo de certificação de qualidade. Juntando isso ao fato de os copos plásticos descartáveis terem destino de reciclagem, facilitado nos últimos anos, os de papel perderam mercado.

Assim, o vendedor de caldo-de-cana, passou a ter outros parâmetros para o preço de seu caldo, mas continua com o "Chorinho", para cativar seus clientes. A forma que encontrou para se adequar a esse novo mercado foi a de vender o caldo com base na vara de cana. Cada freguês paga pelo consumo de duas varas e, de acordo com o "Chorinho" consome no máximo duas varas.

Para entender isso, faça os seguintes cálculos.

5.Considere que o copo plástico é obtido de um cone com raio da base, medindo 3 cm e altura 27 cm, secionado por uma plano distante 9cm da base. Calcule o volume desse copo (use $\cong$ 3,14 π).

6.Verifique que uma vara de cana (com formato aproximadamente cilíndrico) de 50 cm de altura, que rende, em média, 45 ml de caldo para cada 4 cm de altura enche um copo plástico como o do item 5.

7. Calcule o preço do litro do caldo-de-cana para que o vendedor que utilizava o copo cônico para servir caldo (como no item 2) e Chorinho (como no item 3) continue assim fazendo com o copo plástico, sem que tenha perda em seus lucros.

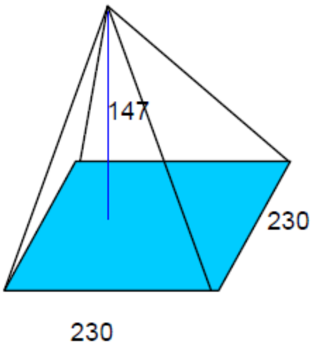
ALTERAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 2

FIXAÇÃO DO CONTEÚDO

Foi realizado na aula seguinte duas atividades contemplando o conteúdo ensinado.

Durante esta atividade foi feito uma revisão rápida de área de triângulos, quadrado, círculo e setor circular

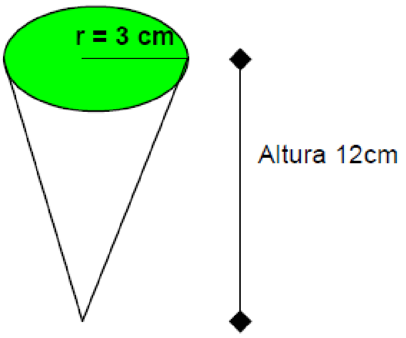
1) A pirâmide de Quéops, conhecida como a Grande Pirâmide, tem cerca de 230m de aresta na base e altura aproximada de 147m. Qual é o seu volume? Resp. → V = 2.592.100m3



Solução:

A base da pirâmide é um quadrado com lados de 230m. Logo, a área da base é dada por: $A_b = 230 \times 230 = 52.900m^2$. Como o volume é dado por $V = 1/3 \times Ab \times h$, temos: $V = 1/3 \times 52.900 \times 147$. Portanto, $V = 2.592.100m^3$

2) A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone reto. Sabendo que o raio da base mede 3cm e a altura é de 12cm. Qual é o volume da casquinha? Resp. → V = 113,040m3



Solução:

A base do cone é um círculo de área: $Ab = \pi x\ r^2 \approx 3,14 \times 9 = 28,26cm^2$. Como o volume da casquinha é dado por $V = 1/3 \times A_b \times h = 1/3 \times 28,26 \times 12$, temos: $V \approx 113,097cm^3$

Após a realização do exercício 2, a professora levou para sala de aula um pote de sorvete e casquinhas para os alunos calcularem a quantidade de sorvete cada aluno iria comer. Em seguida foi feita a degustação do sorvete.

AVALIAÇÃO

A avaliação é um processo que deve acontecer durante todo o processo de aplicação do Plano de Trabalho. A mesma iniciará desde o momento de organização das tarefas e coletagem de material fotográfico até a correção das atividades propostas no final das aulas.

O professor deve se preocupar em organizar as ideias dos alunos entre o que foi coletado e construído e os conceitos a serem passados.

Durante todo o processo de construção dos sólidos o professor deverá se preocupar em avaliar se os alunos fazem um paralelo da geometria espacial com a geometria plana, aproveitando este momento para resgatar relações como, por exemplo, a de Euler e tais exercícios deverão ser realizados de maneira que o professor possa avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competencias relacionadas aos temas estudados

É oportuno aplicar, no final deste P.T., exercícios individuais envolvendo área e volume dos sólidos (com consulta).

E apropriado verificar os acertos dos alunos nas questoes relacionadas com o tema que constarao no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o
professor podera verificar a aprendizagem nao apenas no assunto que norteou este P.T., mas tambem em conteudos estudados no bimestre anterior.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas 2001 e 2002 e o grau de conhecimento dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO. Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. Vol. 2. Ed. Moderna. São Paulo, 2010.

FILLOS, Leoni M. Embalagens: um apoio ao ensino de Geometria Espacial (monografia), Pós Graduação em Ensino Matemática, Universidade Estadual do Centro Oeste – UNICENTRO, Guarapuava, 2000.

PAVANELLO, Regina Maria. Geometria e Educação Matemática. Maringá, 1993. 6 p.

SMOLE. Kátia Stocco , DINIZ. Maria Ignez. **Matemática – Ensino Médio.** Vol. 2. 6ª Ed. Editora Saraiva. São Paulo, 2010.

SOUZA. Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática.** Vol. 2. 1ª Ed. Editora FTD. São Paulo, 2010.

REZI, V**. Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 2001. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

__________ As Imagens mentais e as habilidades para geometria espacial avaliadas por questões do Enem. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 4., 2009, Brasília: SIPEM. Anais... 2009b.