

**Formação Continuada em
Matemática**

**Fundação CECIERJ/Consórcio
CEDERJ**

Matemática 1º ano – 4º bimestre/2012

Plano de Trabalho

Função Exponencial

Tarefa 1

Cursista: Iara de Oliveira Evangelista Cardoso

Tutor: Antônio de Almeida Filho

Grupo: 10

Sumário

Introdução

Desenvolvimento

Avaliação

Referências bibliográficas

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos construam o conhecimento necessário para aplicação dos conceitos relacionados às funções exponenciais.

Realizaremos nossos estudos através de situações-problemas do dia-a-dia que motivem os alunos e favoreça a construção do conhecimento por parte dos mesmos.

Faremos uma revisão das propriedades das potências.

Para a totalização do plano, serão necessários oito tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e para avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

Habilidade relacionada: resolver problemas envolvendo as propriedades operatórias das potências

Pré-requisitos: propriedades das potências

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos educacionais utilizados: música para a revisão das propriedades das potências sugerida no roteiro de ação, lousa e instrumentos.

Organização da turma: Em círculo

Objetivos: operar com potências, pela aplicação das propriedades da potenciação.

Metodologia adotada: Iniciaremos nossa aula lendo a letra da música proposta pelo roteiro de ação. Depois conversaremos sobre as propriedades das potências que eles se recordam de terem estudado. Eles poderão levar instrumentos para fazerem a sua própria versão da música.

Tópicos básicos para função exponencial

O estudo da função exponencial requer alguns conceitos sobre potenciação. Para uma expressão do tipo a^n , denominamos: base, ao número real a ; expoente, ao número natural n maior que 1; potência, ao resultado da operação.

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ fatores}} \quad \begin{array}{l} a^n \xrightarrow{\text{expoente}} \\ \downarrow \\ \text{Base} \end{array}$$

Expoente inteiro não-negativo

Por extensão da definição, fazemos:

$$n = 0 \rightarrow a^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a^1 = a$$

Expoente inteiro negativo

Sendo a base a um número real não-nulo $a \in \mathbb{R}^*$ e o expoente n um número natural, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

*Zero elevado a expoente negativo não existe.

Propriedades das potências, cujo expoente é um número inteiro

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ sendo } b \neq 0$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ sendo } a \neq 0 \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Expoente Racional

Considerando $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$, temos que:

- Não existe raiz em \mathbb{R} quando $a \in \mathbb{R}^+$ e n é par.
- A raiz é um número negativo quando $a \in \mathbb{R}^+$ e n é ímpar.

A expressão $a^{\frac{m}{n}}$ é uma potência cuja base a é um número real positivo,

($a \in \mathbb{R}^+$) e o expoente $\frac{m}{n}$ é um número racional, sendo m e n números inteiros e positivos.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Propriedades da potência, cujo expoente é um número racional

As mesmas propriedades estudadas em potências com expoente inteiro são válidas para potências com expoente racional.

Potência cujo expoente é um número irracional

A expressão a^α é uma potência cuja base a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}_+^*$) e o expoente α é um número irracional.

Tomando como exemplo 3^π e elaborando uma sequência de números racionais que permita uma aproximação cada vez mais precisa de π , temos:

$$3; 3,1; 3,14; 3,141 \dots$$

Da mesma forma, podemos elaborar uma sequência de potências de base 3, cujos expoentes sejam os termos da sequência anterior.

$$3^3; 3^{3,1}; 3^{3,14}; 3^{3,141}; \dots$$

Podemos observar que quanto mais os expoentes se aproximam de π , por intermédio de números racionais, mais as potências de expoentes racionais se aproximam de 3^π .

Obs.: exemplos numéricos serão oferecidos aos alunos durante a explicação do conteúdo e durante a conversa sobre a música.

Exercícios de fixação:

- Utilizar exercícios do livro didático para fixação.
- Utilizar a letra da música na folha de atividades Anexa, oferecida no roteiro de ação da plataforma.

Atividade 2:

Habilidade relacionada: Construir e analisar curvas exponenciais

Pré-requisitos: Propriedade das potências

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos educacionais utilizados: Livro didático adotado pela escola, lousa e papel quadriculado

Organização da turma: individual

Objetivos:

Metadologia adotada: lançar a situação-problema abaixo para aguçar a curiosidade dos alunos e motivá-los através de alguns questionamentos que se fizerem necessários.

Situação problema:

Durante determinado período de seu desenvolvimento, a altura de certo tipo de planta dobra a cada mês. Sabendo que a altura da planta no início desse período é 1 cm, calcularemos a altura dessa planta ao final do 4º mês.

Ao final do:

- 1º mês, a altura da planta será 2 cm, pois $2 \cdot 1 = 2$
- 2º mês, a altura da planta será 4 cm, pois $2 \cdot 2 = 4$
- 3º mês, a altura da planta será 8 cm, pois $2 \cdot 4 = 8$
- 4º mês, a altura da planta será 16 cm, pois $2 \cdot 8 = 16$

Podemos escrever a altura da planta, a partir do final do 2º mês, da seguinte maneira:

- 2º mês: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
- 3º mês: $2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
- 4º mês: $2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

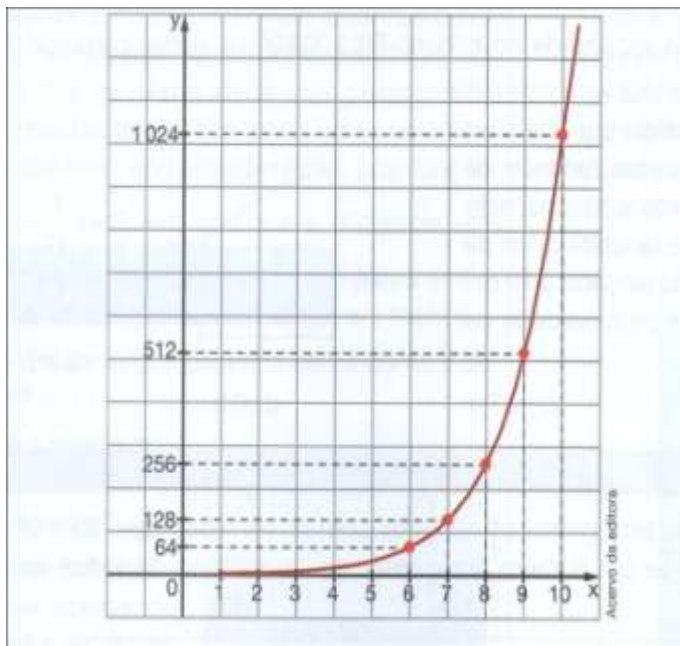
Portanto, a altura da planta ao final do 4º mês será 16 cm.

E qual a altura dessa planta no final do mês x do período?

Utilizando raciocínio semelhante, podemos calcular a altura da planta por meio da fórmula $A = 2^x$.

Observando essa fórmula, note que A é dado em função de x , e que a variável independente está em um expoente. Essa é uma *função exponencial*.

Podemos representar essa situação por meio de um gráfico.



Abordar os seguintes tópicos:

Função exponencial

Chamamos de função exponencial a toda função do tipo $f(x) = a^x$, definida para todo x real com $a > 0$ e $a \neq 1$.

O conceito de função exponencial

A expressão “crescimento exponencial” refere-se a um crescimento muito rápido.

Assim, a função exponencial possui múltiplas aplicações:

- na área financeira, em tabelas progressivas a juros fixos;
- no crescimento populacional;
- em biologia, no crescimento de alguns vegetais.

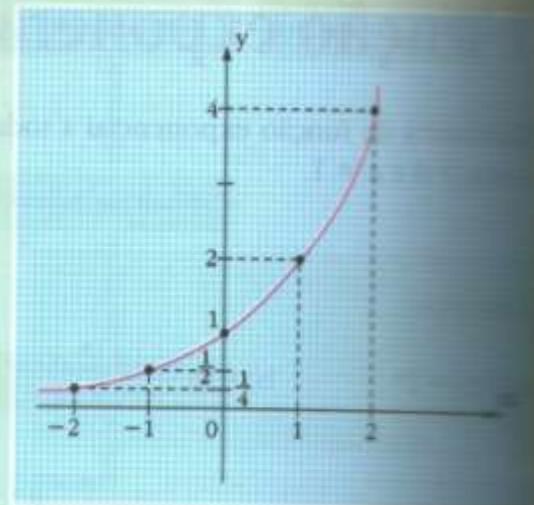
Gráfico da função exponencial

Faremos o estudo gráfico da função exponencial em dois casos:

1º caso – a base é um número real maior que 1: $a > 1$

Exemplo: $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

| x | $y = 2^x$ |
|-----|---------------|
| 2 | 4 |
| 1 | 2 |
| 0 | 1 |
| -1 | $\frac{1}{2}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ |



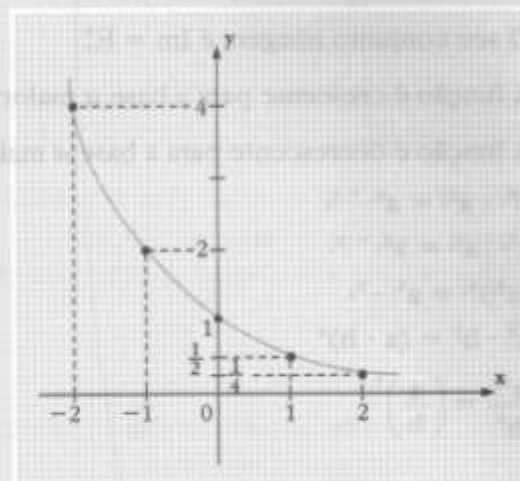
Função crescente

2º caso – a base é um número real, maior que 0 e menor que 1:

$$0 < a < 1$$

Exemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

| x | $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|-----|----------------------------------|
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| -1 | 2 |
| -2 | 4 |



Função decrescente

Características da função exponencial

Dos exemplos estudados, podemos tirar as seguintes conclusões:

- A curva da função $f(x) = a^x$ passa pelo ponto $(0,1)$.
- O seu domínio é o conjunto dos reais $D = \mathbb{R}$.
- O seu conjunto imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$.
- A função é crescente para a base a maior que 1 ($a > 1$).
- A função é decrescente para a base a maior que 0 e menor que 1 ($0 < a < 1$).

Exercícios de fixação:

- Utilizar exercícios do livro didático para fixação.
- A construção de gráficos será realizada com papel quadriculado.

Atividade 3

Habilidade relacionada: Resolver equações exponenciais

Pré-requisitos: Propriedades da potenciação

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos educacionais utilizados: Livro didático adotado pela escola e lousa

Organização da turma: individual

Objetivos: resolver equações exponenciais

Metodologia adotada: abordar o seguinte tópico:

Equação Exponencial

Toda equação que apresenta incógnita no expoente é denominada *equação exponencial*.

São exemplos de equações exponenciais:

$$3^x = 27$$

$$2^{x-15} = 16$$

$$3^{2x} = 3^x + 21$$

Resolução de equações exponenciais

Inicialmente, vamos resolver equações exponenciais em que os dois membros podem ser reduzidos a potências de mesma base, ou seja:

$$a^x = a^y \leftrightarrow x = y, \text{ com } a \neq 1 \text{ e } a > 0$$

Exemplos:

$$3^x = 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$$

$$2^{x-15} = 16 \rightarrow 2^{x-15} = 2^4 \rightarrow x - 15 = 4 \rightarrow x = 19$$

Resolução de outras equações exponenciais

Em algumas situações, não é possível reduzir os dois membros de equação exponencial a potências de mesma base. Nesses casos, é necessário utilizar alguns artifícios de cálculo. A seguir, vamos verificar, por meio de uma atividade resolvida, alguns desses artifícios.

Exemplo:

$$5^{x+1} - 7 \cdot 5^x = -2 \rightarrow 5^x \cdot 5 - 7 \cdot 5^x = -2$$

Substituímos $y = 5^x$ para resolver a equação.

$$5y - 7y = -2 \rightarrow -2y = -2 \rightarrow y = 1$$

Retornamos o valor de y na igualdade $y = 5^x$.

$$y = 1 \rightarrow 5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0 \rightarrow x = 0$$

Exercícios de fixação:

- Utilizar exercícios do livro didático para fixação da resolução das equações exponenciais
- Utilização de questões do Saerj, questões de vestibular, etc.

AVALIAÇÃO

- O aluno será avaliado durante todo o processo de ensino-aprendizagem, através das atividades propostas, participação e argumentação.
- Aplicação de avaliação escrita individual para sondagem da capacidade de utilização dos conteúdos adquiridos bem como leitura e interpretação dos problemas aplicados.
- Auto-avaliação feita pelos alunos e pelo professor a fim de diagnosticar possíveis falhas durante o processo buscando o aperfeiçoamento do mesmo.
- Utilizar exercícios do livro didático com testes de vestibular assim como questões do saerjinho.
- Verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com os temas que constarão no saerjinho.

Este plano de trabalho foi elaborado de acordo com a “realidade” do Curso Normal e pensando que nesta modalidade contamos com 4 aulas semanais. Não constam atividades com computador, pois não contamos com nenhum laboratório de informática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Livro “Matemática aula por aula”, Xavier e Barreto 2ª Edição, SP 2005, Ed. FTD
- Livro Matemática Dante – Volume Único, Luiz Roberto Dante 1º Edição, SP 2008, Ed. Ática
- Livro Matemática e suas tecnologias -1º série do Ensino Médio, Angel Panadés Rubió e Luciana Maria Tenuta de Freitas 1º Edição, SP 2005 Ed. IBEP
- Livro Coleção Novo Olhar Matemática – Volume 1 – Joamir Souza – 1º Edição, SP 2010 Ed. FTD
- Pesquisa ao site: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br>

