

Curso de Formação Continuada para Professores  
Tarefa 1 Função Exponencial  
Nome: José Alves Mourão Filho  
Série: 1ª do ensino médio  
Grupo: 3  
Tutor: José Luis Miranda Antunes  
Data: 03/12/2012

## **Função Exponencial**

### **INTRODUÇÃO**

O estudo da função exponencial irá nos proporcionar um vasto conhecimento e entendimento do mundo em que vivemos principalmente quando o assunto envolve o mercado financeiro, através do aumento de capital, financiamentos de bens móveis ou imóveis bem como todos os fenômenos em que o crescimento exponencial ou o decréscimo estão presentes.

Observamos que a população em geral não consegue entender como os financiamentos estão sempre variando, às taxas de juros mudam dia a dia, o cartão de crédito cobra juros exorbitantes e não devemos entrar o cheque especial, que temos que ter cuidado com o empréstimo consignado e não devemos cair na “armadilha do cartão de crédito”.

Todo o cuidado é pouco, pois se não conhecermos o fenômeno da exponenciação não entenderemos como esse mundo do crédito funciona e certamente entraremos em uma seara que pode nos envolver de tal forma que irá tirar nosso sono.

Conhecer como se comportam os números quando se trata de exponenciação nos facilitará entender melhor como os problemas diários de tantas pessoas poderiam ser evitados. Saberemos que é necessário que às famílias tenham uma educação financeira para não entrem em dívidas que possivelmente não conseguirão honrar pelo fato de não conhecerem o mundo dos números que crescem de forma exponencial.

Esse estudo nos possibilitará interagir com outras disciplinas como a química e a biologia onde poderemos calcular através da exponenciação fenômenos que ocorrem e nos encantar como a matemática pode ser um catalisador, entrando e saindo de uma reação química sem fazer parte da sua produção final.

Para finalizar observo que o entendimento de todas às propriedades da exponenciação é fundamental para o entendimento e manuseio no cálculo da função exponencial.

## DESENVOLVIMENTO

**Duração:** 4 semanas, 24 tempos, 11 aulas

**Área:** Álgebra

**Grupo:** 5 alunos

**Objetivos:** Relembrar as propriedades da equação exponencial através da demonstração das propriedades e em seguida sua memorização através da letra de uma música.

O estudo da função exponencial ocorrerá após o entendimento e fixação do item acima, onde será trabalhado o texto “uma proposta milionária” e a “lenda sobre o jogo de xadrez”.

Estas atividades lúdicas serão complementadas com exercícios de forma contextualizada sobre função exponencial.

**Pré-requisito:** Conhecer e saber calcular um número elevado a expoente e cálculo de raízes.

**Material:** caneta, lápis, papel milimetrado.

**Descritores associados:** H58, H63 e suas respectivas classes

### Primeira Aula

**Duração:** 1ª semana, 2 tempos

**Conteúdo:** Propriedades da Função Exponencial

Por ser a função exponencial  $y = a^x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , podemos dizer que todas às propriedades das potências podem ser utilizadas para cálculos de problemas que envolvam a função exponencial.

Para quaisquer valores de m e n reais, teremos as seguintes propriedades:

a)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b)  $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$

c)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

d)  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n \in \mathbb{N} / n > 1$

e)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

f)  $a^0 = 1$

g) Se  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos  $a^m = a^n$  apenas para  $m = n$

h)  $a^m \cdot b^m = ab^m$

i)  $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

**Obs.:** Normalmente para que os alunos fixem melhor o item (d) eu uso o artifício do “sol”. Desenho um sol sobre a raiz e digo que o n está sob o sol e o m está coberto do sol, quando mudamos, mudamos também quem estava no sol para ficar na sombra, ou seja, no denominador da fração (n) e quem estava na sombra passa a ficar no sol, o numerador da fração ( m).

## Segunda Aula

**Duração:** 1ª semana, 2 tempos

**Conteúdo:** Propriedades da Função Exponencial - Exercícios

Achar o valor de x:

a)  $3^{2x} = 27$

b)  $3^{2x} = 243$

c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x =$

d)  $4^{2x+1} = 128$

e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^4$

f)  $5^{x-3} = 1$

g)  $5^{x^2} \cdot 5^{-4x} = 3125$

h)  $2^{x+1} + 2^{x-1} = 80$

i)  $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$

j)  $2^x + 2^{x+3} - 2^{x-1} = 34$

k)  $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 2625$

l)  $3^{x+1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$

m)  $2^{x+2} + 5^x = 3 \cdot 5^x - 2^x$

n)  $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

o)  $8 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 1 = 0$

p)  $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^{x+1} = 0$

q)  $2^{4x} - 6(2^{2x}) = 16$

### Terceira Aula

**Duração:** 1ª semana, 2 tempos

**Grupos:** 5 alunos

**Conteúdo:** Música para a Fixação das Propriedades da Equação Exponencial.

**Material:** Serão distribuídas folhas com a música Potências sonoras.

**Definição:** A folha com a música potências sonora tem como finalidade fazer os alunos decorarem as propriedades da equação exponencial.

**Exercício:** Completar os quadrados com a fórmula que representa cada frase da música. Após os quadrados completados os alunos deverão retornar aos exercícios da aula anterior para serem corrigidos. Para isso os cadernos dos componentes de um grupo deverão ser entregues aos componentes de outro grupo onde serão feitas as correções.

**Proposta de Trabalho:** Os grupos deverão criar uma música ou um ritmo para a letra, diferente do ritmo original, de forma que todos gostem e possam fixar a música e usá-la quanto necessitem lembrar-se de uma propriedade da equação exponencial.

### Quarta Aula

**Duração:** 2ª semana, 2 tempos.

**Conteúdo:** Introdução à Função Exponencial

**Material:** Caderno, caneta, calculadora e/ou computador com planilha Exxel.

**Definição:** Para introduzir o conceito de função exponencial a ideia é fazer com que os alunos percebam o efeito da exponenciação e entendam como os números se comportam mediante ao aumento do expoente, além de mostrar a diferença acentuada entre um crescimento exponencial e linear.

### Exercícios

Fazer com que os alunos pensem na resolução de um problema que envolva a duplicação de bactérias. A ideia é coletar as respostas dos alunos quando perguntados

sobre “a que horas a quantidade de bactérias era a metade visto que para se reproduzirem 1000 bactérias foram necessárias 24 horas.

- Enumerar as respostas no quadro mostrando para os alunos como várias respostas são dadas quando entramos em mundo que não conhecemos muito bem.
- Aproveitar todas as respostas, que certamente terão o perfil linear, e mostrar os alunos a diferença entre exponenciação e linearidade.

A partir daí contar a história sobre o texto “Uma proposta milionária”. A ideia é tentar aproveitar toda a encenação que pode ser utilizada de forma a atrair o máximo de atenção dos alunos. A intenção é fazer constantemente perguntas para que eles pensem em alguma solução matemática.

Após anotar a resposta de cada grupo e esgotando todas as possibilidades, mostrarei a solução anotando cada valor na tabela, indagando que os grupos podem mudar de ideia caso percebam que sua resposta está errada. Acredito que com isso os alunos aumentarão sua curiosidade e absorverão como maior facilidade a teoria da função exponencial crescente.

Terminarei a questão traçando a função exponencial, mostrando o impacto que causa a exponenciação e darei exemplos dos efeitos da exponenciação nos empréstimos que as pessoas pegam em bancos, o efeito arrebatador do cartão de crédito quando contraímos dívidas e pagamos a quantidade mínima, falarei sobre o sistema financeiro nacional referente ao financiamento de casa por muitos anos.

Trabalho para ser feito em casa: Os grupos deverão resolver o exercício de Rei e o Sábio que inventou o jogo de xadrez. Para isso, deverão utilizar a planilha Excel que cria uma fórmula para o cálculo e desenvolver o resultado.

Idem para a contra proposta do Rei.

Estarei mostrando como se utiliza uma planilha Excel e como se pode fazer uma fórmula, mas antes eles deverão tentar resolver sozinhos.

O exercício será resolvido na próxima aula.

## **Quinta Aula**

**Duração:** 2ª semana, 2 tempos.

**Conteúdo:** Mostrar uma planilha Excel, ensina como são feitos cálculos simples através de fórmulas.

**Material:** Computador com planilha Excel.

**Definição:** Entendo como necessário fazer com que os alunos conheçam a planilha Excel. Aproveitando o exercício utilizaremos toda a aula para o ensinamento das fórmulas de soma, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação para podermos resolver o exercício.

## Sexta Aula

**Duração:** 2ª semana, 2 tempos.

**Conteúdo:** Mostrar a teoria da função exponencial crescente e decrescente iniciando exercícios de fixação.

**Material:** Caderno, caneta, quadro, pilot e apagador.

**Definição:** A função exponencial crescente já foi mostrada na aula anterior, nesta aula será demonstrada a função  $f(x) = a^x$

O próximo passo será a demonstração da função decrescente onde utilizaremos a reta numérica para a explicação. A minha proposta para o entendimento da função decrescente é mostrar através da reta numérica que tal função estará compreendida entre o zero e um e, para isso marcarei vários pontos na reta mostrando que qualquer número elevado a um expoente negativo será sempre maior que zero e menor que um.

### Exercícios

Os primeiros exercícios serão para identificarem os pares ordenados em um gráfico de uma função exponencial, crescente e decrescente, mostrando que existe a mesma relação com as funções do primeiro e segundo graus.

A finalidade desses exercícios é a de os alunos acharem o valor das incógnitas em uma função exponencial substituindo os pares ordenados pelos valores x e y da função.

## Sétima Aula

**Duração:** 3ª semana, 2 tempos.

**Conteúdo:** Exercícios envolvendo multiplicação de bactérias onde estarei utilizando somente a função exponencial crescente.

**Material:** Caderno, caneta, quadro, pilot e apagador.

**Definição:** A finalidade desses problemas é desenvolver a interpretação dos alunos utilizando problemas onde exigirão dos alunos muita atenção para descobrir o que está sendo pedido.

### Problemas:

- 1) Numa população de bactérias há  $P(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$  bactérias no instante  $t_0$ , medido em horas ( ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem  $10^9$  bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial.

A ideia é fazer com que os alunos entendam que o momento  $t_0$  é o instante inicial onde  $t$  será igual a zero. Substituindo o t por zero e resolvendo a equação o aluno perceberá

que a informação dada que inicialmente existem  $10^9$  bactérias é verdadeira e que poderia ser dispensada não alterando o entendimento do problema.

Além da resolução da equação exponencial, o aluno terá que transformar uma fração da hora em minutos para poder descobrir o tempo que é pedido no problema.

- 2) O número  $N$  de bactérias, em milhares, de uma população no instante  $t$  é dado por:  $N = 3 - 3 \cdot (0,8)^t$ . O número de bactérias chega a 1,08 mil após um  $t$  igual a quantos dias?

A ideia é fazer com que o aluno interprete que o total de bactérias é o  $N$  e que o que se quer achar é o valor de  $t$  que será o número de dias.

Aproveito para alertar aos alunos que é muito importante saber calcular equação exponencial visto que os problemas de função exponencial são relativamente fáceis e que o aluno pode ter dificuldades na resolução da equação exponencial.

- 3) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número de bactérias após uma hora é dado pela função abaixo. Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51200 bactérias depois de quanto tempo.

## Oitava Aula

**Duração:** 3ª semana, 2 tempos.

Continuação dos problemas da sétima aula.

- 4) Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece a lei  $N(t) = m \cdot 2^{\frac{t}{2}}$  na qual  $N$  representa o número de bactérias no momento  $t$ , medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, ao fim de 8 horas o número delas será?

Introduzi uma incógnita que só será encontrada se aluno associar o instante zero com o valor inicial do número de bactérias.

- 5) As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de duas casas  $A$  e  $B$ , adquiridas na mesma data, passados  $t$  anos da data da compra:

$$\text{Casa A: } V = 2^{t+1} + 120$$

$$\text{Casa B: } V = 6 \cdot 2^{t-2} + 248$$

- a) Por quais valores foram adquiridas as casas  $A$  e  $B$  respectivamente?  
b) Passados 5 anos da compra, qual delas estará valendo mais?  
c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambas tenham iguais valores?

## Nona Aula

**Duração:** 3ª semana, 2 tempos.

Continuação dos problemas de função exponencial (oitava aula).

- 6) Na lei  $n(t) = 15000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+K}$ , sendo  $K$  uma constante real, está representada a população ( $n(t)$ ) que um município terá daqui a  $t$  anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10000 habitantes, determine:
- o valor de  $K$
  - A população do município daqui a 3 anos.
- 7) A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação da água por resíduos industriais. A lei  $n(t) = 5000 - 10 \cdot 2^{t-1}$  fornece a estimativa do número de espécie vivas ( $n(t)$ ) em função do número de anos ( $t$ ) transcorridos após a instalação do parque na região.
- Estime a quantidade de peixes que viviam no lago no ano da instalação do parque industrial.
  - Algum tempo após as indústrias começarem a operar, constatou-se que havia no lago menos de 4920 peixes. Para que valores de  $t$  vale essa condição?
  - Uma ONG divulgou que, se nenhuma providência for tomada, em uma década (a partir do início das operações) não haverá mais peixes no lago. Tal afirmação procede?
- 8) Em um artigo de economia foi publicada uma previsão para o valor de um lote de ações de determinada empresa, dada pela relação:  $V(t) = 2000 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \sqrt{3}^t$ , sendo  $V(t)$  o valor do lote no mês  $t$ , contado a partir da data de publicação.
- Se um investidor comprou o lote no dia dessa publicação, quanto pagou por ele?
  - Para que o lote passe a valer R\$ 2121,50 ou mais, o investidor precisará esperar por, no mínimo,  $n$  meses. Qual é o valor de  $n$ ?

### Décima Aula

Duração: 4ª semana, 3 tempos

Utilizei um problema envolvendo função exponencial voltado para o cálculo financeiro e com base nesse problema mostrei como são calculados os juros de uma aplicação financeira, os descontos e equivalência de capitais.

Em um depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula  $C=D(1+t)^n$ , em que  $C$  representa o capital acumulado,  $D$  o valor do depósito,  $t$  a taxa de juros ao ano e  $n$  o número de anos. Supõe-se que, ao final de cada ano, os juros capitalizados sejam sempre acumulados ao depósito.

- Para um depósito de R\$ 2000,00, a uma taxa de 12% ao ano, qual o capital acumulado ao fim de 1 ano? Calcule também o capital acumulado ao fim de 5 anos, de 10 anos e de 20 anos.  
(Lembre-se de que  $12\% = \frac{12}{100} = 0,12$ )
- Se a taxa fosse de 9% ao ano, qual seria o capital acumulado nos mesmos períodos de tempo?

- c) Construa, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos que mostram a variação do capital em função de  $n$  nos itens a e b.
- d) Para um depósito de R\$ 1000,00, à taxa de 10,5% ao ano, durante quantos anos o capital será menor ou igual a R\$ 5000,00?

### **Décima Primeira Aula**

Duração: 4ª semana, 3 tempos

Educação financeira

Abaixo segue alguns assuntos que foram abordados com os alunos a respeito de educação financeira.

Como controlar a receita, a despesa, corte de despesa.

O que é orçamento, como registrar os seus gastos diários. Um orçamento pode ajudar a você a controlar seus gastos de forma mais consciente e inteligente.

O que é custo fixo e custo variável.

Para gastar é preciso ter.

### **AVALIAÇÃO**

As minhas avaliações são compostas de:

- Um trabalho com apresentação de três problemas onde os grupos têm um prazo de duas semanas para entregarem. Esses problemas são retirados de provas de vestibulares e normalmente eu faço uma adaptação de forma a exigir maior esforço do grupo para a resolução, normalmente acompanhada de algum tipo de pesquisa. Valor 1 ponto
- Um teste em sala de aula composto de três questões abordando todo o assunto. Esse teste é uma amostra de como poderá vir à prova e para realizá-lo oriento aos alunos estudarem como fossem fazer uma prova. Essa estratégia faz com que alguns alunos se preparem bem para a prova. Normalmente dou o teste faltando poucos dias para as provas bimestrais. Valor 1 ponto
- Uma prova bimestral com seis questões, abordando toda a matéria dada. Valor 8 pontos.
- Atribuo um ponto para os alunos que fazem a prova do Saerj.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Contexto e Aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. p. 228-254. 1 v.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**. Ciência e Aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2006. p. 136-150. 1 v.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009. p. 168-181. 1 v.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**. Ensino Médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 172-181. 1 v.