Formação Continuada em Matemática

Fundação Cecierj/ Consórcio Cederj

Matemática 1º ano - 4º bimestre de 2012

Plano de Trabalho

Função Exponencial

Cursista: Luciano Araujo Rêgo

Tutor: Lezieti Cubeiro da Costa

Grupo: 4

Introdução

Este plano de estudo tem por finalidade nortear a prática pedagógica durante 18 aulas em que o tema Funções Exponenciais , será abordado no 4º bimestre do 1º ano do Ensino Médio. Visando definir previamente quais metas serão buscadas, quais objetivos serão propostos, qual metodologia será utilizada, assim como os critério avaliativos.

Aos alunos em um primeiro momento será apresentada uma revisão de potenciação, visto que este é um pré-requisito necessário para o estudo da Função Exponencial, assim como o conhecimento do conceito de função.

No momento seguinte para definir de forma lúdica o conceito de Função Exponencial utilizaremos o problema do Xadrez apresentado no roteiro de ação 1 e posteriormente o conceito da Função Exponencial e seus gráficos tratados formalmente através de situações cotidianas.

A avaliação da aprendizagem se dará através de questões concernentes aos assuntos abordados , com o caráter diagnóstico e formativo, não somente privilegiando o aspecto quantitativo , mas também o qualitativo.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Revisão Potenciação

Na operação com potências, ao efetuarmos a sua resolução podemos utilizar algumas propriedades para simplificar os cálculos.

Produto de potência de mesma base

Sem utilizar essa propriedade resolveríamos uma multiplicação de potência de mesma base da seguinte forma:

$2^2 . 2^3 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 2^5 = 32$

Utilizando a propriedade de produtos de mesma base, resolvemos da seguinte forma: como é um produto de bases iguais, basta repetir a base e somar os expoentes.

$2^2 . 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

$5^1 . 5^3 = 5^{1+3} = 5^4 = 625$

Quocientes de potências de mesma base

Sem utilizar dessa propriedade, o cálculo do quociente com potência 128 : 126 ficaria da seguinte forma:

$12^8 : 12^6 = 429981696 : 2985984 = 144$

Utilizando a propriedade do quociente de mesma base, a resolução ficaria mais simplificada, veja: como nessa divisão as bases são iguais, basta repetir a base e diminuir os expoentes.

$12^8 : 12^6 = 12^{8-6} = 12^2 = 144$

$(-5)^6 : (-5)^2 = (-5)^{6-2} = (-5)^4 = 625$

Potência de Potência

Quando nos deparamos com a seguinte potência $(3^2)^3$ resolvemos primeiro a potência que está dentro dos parênteses e depois, com o resultado obtido, elevamos ao expoente de fora, veja:

$(3^2)^3 = (3 . 3)^3 = 9^3 = 9 . 9 . 9 = 729$

Utilizando a propriedade de potência, a resolução ficará mais simplificada: basta multiplicarmos os dois expoentes, veja:

$(3^2)^3 = 3^{2 . 3} = 3^6 = 729$

$(-9^1)^2 = (-9)^{1 . 2} = (-9)^2 = 81$

Potência de um produto

Veja a resolução da potência de um produto sem utilizarmos a propriedade:
$(3 \times 4)^3 = (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4)$
$(3 \times 4)^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4$
$(3 \times 4)^3 = 27 \times 64$
$(3 \times 4)^3 = 1728$

Utilizando a propriedade, a resolução ficaria assim:

$(3 \times 4)^3 = 3^3 \times 4^3 = 27 \times 64 = 1728$

Potência com expoente negativo

Toda e qualquer potência que tenha expoente negativo é equivalente a uma fração o qual o numerador é a unidade positiva e o denominador é a mesma potência, porém apresentando o expoente positivo.

<u>Exemplos de fixação:</u>

1) $2^{-4} = 1/2^4 = 1/16$

2) $3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$

3) $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$

Um pouco de História ...

Há uma lenda sobre o jogo de xadrez que conta que um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação. O sábio pede como prêmio grãos de trigo. O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a simplicidade do pedido.

1º Parte – Entendendo o pedido do sábio

1) O rei parece perplexo com o pedido. E você? Qual a sua opinião sobre o pedido do sábio? A quantidade de grãos pedida poderia ser paga pelo rei? Discuta com seus colegas sobre essa questão.

2) Vamos entender o pedido do sábio inventor do jogo de xadrez? Para isso, preencha a Tabela 1 até a 10º casa do tabuleiro, seguindo as orientações do texto.

Casas do tabuleiro	Grãos recebidos
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512

Vocês observaram que a quantidade de grãos está dobrando a cada passagem de casa do tabuleiro, mas o mesmo não ocorre com as casas do tabuleiro.

Mediante essa observação podemos criar uma fórmula onde estaremos relacionando a quantidade de grãos (y) com as casas dos tabuleiros (x) .

$$\mathbf{2^{x-1} = y}$$

Onde temos um exemplo de função exponencial.

DEFINIÇÃO

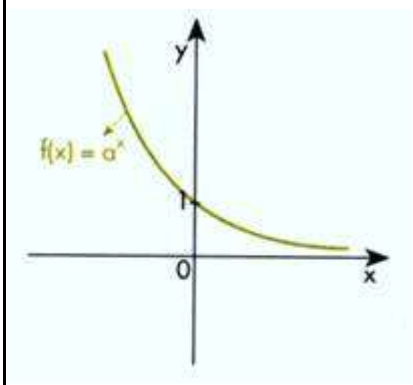
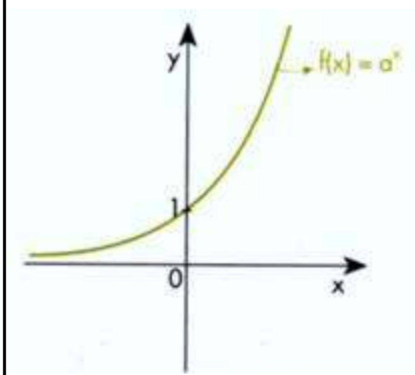
A função exponencial é a definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Podemos concluir, então, que a função exponencial é definida por:

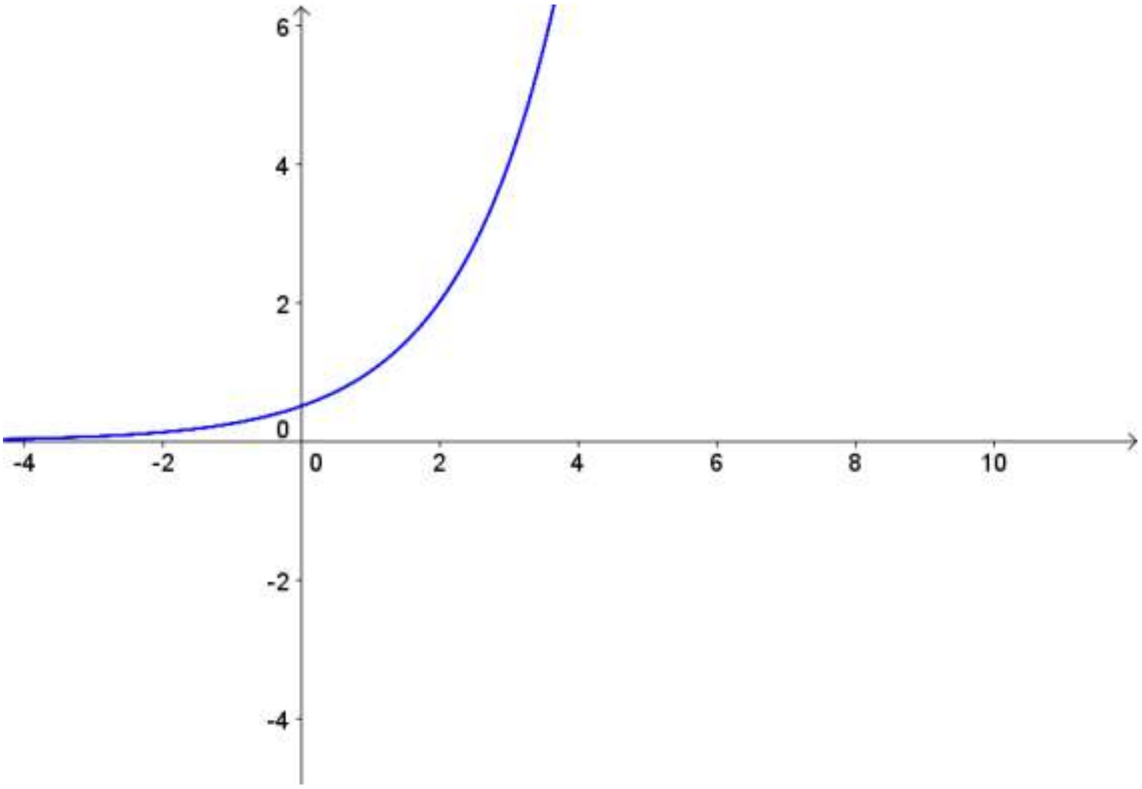
$$y = a^x,\ com\ 1 \neq a > 0$$

GRÁFICOS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Função exponencial **0 < a < 1**	**Função exponencial** **a > 1**
f: IR $\longrightarrow$ IR x $\longrightarrow$ a^x  ● Domínio = IR ● Contradomínio = IR^+ ● f é injectiva ● f(x) > 0 , ∀ x Є IR ● f é continua e diferenciável em IR ● A função é estritamente decrescente.	f: IR $\longrightarrow$ IR x $\longrightarrow$ a^x  ● Domínio = IR ● Contradomínio = IR^+ ● f é injectiva ● f(x) > 0 , ∀ x Є IR ● f é continua e diferenciável em IR ● A função é estritamente crescente.

● y = 0 é assimtota horizontal	● y = 0 é assimptota horizontal

Sendo assim o gráfico da tabela gerada pelo o problema do tabuleiro de xadrez seria assim:



Onde podemos observar claramente que ao andarmos para a direita no eixo horizontal(x), sempre teremos um valor maior no eixo vertical(y) .

Algumas aplicações da função exponencial:

Microbiologia: Uma população de bactérias dobra seu número a cada 20 minutos. Se o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 2 horas e 40 minutos?

R: após um período de 20 minutos, teremos $2= 2^1$ bactérias .

Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, após 40 minutos, teremos $4= 2^2$ bactérias.

Após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos $256 = 2^8$ bactérias.

Finanças: Um capital de R$ 100,00 foi aplicado numa caderneta de poupança, que rende 2% ao mês. Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \times 1{,}02^t$, para calcular o saldo M dessa caderneta após t meses.

R: para t=1 , teremos: M(1) = 100 x $1{,}02^1$ = M(1) = 102

Portanto, após 1 mês o saldo será de R$ 102,00 .

Para T= 12, teremos M(12) = 100x $1{,}02^{12}$ = M(12) = 126,68

Portanto, após 1 ano o saldo será aproximadamente R$ 126,68 .

Gráfico da função exponencial

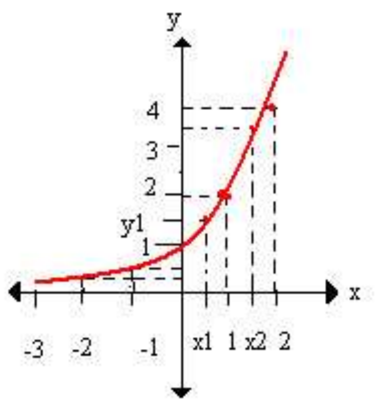
Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais.

Exemplos:

$f(x) = 2^x$

x	f(x)
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

Quando a > 1. Ex. $y = 2^x$ (a> 1), atribuindo valores para x e y, temos:



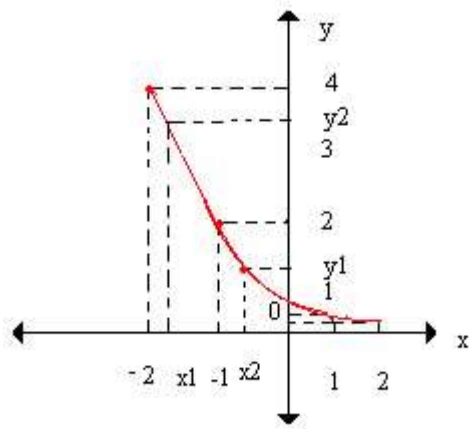
Neste caso dizemos que a função é crescente.

$g(x)= (1/2)^x$

x	g(x)
-3	8

-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Quando $0 < a < 1$. Ex. $y = (1/2)^x$ $(0 < a < 1)$



Neste caso dizemos que a função é decrescente .

Atividades avaliativas.

Responda as questões abaixo relacionadas a equações exponenciais.

1- Diga se as funções exponenciais abaixo são crescentes ou decrescentes:
DESCRITOR: H66,B1

a) $f(x)= 5^x$ R: crescente

b) $g(x) = (0,3)^x$ R: decrescente

c) $h(x)=(\sqrt{2})^x$ R: crescente

d) $y(x) =(3/8)^x$ R: decrescente

2- Crescimento populacional : **DESCRITOR H58,B1**

Em uma cidade, o número de habitantes é dado pela função $H(r)= K \cdot 2^{3x}$, em que K é constante e x , que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade, é positivo e em quilômetros. Sabendo que existem 20.480 habitantes num raio de 4km contados desde o centro, quantos habitantes há num raio de 6Km?

R: nesse problema, utilizando-se da função dada, pode-se descobrir o valor da constante K:

$H(r)= K \cdot 2^{3x} = 20.480 \rightarrow K \cdot 2^{12} \longrightarrow K= 20.480/2^{12} \rightarrow K=20.480/4.096 \rightarrow K=5$

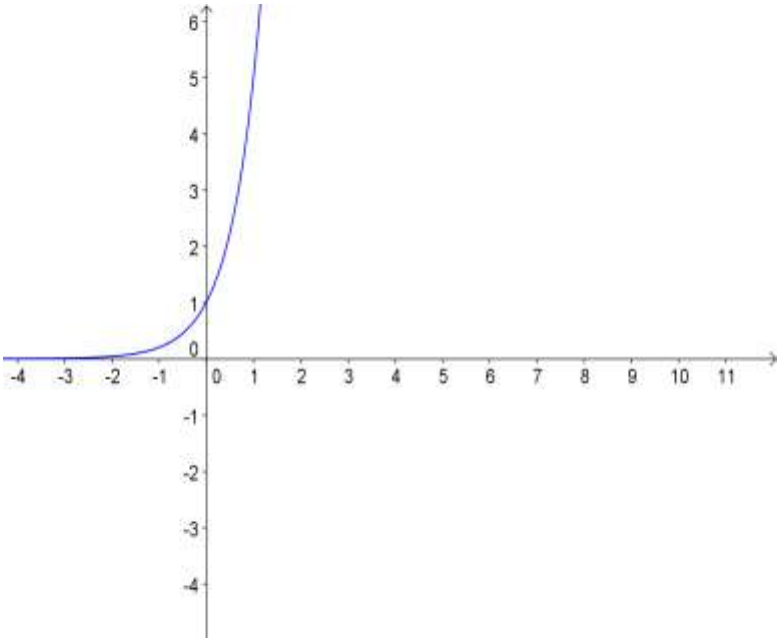
Assim sendo, para um raio de 6 km, substituem-se a constante K e o raio x;

$H(r)= K \cdot 2^{3x} \longrightarrow H(6)= 5 \cdot 2^{18} \rightarrow H(6)= 1.310.720$

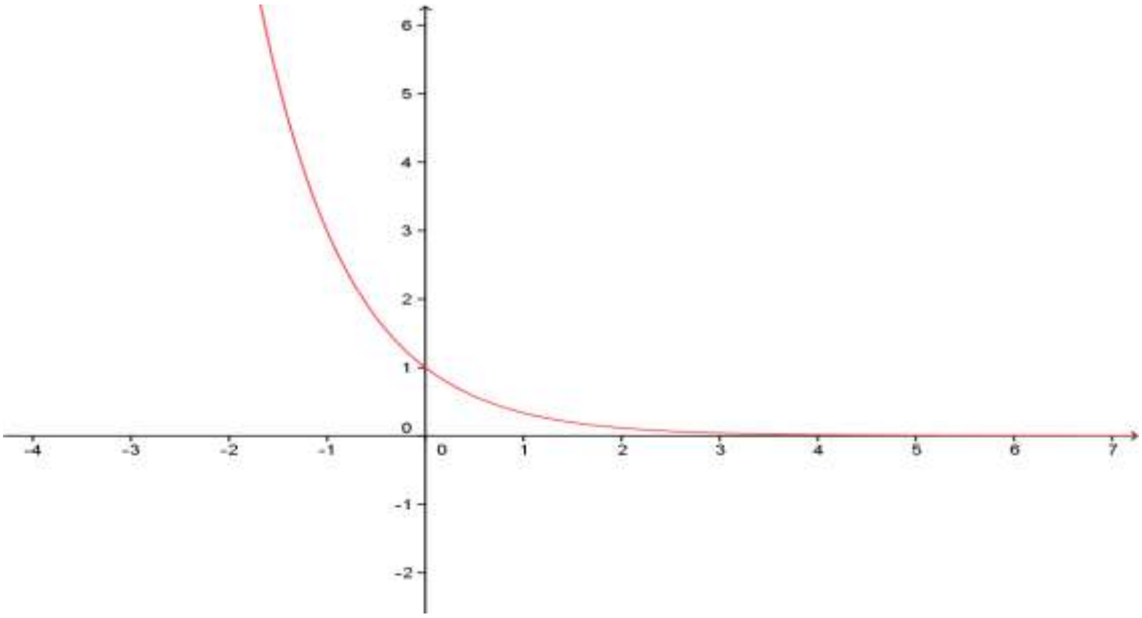
Portanto, haverá ao todo 1.310.720 pessoas.

3-Construa os gráficos das funções abaixo: **DESCRITOR: H63,C2,B1**

a) $f(x)= 5^x$



b) $g(x)=(1/3)^x$



Referências Bibliográficas:

GIOVANNIi, José Ruy. Bonjorno, José Roberto. **Matemática-1º ano.** São Paulo: FTD, 1992.

MELLO, José Luiz Pastore . **MATEMÁTICA: Construção e Significado**. São Paulo, Moderna, 2005.

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS –**Funções Exponenciais**- Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

SILVA,Marcos Noé Pedro da. **Propriedades das Potências**. Disponível em: < http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/propriedades-das-potencias.htm>. Acesso em: 02-11-2012 .