

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

Matemática 1º Ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho

Função Exponencial



AndreasReh/iStockphoto

Cultura de bactérias observado em placa de petri

<http://saude.hsw.uol.com.br/bacteria.htm>

Tarefa 1

Cursista: Nivaldo Batista Macedo

Tutor: Lígia Vitoria de Azevedo Telles

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
METODOLOGIA	4
DESENVOLVIMENTO	5
AVALIAÇÃO	31
FONTES DE PESQUISA	32

INTRODUÇÃO

“A aprendizagem das novas tecnologias e suas ferramentas não é linear. Não há mais “um passo antes do outro”. Assim como você pode navegar na internet por links (hipertexto!), você também pode aprender em pequenas doses, em passos não seqüenciais, explorando o que lhe parecer melhor naquele momento e criando seu próprio percurso de aprendizagem. Entenda isso como uma *hiperaprendizagem*.”

ANTONIO, José Carlos. As TICs, a Escola e o Futuro, **Professor Digital**, SBO, 20 jan. 2011. Disponível em: <<http://professordigital.wordpress.com/2011/01/20/as-tics-a-escola-e-o-futuro/>>. Acesso em: 4/11/2012.

Esse trabalho visa apresentar a primeira parte do currículo mínimo, conforme exposto a seguir:

- Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente.
- Resolver equações exponenciais simples.
- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- Resolver problemas significativos utilizando a função exponencial.

A abordagem dos temas será em sua grande maioria nas formas algébricas e geométrica. Algumas das aulas estarão desenvolvidas no Geogebra, permitindo um maior dinamismo e maior possibilidade para o aluno compreender os conteúdos.

Isto ainda está longe do ideal que esperamos para o uso das TICs como uma forma de tornar a Escola mais atrativa e mais atualizada com esses recursos, mas já é um primeiro passo.

METODOLOGIA

A dinâmica metodológica será desenvolvida a partir de aulas teóricas e/ou expositivas preferencialmente dialogadas e acompanhadas de exercícios práticos com a apresentação e discussão dos resultados, incentivando a criatividade e a maturação matemática do estudante.

O professor agirá como agente orientador e mediador no raciocínio do estudante nos processos mentais de investigação e na análise de problemas e situações reais.

Sempre que julgar necessário e possível usaremos de softwares de geometria dinâmica para que o aluno possa verificar os resultados ou dar corpo a seus cálculos além de poder investigar situações análogas.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

Potências e suas propriedades - Revisão

PRÉ-REQUISITOS: Conhecimentos básicos sobre potências e contagem.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de exercícios.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Reduzir ao mínimo possível dúvidas com relação a potências, item fundamental para a compreensão das equações exponenciais e da função exponencial.

Esta atividade é composta de duas etapas: na primeira será entregue uma folha de exercícios para os alunos resolverem e de onde procuraremos verificar o que ainda lembram e, posteriormente, identificar as principais dúvidas; na segunda etapa o professor corrige as questões discutindo cada caso.

Potências e suas propriedades – Exercícios de Revisão

1) Calcule as potências:

- a) 2^5
- b) 3^4
- c) $(-2)^2$
- d) 2^{-3}
- e) 5^{-1}
- f) $(3/4)^{-2}$
- g) $1 / 2^{-3}$
- h) 5^0
- i) $(-3)^0$
- j) $(4/5)^0$

2) Escreva na forma de potência com expoente fracionário:

- a) $\sqrt{2}$
- b) $\sqrt[3]{5^2}$
- c) $\sqrt[4]{2}$
- d) $\sqrt[3]{3}$

3) Escreva como uma potência de base 3:

- a) 81
- b) 9
- c) $\sqrt[4]{27}$
- d) 243
- e) $1 / 27$

4) Escreva como uma potência de base 2:

- a) 32
- b) 1024
- c) 8
- d) $\sqrt{128}$
- e) $1/32$

5) Escreva o número 64 como uma potência de base 2 e como uma potência de base 4.

6) Escreva como uma potência de base 10:

- a) $\sqrt[3]{100}$
- b) 10000

- c) $1/100$
- d) 0,001

7) Usando as propriedades das potências de mesma base, escreva como uma só potência:

- a) $2^2 \cdot 2^5$
- b) $3^6 \cdot 3^3$
- c) $5^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^6$
- d) $10^6 \cdot 10^8 \cdot 10^4$
- e) $3^5/3$
- f) $5^9/5^3$
- g) $3^3/3^7$
- h) $(3^3)^6$
- i) $(2^4)^5$
- j) $[(0,6)^3]^9$

Atividade 2

Equações exponenciais elementares

PRÉ-REQUISITOS: Conhecimentos básicos sobre potências e contagem.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha impressa.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual quando exercícios resolvidos pelo professor; em grupos de dois alunos quando os exercícios forem destinados à classe.

OBJETIVOS: Resolver equações exponenciais simples.

Nesta aula, de caráter estritamente expositivo, o professor introduzirá a técnica para resolver as equações exponenciais.

1) Reduzimos os dois membros a uma mesma base, usando as propriedades das potências revisadas na atividade anterior:

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$$

2) Resolvemos em \mathbf{R} a equação $b = c$

Exercícios:

1) Resolva as seguintes equações exponenciais:

(Resolvidos pelo professor)

- a) $2^x = 256$
- b) $4^x = 32$
- c) $2^x = 1/16$
- d) $2^x = \sqrt[3]{4}$
- e) $2^{x^2-7x+12} = 1$

(Resolvidos pelos alunos)

- f) $2^x = 128$
- g) $3^{2x} = 343$
- h) $5^x = 1/125$
- i) $10^{3x} = 1/10000$
- j) $2^{x-2} = 8$
- k) $2^{x-3} = 1/8$
- l) $3^{x^2-5} = 81$
- m) $4^x = 512$
- n) $4^x = \sqrt{32}$
- o) $25^{2x} = \sqrt{5}$
- p) $10^{x^2-2x-2} = 10$
- q) $2 \cdot 3^{x^2-x-1} = 6$

Atividade 3

PRÉ-REQUISITOS: Conhecimentos de potenciação

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Jogo concreto e software Torres de Hanói ^[1]; notebook com Geogebra instalado; Projetor multimídia; aula dinâmica “Torres de Hanói” desenvolvida no Geogebra.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de 4 a 5 alunos.

OBJETIVOS: Compreender o que são fenômenos que crescem exponencialmente; introduzir a Função Exponencial.

Descrição da aula dinâmica

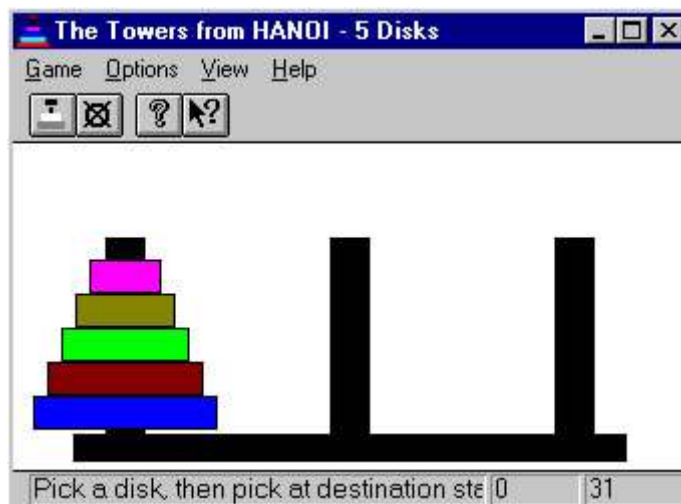
Quadro I



Apresentação do jogo Torres de Hanói.

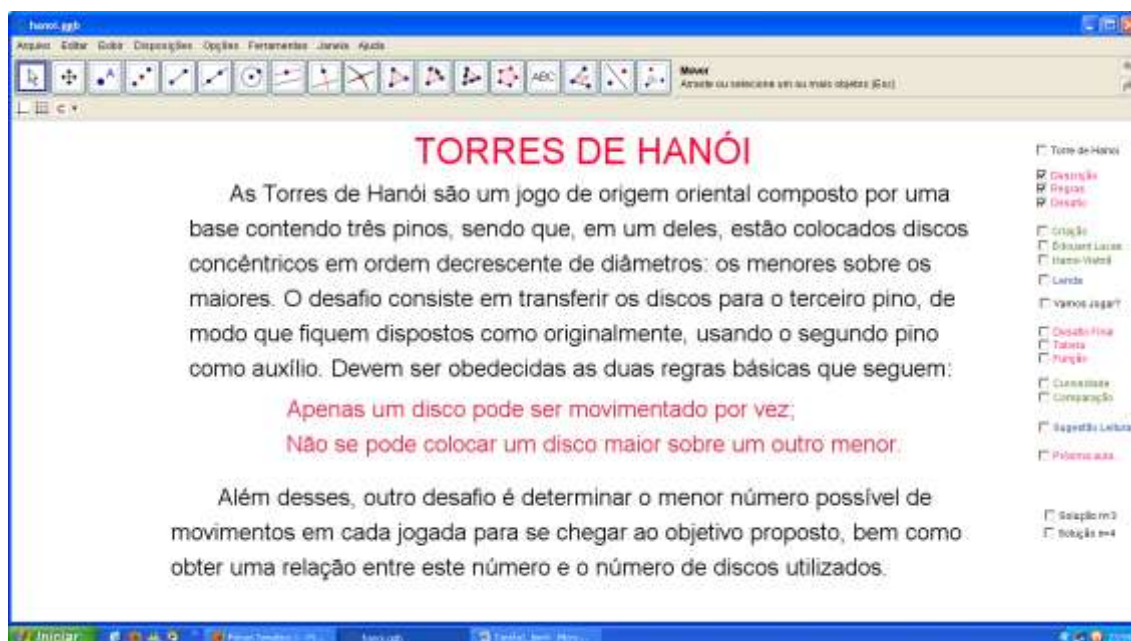
O professor dispõe de 5 conjuntos feitos em madeira e composto de 6 discos, havendo também a opção para o jogo na versão eletrônica conforme interface abaixo.

(Caso não disponha do jogo concreto, o professor pode instruir e pedir que os alunos construam usando isopor e canudinho de refrigerante ou varetas em madeira.)



[1] http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_recreativos.php

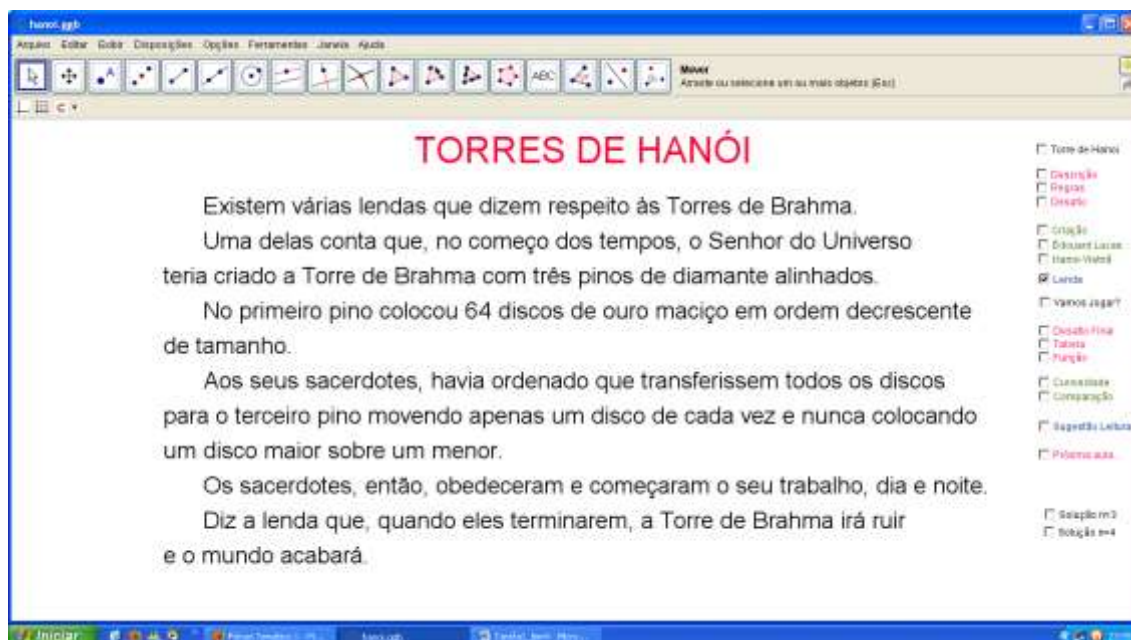
Quadro II



Explicação de como funciona o jogo, suas regras e objetivo que interessa ao nosso estudo.



O jogo e seu inventor. Contextualização histórica.



A lenda usada por Lucas quando da criação do jogo.

Quadro V



Aqui começamos a dar o tom matemático ao jogo.

Os alunos serão distribuídos em grupos e cada um desses grupos tentará resolver o quebra-cabeça com o menor número de jogadas.

Nota: Devido a problemas com o tempo de execução para $n=5$ e $n = 6$, fica aconselhado resolver apenas para $n=1$ até $n = 4$.

Quadro VI

Número de Discos n	Número Mínimo de jogadas $J(n)$	Potências de 2 2^n
1	1	
2	3	
3	7	
4	15	
5	31	
6	63	
(...)	(...)	(...)

$$f(n) = 2^n - 1$$

A partir da tabela, os alunos devem deduzir qual a função que determina o número mínimo de jogadas sabendo-se o número de discos.

Observação: As potências de 2 que irão ajudar aos alunos a concluir que a função é $f(n) = 2^n - 1$ são serão informadas mais tarde, caso os alunos não cheguem a essa função.

Quadro VII

TORRES DE HANOÍ
CURIOSIDADE

Para solucionar um Hanói de 64 discos, como diz a lenda, são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos. Considerando-se 1 segundo para cada movimento, o tempo necessário para efetuar-se esse número de movimentos é cerca de 585 000 000 000 anos!

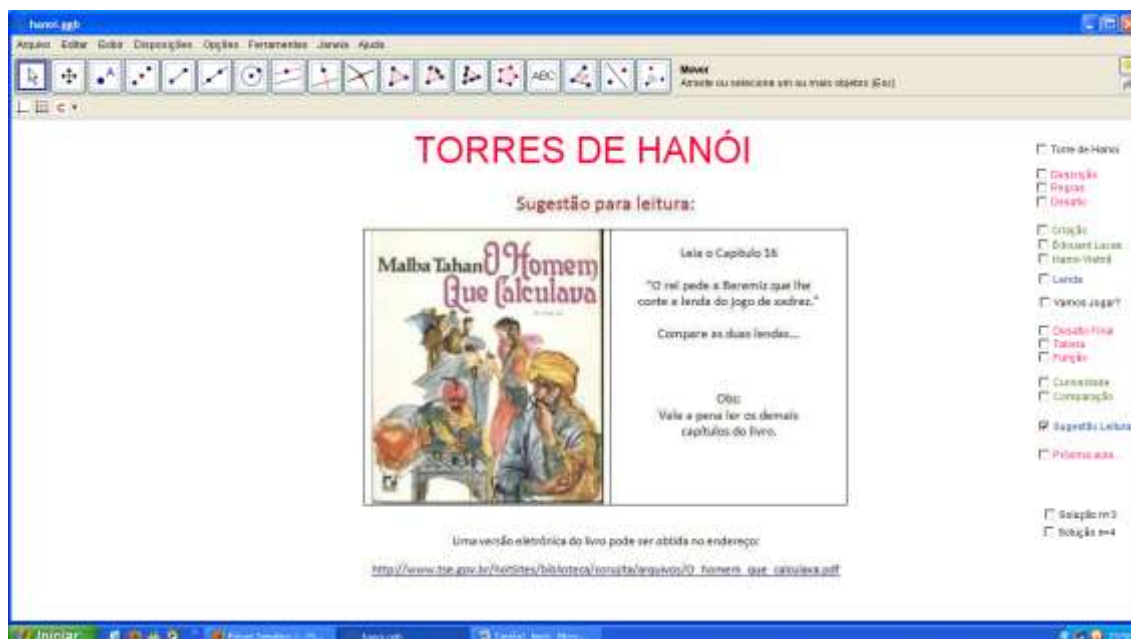
Só para termos uma ideia...

5	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0	anos	Tempo para efetuar os movimentos
4	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	anos	Idade da Terra
1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	anos	Idade do Universo (Big Bang)

Aqui é feita uma comparação para que os alunos tenham uma ideia da grandeza do número $2^{64} - 1$.

Otimizando-se o tempo para cada movimento em 1 segundo, comparamos com a idade aproximada da Terra (baseada em datação radiométrica de meteoritos) e com a idade aproximada do Universo (segundo a teoria do Big Bang).

Quadro VIII



Um convite à Leitura. Fica a sugestão de os alunos lerem o capítulo 16 da obra de Malba Tahan e comparar as duas lendas: a da origem do jogo de xadrez e a das Torres de Hanói. O que há de comum entre duas lendas em sob o ponto de vista da Matemática?

Quadro IX



Caso haja a necessidade de sanar dúvidas quanto ao menor número de jogadas, esse quadro dispõe das soluções para $n = 3$ e $n = 4$.

Após a apresentação e as atividades, espera-se que o aluno perceba o que é um crescimento exponencial.

O professor pode pedir que os alunos comparem o crescimento exponencial com o crescimento linear estudado no primeiro bimestre.

Além disso, o professor pode alertar e promover uma discussão sobre o crescimento exponencial (associação com os juros compostos) como o grande vilão dos casos de endividamentos e os riscos de se usar, por exemplo, o crédito rotativo dos cartões de crédito.

Atividade 4

Função exponencial - Gráfico

PRÉ-REQUISITOS: Potências; plano cartesiano.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

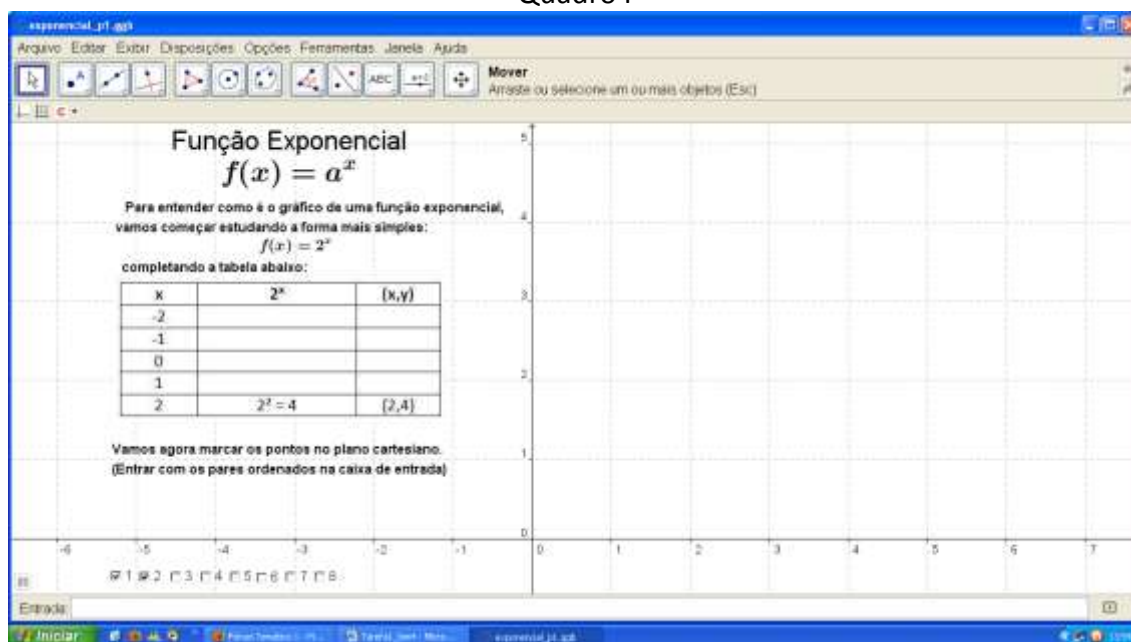
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Notebook com Geogebra instalado; Projetor multimídia; aula dinâmica “Exponencial-Parte1” desenvolvida no Geogebra.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual. No caso de resolução dos exercícios os alunos poderão discutir com seus colegas.

OBJETIVOS: Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

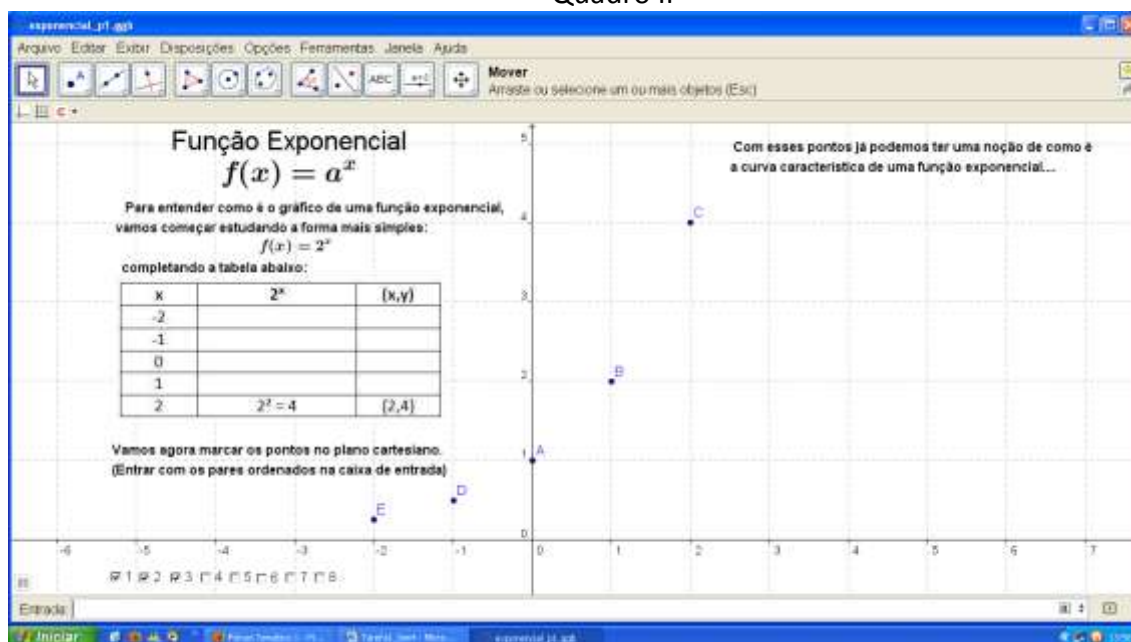
Descrição da aula dinâmica

Quadro I



Para compreender como é a curva característica de uma função exponencial, começamos com a tabela, onde os alunos dever calcular as imagens e anotar os pares ordenados obtidos.

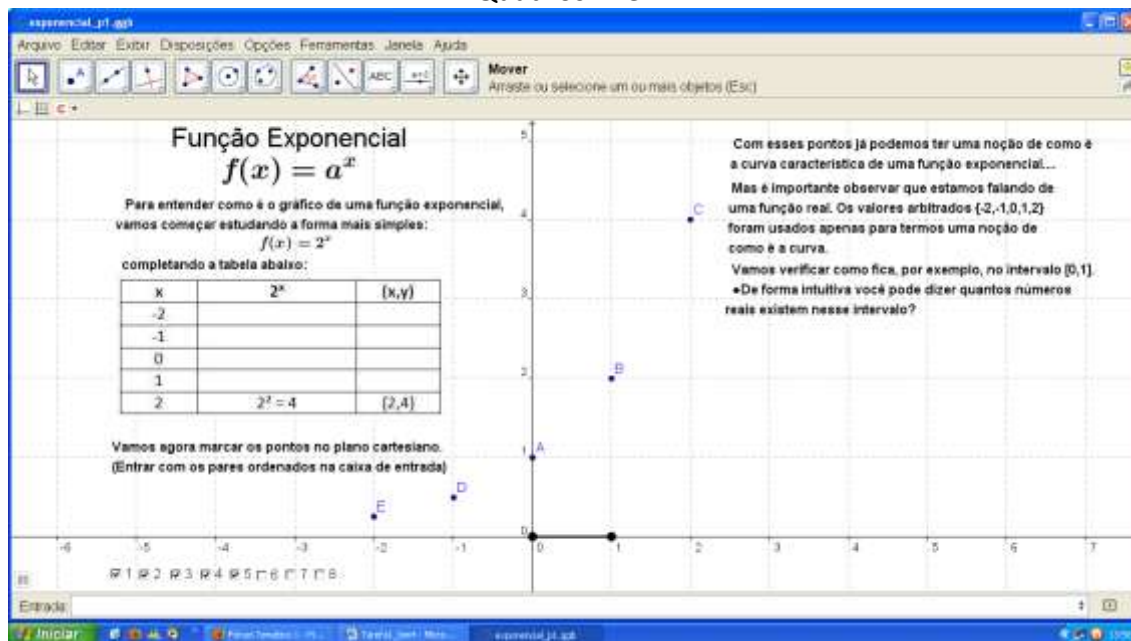
Quadro II



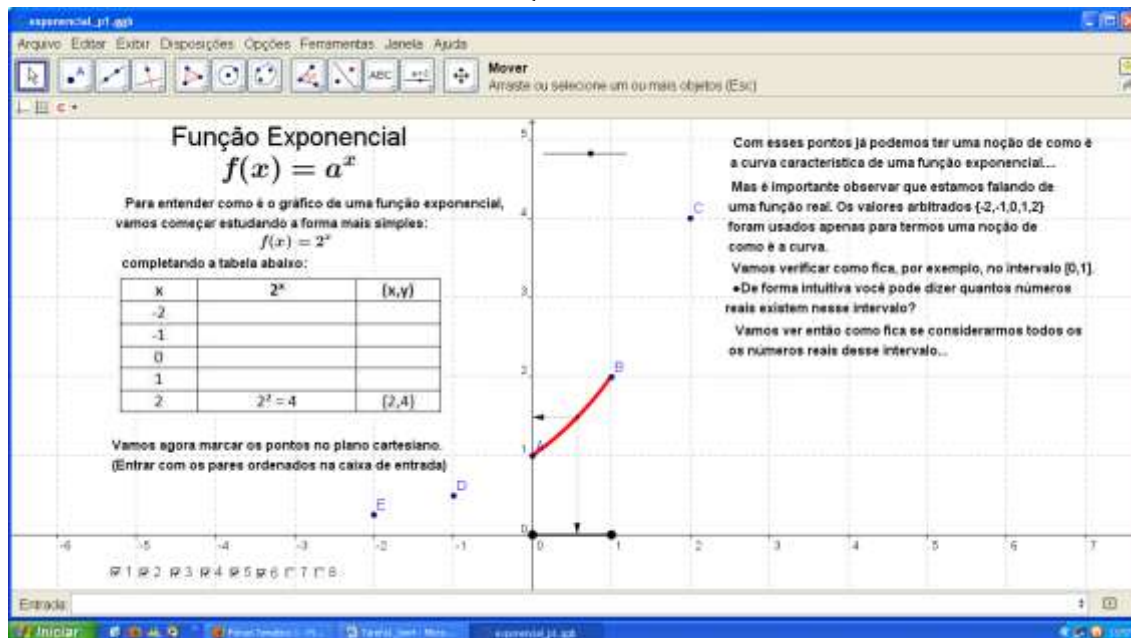
Após conferir os pares ordenados, esses valores serão lançados na caixa de entrada, permitindo perceber o tipo de curva.

O professor poderá solicitar que os alunos relembrem a função do primeiro grau (reta) e a do segundo grau (parábola).

Quadros III e IV

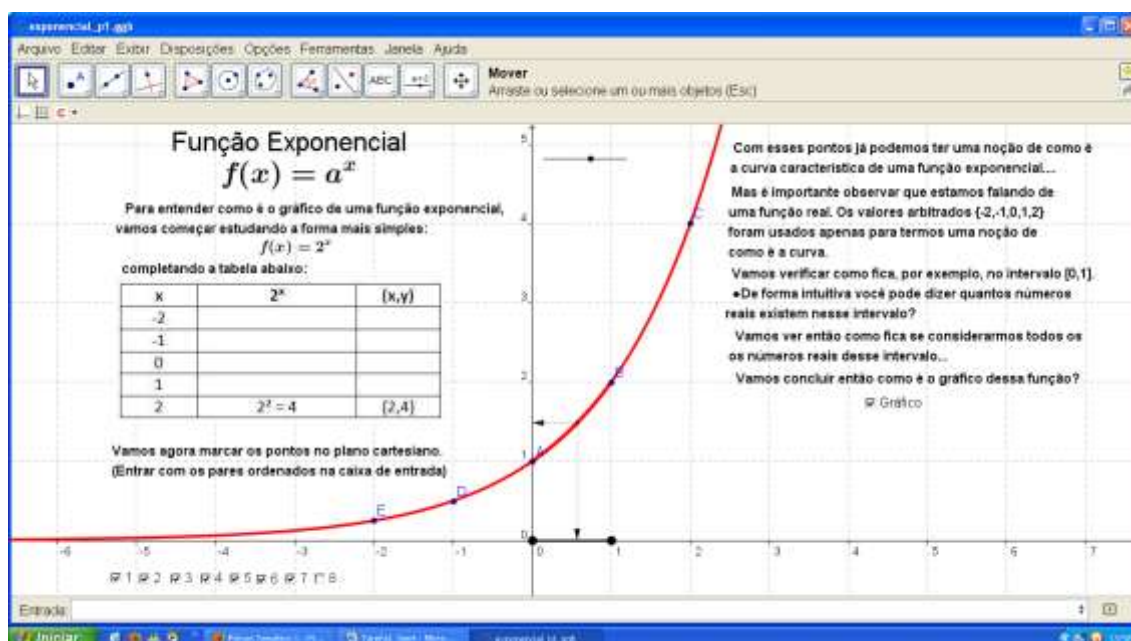


Quadro V



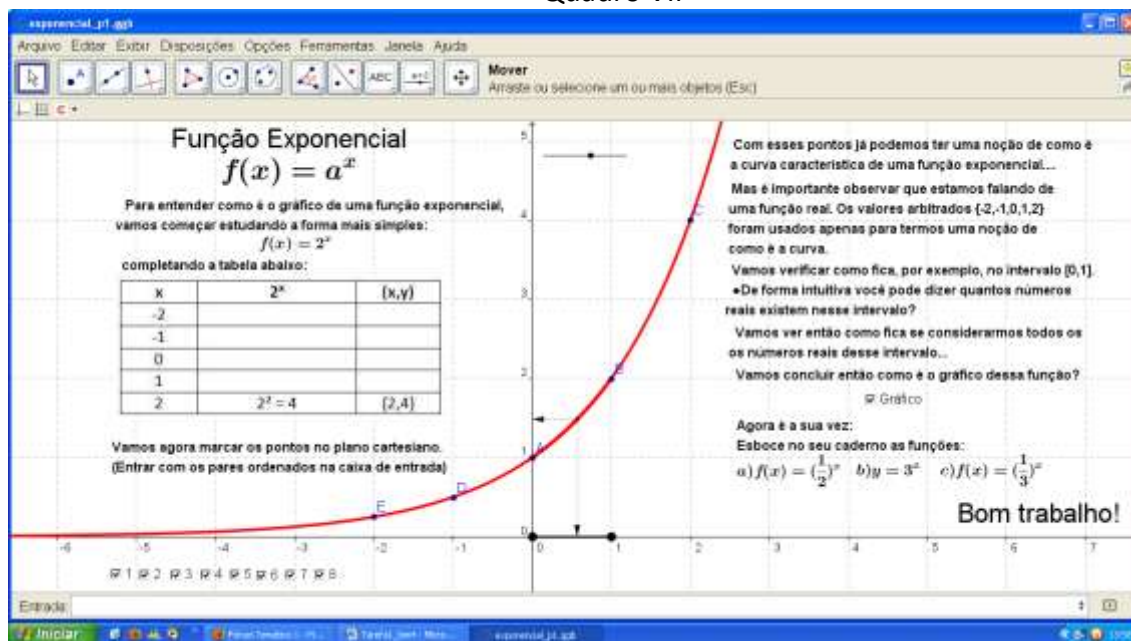
Nessas etapas foi idealizada uma forma de percebermos que a função é uma curva contínua, já que estamos falando de uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Espera-se que no próximo passo o aluno já tenha visualizado a curva.

Quadro VI



Nessa etapa esperamos que os alunos percebam como é o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e como é a curva característica da função exponencial.

Quadro VII



Nessa última etapa, os alunos deverão construir o gráfico de algumas funções exponenciais considerados de simples execução.

O professor poderá abrir uma nova janela do Geogebra e entrando com as funções $y=2^x$ e $y = (1/2)^x$ discutir com a simetria das funções a^x e $(1/a)^x$ em relação ao eixo y.

Atividade 5

Função exponencial – Aprofundamento do Estudo

PRÉ-REQUISITOS: Gráfico da função exponencial.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

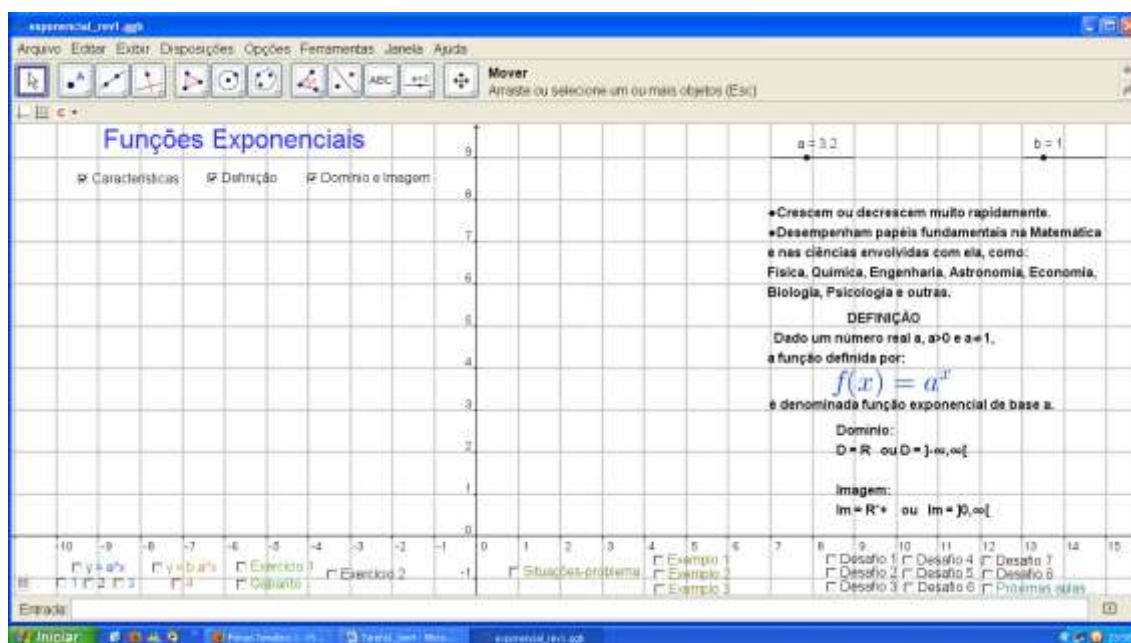
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Notebook com Geogebra instalado; projetor multimídia; aula dinâmica “Exponencial-Parte2” desenvolvida no Geogebra.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Compreender a definição da função exponencial; domínio e imagem; crescimento e decrescimento.

Descrição da aula dinâmica

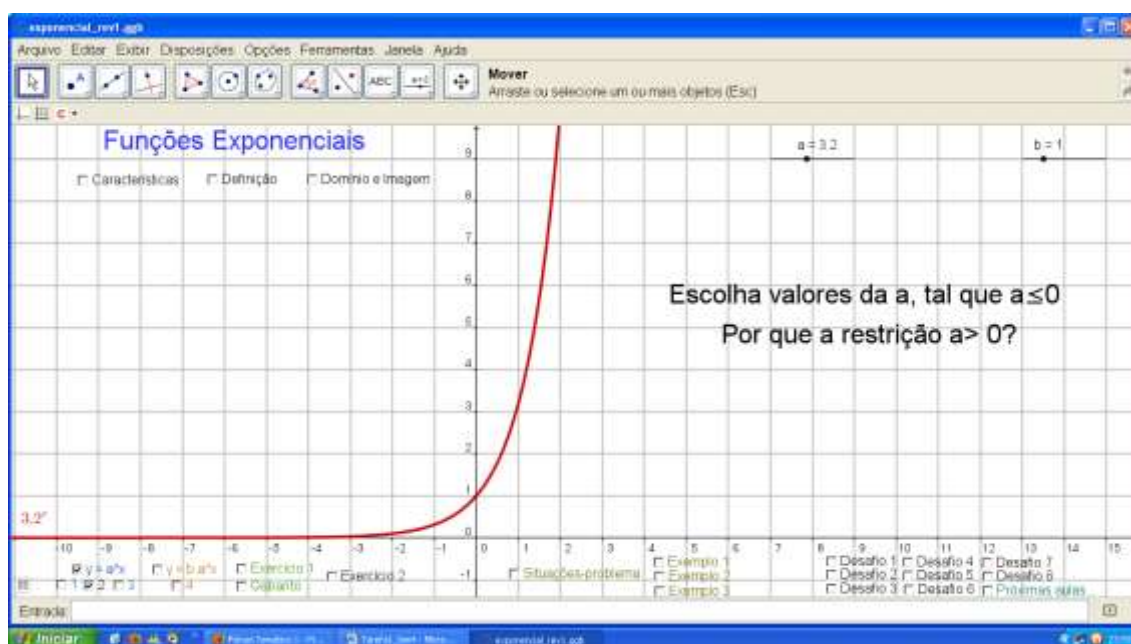
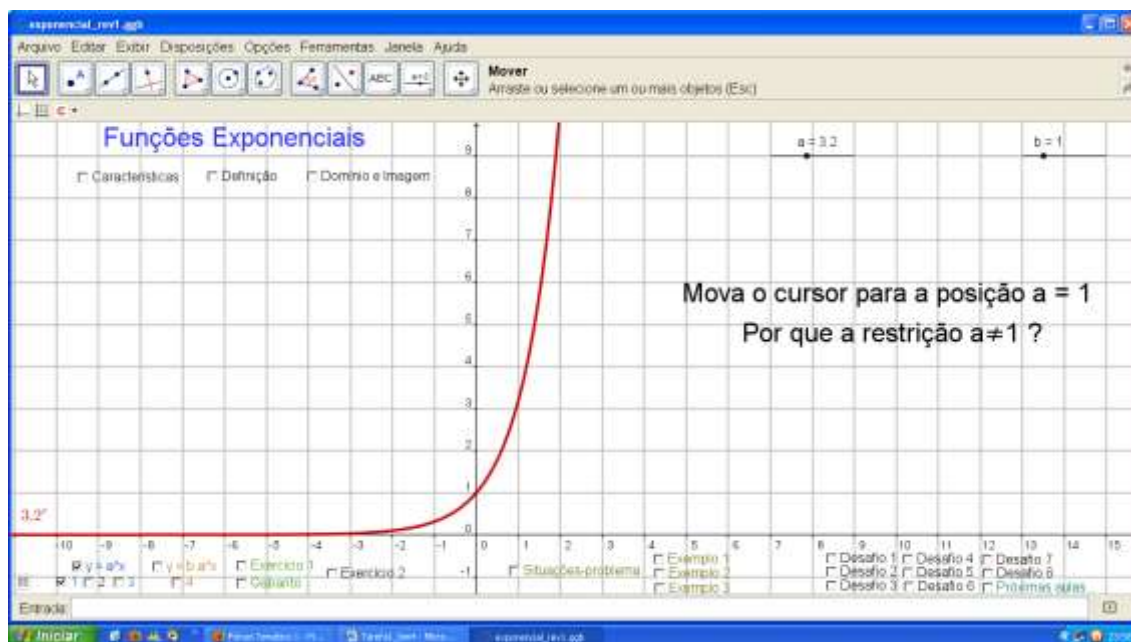
Quadro I



Nesta primeira etapa serão apresentadas as características das funções exponenciais, sua definição, seu domínio e imagem.

(Importante anotar que essas aulas desenvolvidas no Geogebra não substituem a fala do professor, muito há para ser dialogado e discutido em cada uma delas como, por exemplo nesse caso, por que a imagem é \mathbb{R}^+).

Quadros II e III



Nestas etapas, a partir de valores escolhidos nos cursores móveis, podemos modificar a curva e discutir o porquê das restrições $a > 0$ e $a \neq 1$.

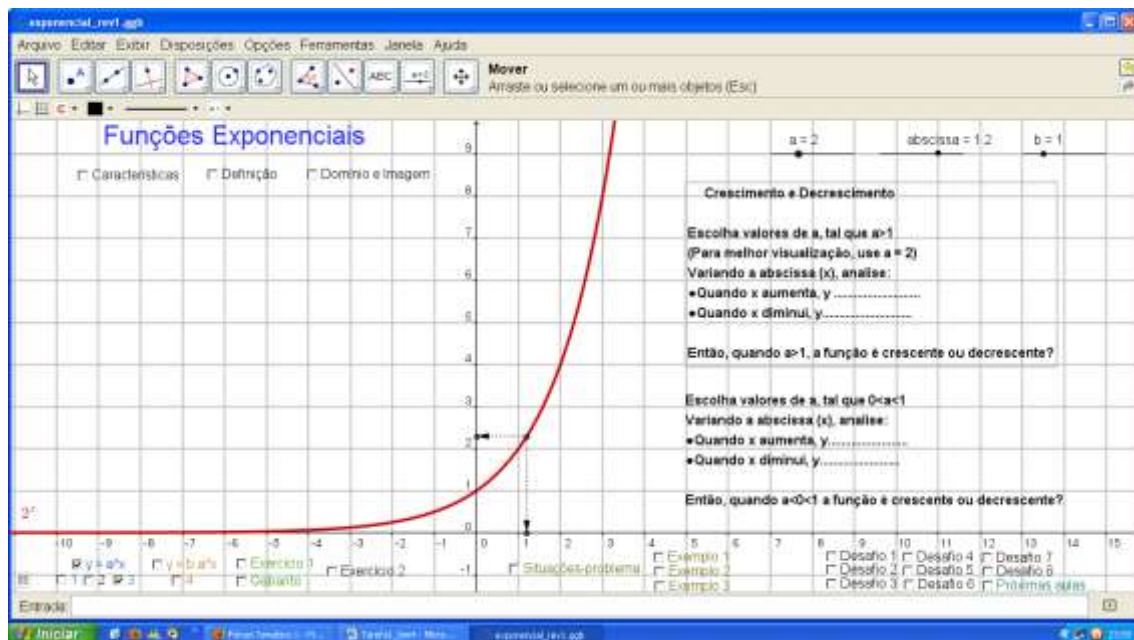
O professor convida aos alunos que tentem dar suas conclusões.

-Com $a=0$ e $a = 1$ a função não é exponencial, mas constante. (Além do que com $a=0$ e $x = 0$ temos uma indeterminação).

-Com $a < 0$, a função não está definida em \mathbb{R} . Poderemos explicar o exemplo:

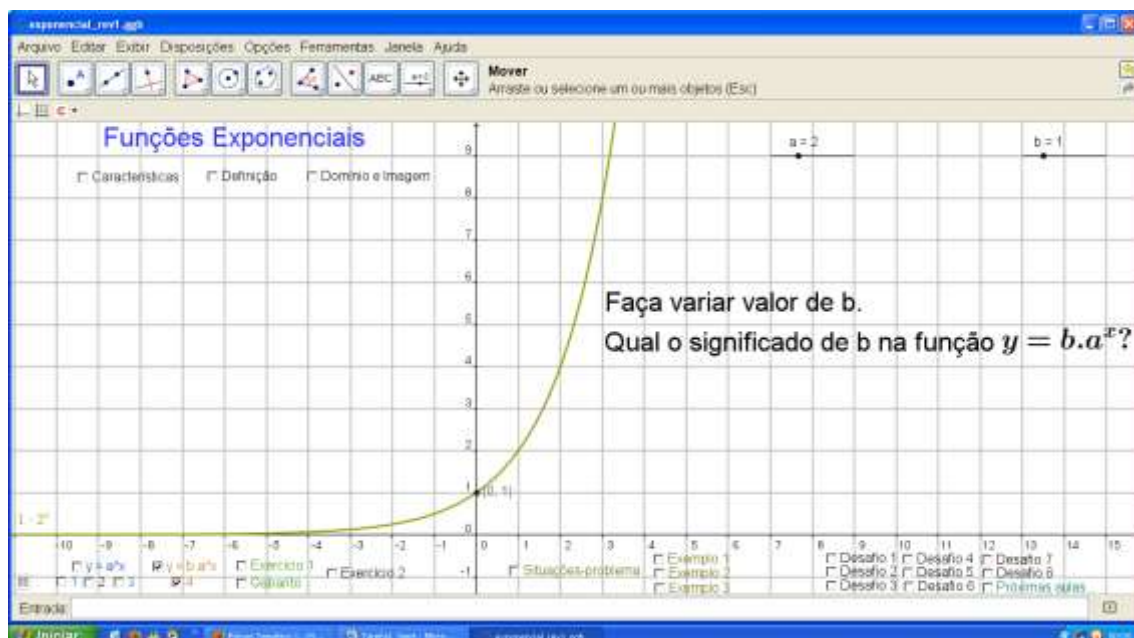
$(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$, e em \mathbb{R} não existe raiz par de um número negativo.

Quadro IV



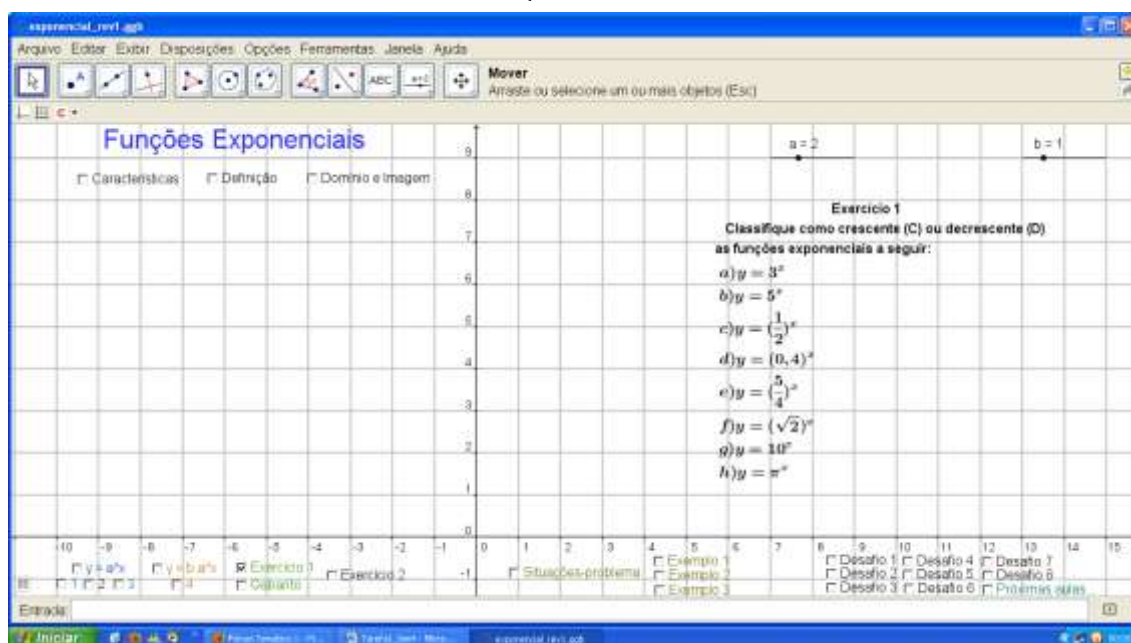
Nesta etapa, a partir da variação da base e a seguir animando a abscissa os alunos devem concluir quando uma função exponencial é crescente ou decrescente.

Quadro V



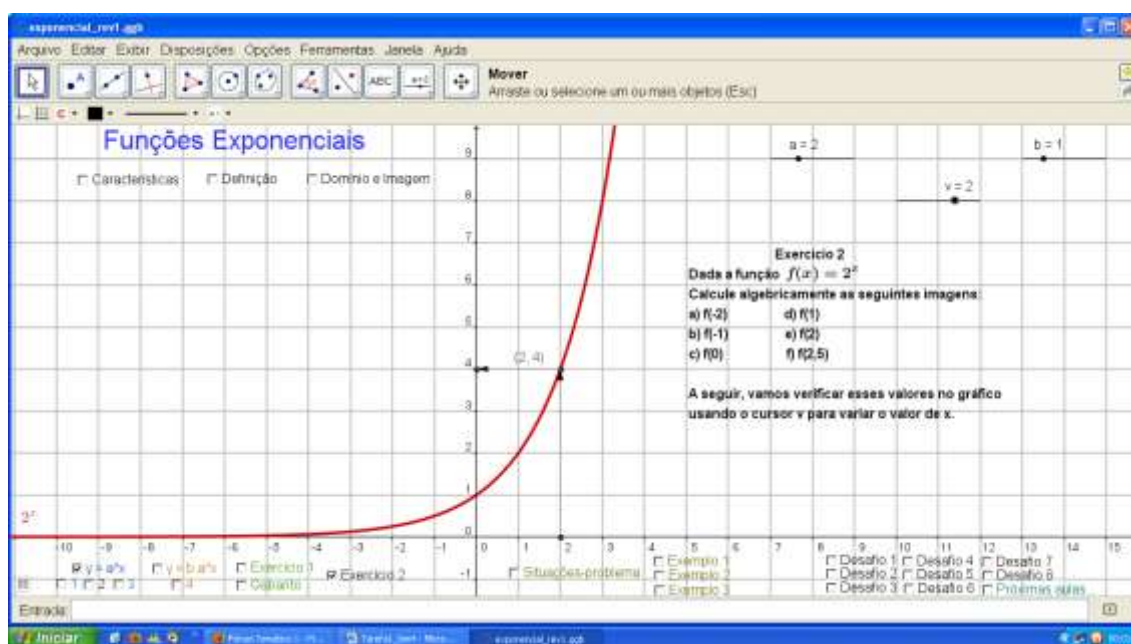
Fazendo variar a constante b , os alunos devem concluir que b representa o valor para $x = 0$. Mais tarde, na resolução de situações problemas verão que essa constante pode representar o valor inicial em um determinado experimento.

Quadro VI



Os alunos devem resolver o exercício, reconhecendo se a função é crescente ou decrescente bastando analisar o valor da base.

Quadro VII



Nesta etapa faremos uma comparação com a solução algébrica quando anteriormente construímos as tabelas e agora de forma algébrica.

Inseri a verificação de $f(2,5)$. Vamos desafiar os alunos a obter a imagem também de forma algébrica: $2,5 = 25/10 = 5/2 \Rightarrow f(2,5) = 2^{5/2} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} \approx 5,66$

(Uma calculadora científica nessas horas pode ajudar!)

Atividade 6
Situações-problema
Fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente

PRÉ-REQUISITOS: Equação exponencial; função exponencial.

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Notebook com Geogebra instalado; projetor multimídia; aula dinâmica “Exponencial-Parte2” desenvolvida no Geogebra.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Compreender a definição da função exponencial; domínio e imagem; crescimento e decrescimento. Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial. Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente. Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial. Resolver problemas significativos utilizando a função exponencial.

Esta atividade é dividida em duas partes:

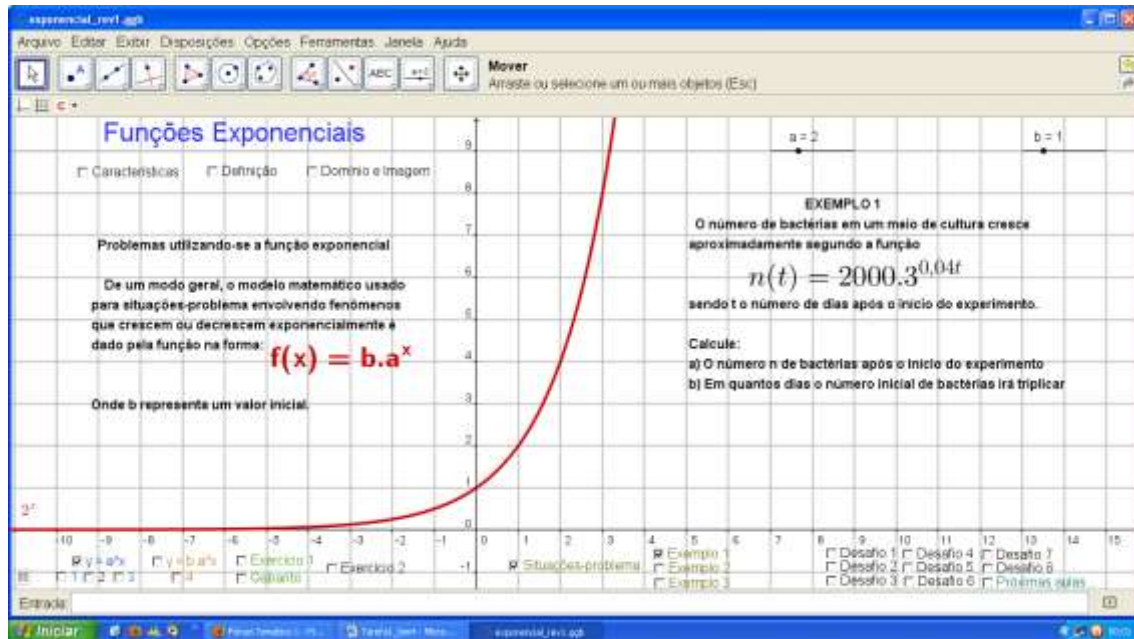
Na primeira parte (Quadros I, II e III), são apresentados 3 exercícios modelo que serão resolvidos pelo professor, preferencialmente dialogando com os alunos sobre as estratégias para resolver os exercícios e durante cada passo da resolução.

Na segunda parte (Quadros IV a XI) serão apresentados alguns exercícios selecionados de diversos concursos, sendo um deles do ENEM, onde ocorrem crescimento e decrescimento.

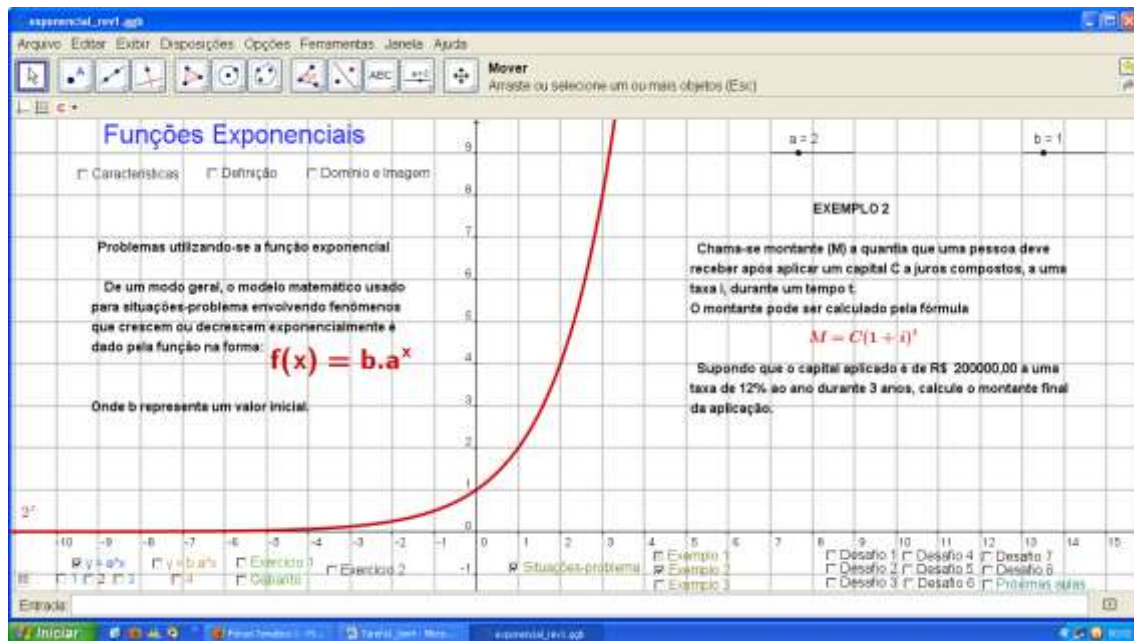
A essa altura, espera-se que os alunos consigam resolver boa parte deles.

Os que não forem possíveis de serem resolvidos, seja por dificuldade dos alunos, seja por esgotamento do tempo previsto, serão entregues aos alunos em uma folha impressa e resolvidos em uma aula seguinte.

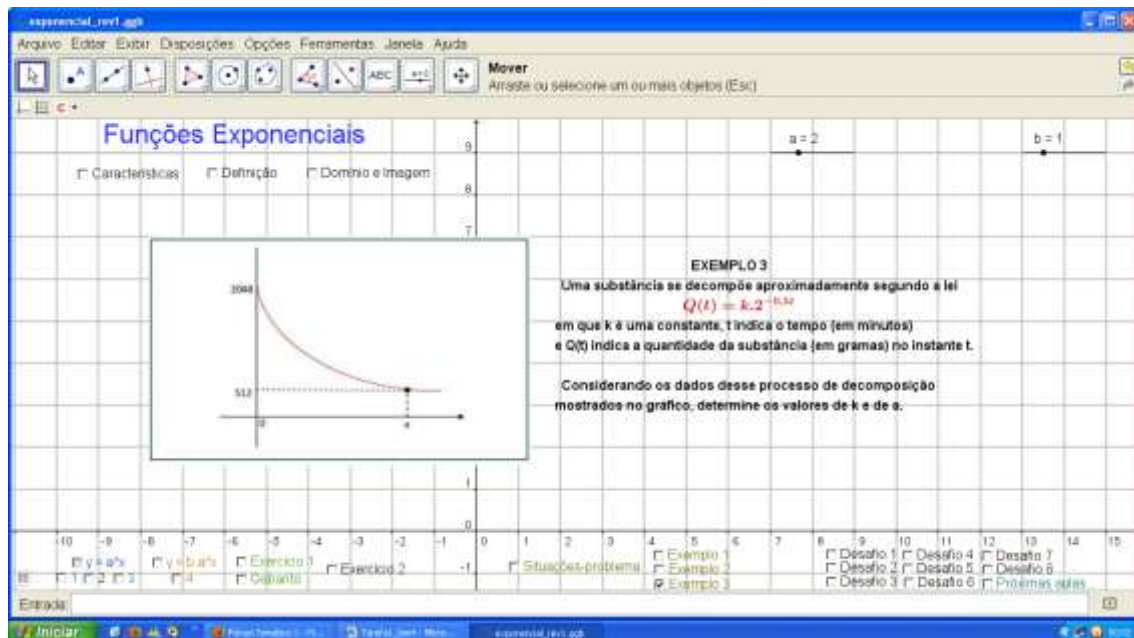
Quadro I



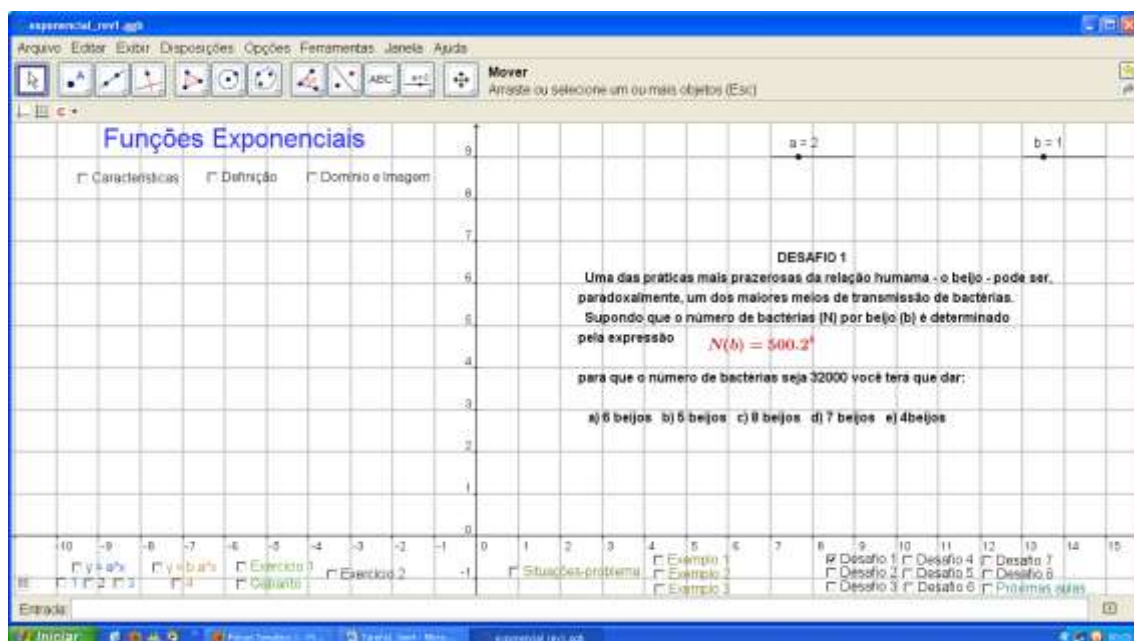
Quadro II



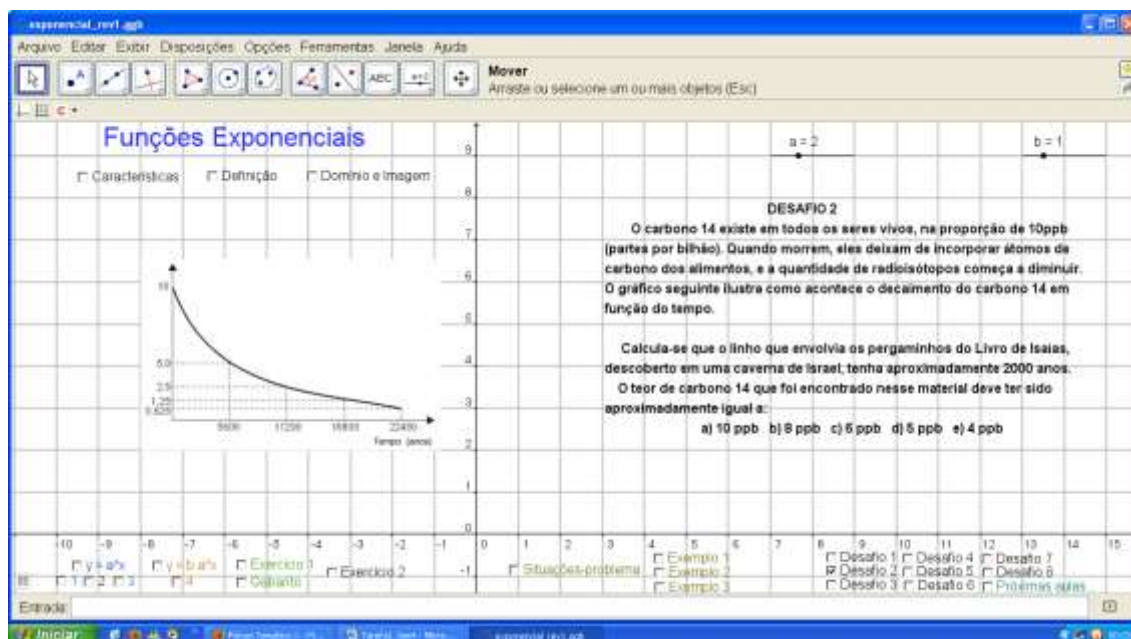
Quadro III



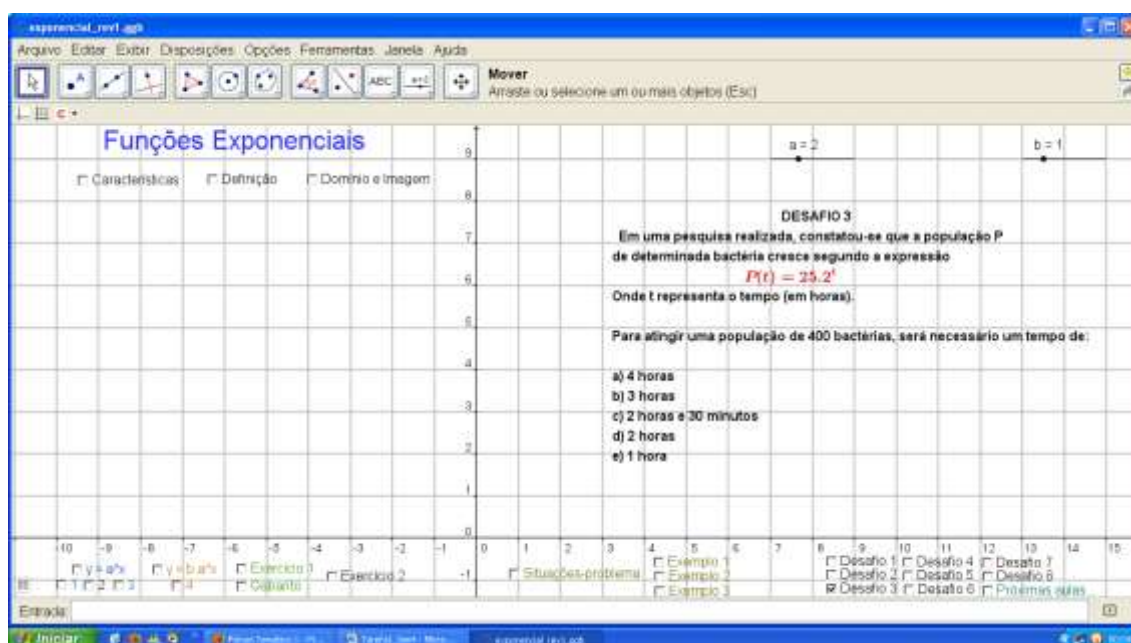
Quadro IV



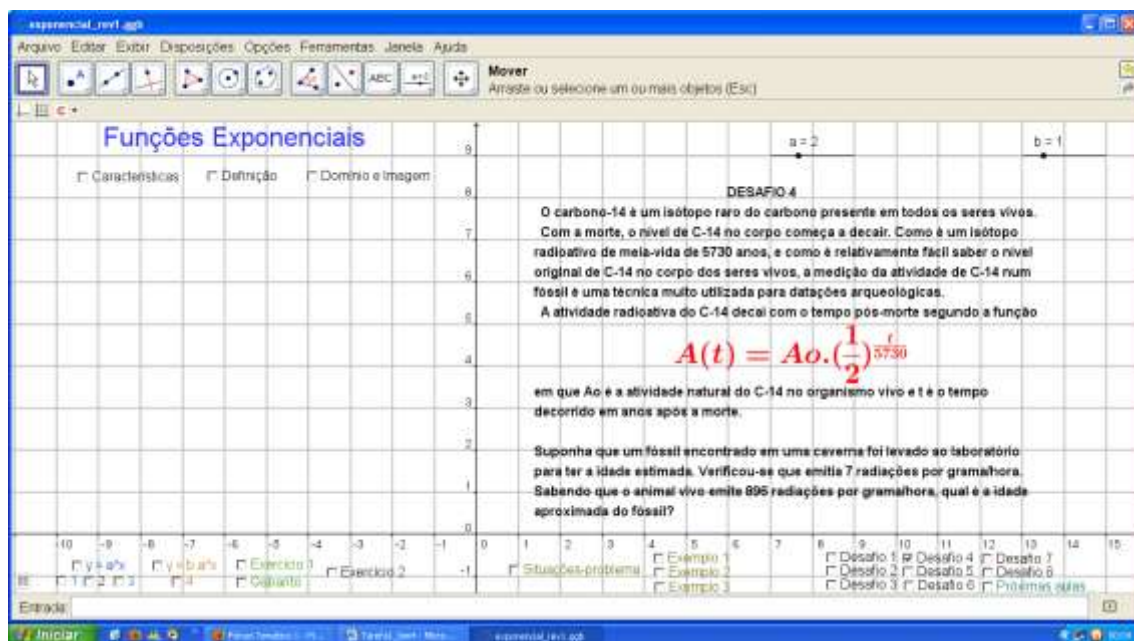
Quadro V



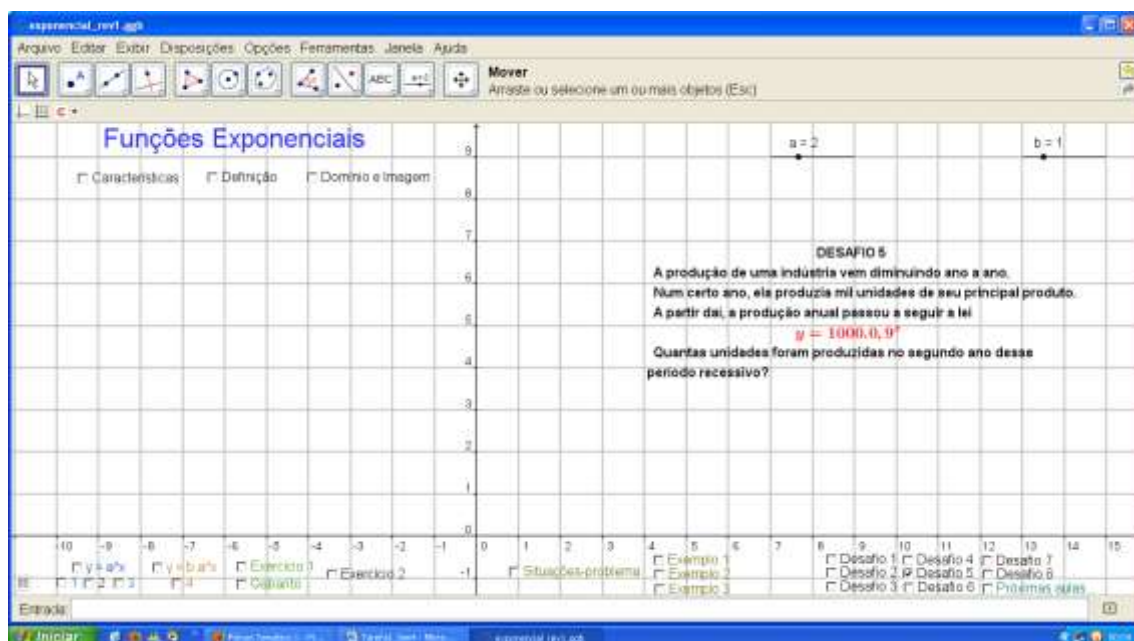
Quadro VI



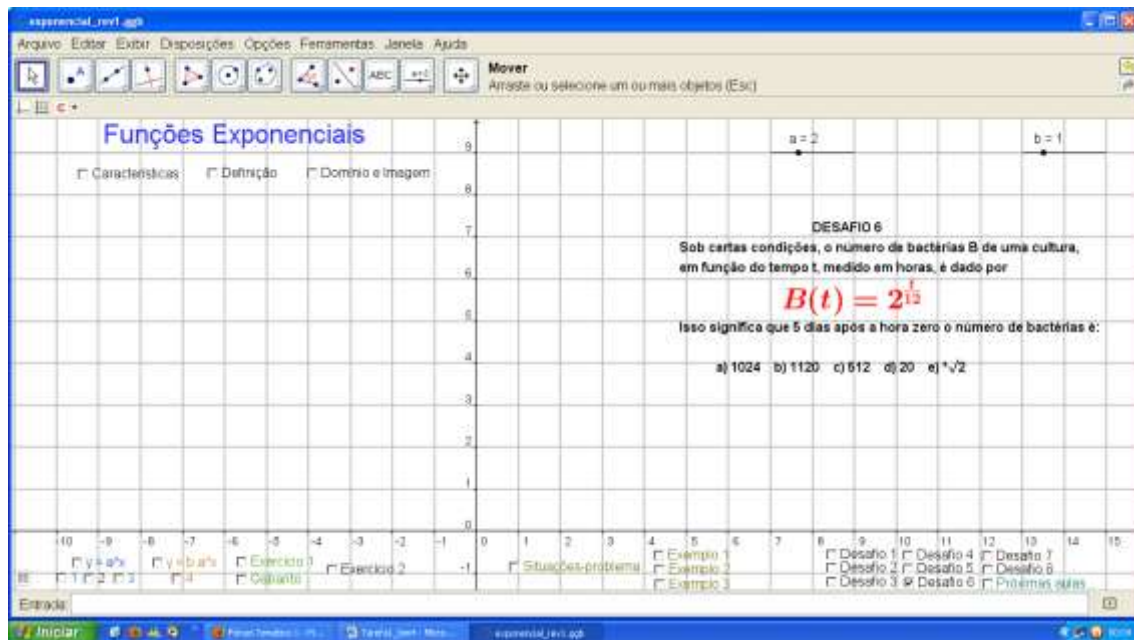
Quadro VII



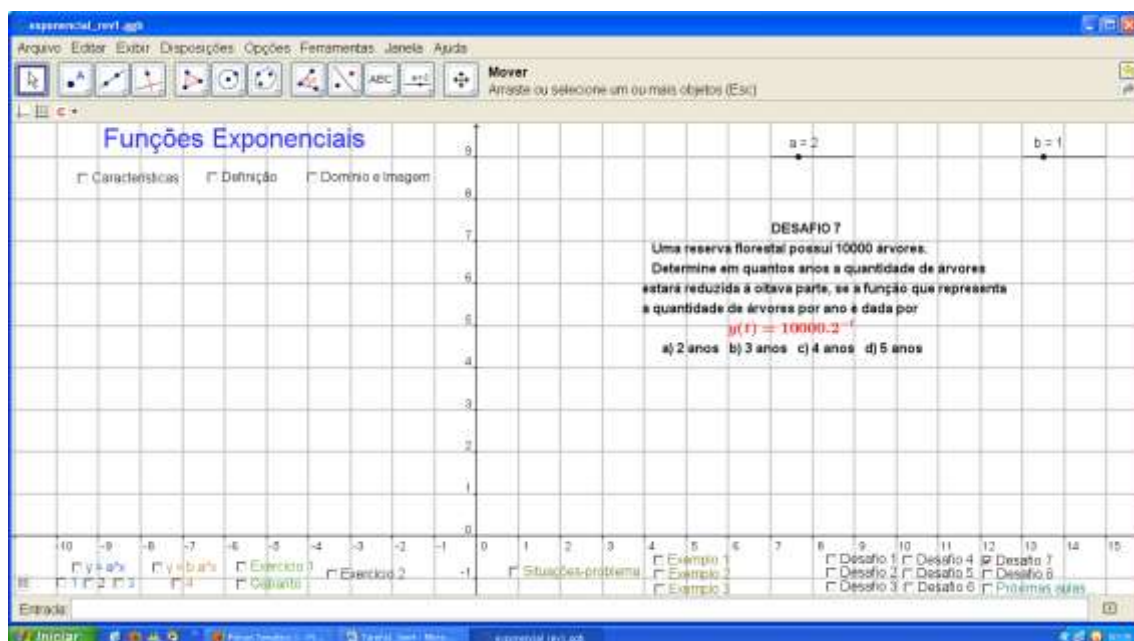
Quadro VIII



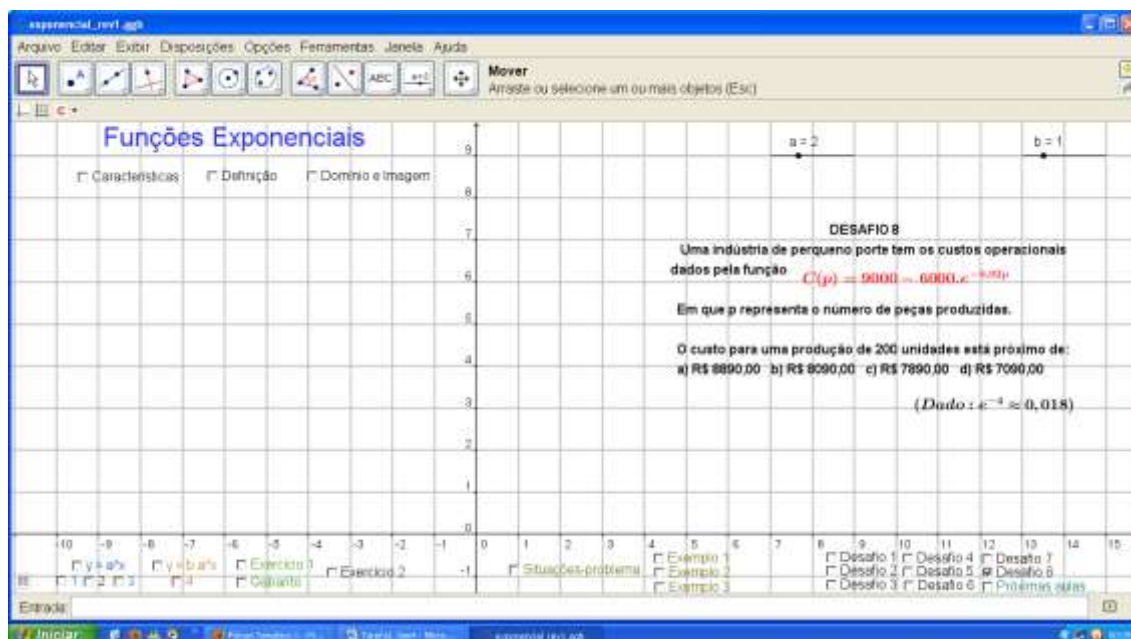
Quadro IX



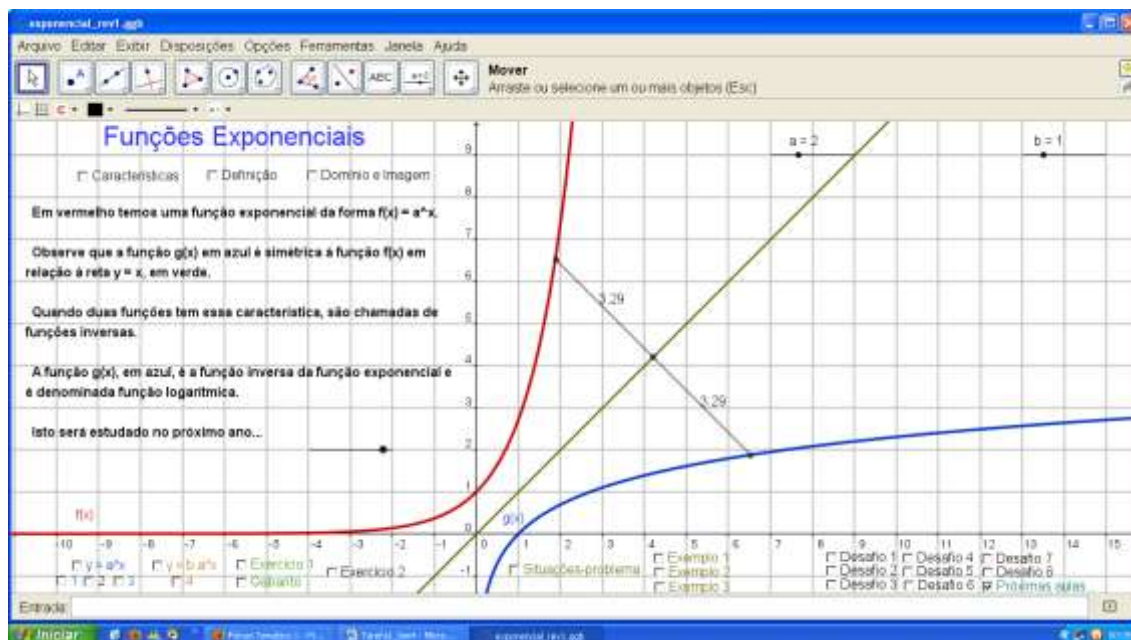
Quadro X



Quadro XI



Quadro XII



Nesta etapa encerramos apresentando a relação entre a função exponencial e a função logarítmica, um dos próximos conteúdos do currículo.

AVALIAÇÃO

Durante o desenvolvimento a avaliação será de forma continuada, observando a participação e a capacidade interpretação, compreensão e raciocínio de cada aluno.

Para uma melhor leitura dos resultados será solicitado no final dos trabalhos que o aluno entregue uma auto-avaliação onde ele deve relatar suas impressões positivas ou negativas, principais dificuldades, seu grau de compreensão do conteúdo estudado, entre outros.

Entendendo que, para desenvolvermos a capacidade de interpretação e síntese de uma situação problema, o hábito da redação é tão importante quanto o da leitura, a opção é que essa avaliação seja na forma de um relato por escrito; é possível encontrarmos mais informações nas entrelinhas de seus textos que aquelas que possamos idealizar nos modelos de auto-avaliações em que o aluno deve assinalar com x o seu grau de compreensão.

FONTES DE PESQUISA

Matemática: ciências e aplicações, 1: ensino médio/Gelson Iezzi...[et al.]...6 ed – São Paulo: Saraiva, 2010.

Matemática: contexto e aplicações/Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2010.

Endereços eletrônicos acessados de 31 de outubro de 2012 a 4 de novembro de 2012:

<http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/PLANO.DE.AULA-Xadrez-exponencial.pdf>
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm103/funcaoexponencial.htm>
<http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Reinos/biomonera3.php>
<http://www.brasilecola.com/matematica/aplicacoes-uma-funcao-exponencial.htm>
<http://www.enem.coc.com.br/simulado.asp>
<http://pt.scribd.com/doc/55754462/Lista-de-Exercicio-de-FUNCAO-EXPONENCIAL>
http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/downloads/3medio_SITE_MT.pdf
<http://pt.scribd.com/doc/6080160/FUNCAO-EXPONENCIAL-INTENSIVO>
http://www.supletivounicanto.com.br/docs/matematica/m_equacoes_exponencial.pdf
<http://www.matematica.br/programas/hanoi/index.html>
http://pt.wikipedia.org/wiki/Idade_da_Terra
<http://www.moraissilva.com/pdf%20curiosidades/31%20curiosidade%20torre%20Hanoi.pdf>
http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_recreativos.php
<http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lucas.html>
http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-7-torre_hanoi.pdf
http://www.nucleoeducafrovalongo.org/painel/arquivo_upload/FUN%C3%87%C3%83O%20EXPONENCIAL.pdf
<http://joaquimprofessor.files.wordpress.com/2011/05/04-func3a7c3a3o-exponencial1.pdf>
<http://www.fund198.ufba.br/expo/praiz.pdf>
<http://professorwaltertadeu.mat.br/exerciciosEM2011.htm>
<http://professordigital.wordpress.com/2011/01/20/as-tics-a-escola-e-o-futuro/>

Recursos de mídia utilizados:

Geogebra: <http://geogebra.softonic.com.br/>

Torres de Hanói: <http://www.matematica.br/programas/hanoi/index.html>