

**Formação Continuada em Matemática**  
**Matemática 1º Ano – 4º Bimestre/2012.**  
**Plano de Trabalho**

# **Função**

# **Exponencial**

Tarefa 1

Grupo: 8

Cursista: **Raquel dos Santos Ramos**

Tutor: **Anália Maria Ferreira Freitas**

# Introdução

O plano de trabalho a seguir tem como objetivo desenvolver o conceito de função exponencial considerando a sua importância como modelo matemático para representação de fenômenos estudados por outras áreas do conhecimento.

Evitaremos o formalismo habitual como geralmente esse conceito é apresentado usando situações-problema buscando mostrar a aplicabilidade deste conteúdo e a motivação dos alunos. Tentando amenizar as dificuldades dos alunos.

Faremos uma ligação com que o aluno já estudou em relação à potências e suas propriedades. Para este plano serão necessários 8 tempos de 50 minutos e 2 tempos para realização da avaliação do aprendizado.

# Desenvolvimento:

## Atividade 1

**Habilidade relacionada:** Identificar a função exponencial através de sua fórmula.

**Pré – Requisitos:** Conhecimento do conceito de potências e suas propriedades, função polinomial do 1º grau.

**Tempo de duração:** 100 minutos, 2 aulas de 50 minutos.

**Organização da turma:** Em dupla.

**Objetivos:** Apresentar a função exponencial trabalhando a diferença entre o crescimento exponencial e o crescimento proporcional.

**Metodologia Adotada:** Propor aos alunos a resolução da situação-problema com objetivo inicial de chegar ao crescimento exponencial.

### Analise a situação:

#### 1º Parte – Entendendo o pedido do sábio

Há uma lenda sobre o jogo de xadrez que conta que um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação. O sábio pede como prêmio grãos de trigo. O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a simplicidade do pedido.

1) O rei parece perplexo com o pedido. E você? Qual a sua opinião sobre o pedido do sábio? A quantidade de grãos pedida poderia ser paga pelo rei? Discuta com seus colegas sobre essa questão.

2) Vamos entender o pedido do sábio inventor do jogo de xadrez? Para isso, preencha a Tabela 1 até a 10ª casa do tabuleiro, seguindo as orientações do texto.

Casa do Tabuleiro	Grãos Recebidos
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabela 1

3) O que está acontecendo com a quantidade de grãos a cada casa do tabuleiro? E com as casas do tabuleiro de xadrez, elas seguem a mesma regra? Converse com seu colega.

4) Reescreva cada quantidade de grãos encontrada no item 2) como uma potência de base 2. O preenchimento da Tabela 2 irá ajudá-lo.

Grãos Recebidos	Potência de base 2
1	
2	
4	
8	

Tabela 2

5) É possível estabelecer alguma relação entre o número de grãos de trigo com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione o número de grãos (y) com as casas do tabuleiro (x).

## 2º Parte – A contra proposta do rei

Preocupado com o sábio, o rei resolveu fazer uma contra proposta. Ele ofereceu dois grãos pela primeira casa e ao invés de dobrar a quantidade de trigo a cada casa do tabuleiro, ele sugeriu que fossem somados dois grãos na passagem das casas. Ou seja, seriam colocados 2 grãos na primeira casa, 4 grãos na segunda, 6 grãos na terceira, 8 grãos na quarta, 10 grãos na quinta e assim sucessivamente até a 64ª casa.

6) E aí? Essa é uma boa proposta? Você acha que a quantidade de grãos recebidos será maior, menor ou igual? Por quê? Discuta com seu colega.

7) Para ajudar na comparação com a outra forma de se obter os grãos, preencha a Tabela 3 de acordo com a regra proposta pelo rei e diga em qual situação o sábio ganharia mais grãos.

Casa do tabuleiro	Grãos Recebidos
1	2
2	4
3	6
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabela 3

Observando a Tabela 3 preenchida, responda:

8) O que está acontecendo com a quantidade de grãos de trigo?

9) Podemos afirmar que ao dobrar a casa do tabuleiro, também dobramos a quantidade de grãos? E se fosse outro múltiplo (triplo, quádruplo), o que aconteceria?

10) Como podemos relacionar a quantidade de grãos com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione a quantidade de grãos ( $y$ ) com a casa do tabuleiro ( $x$ ).

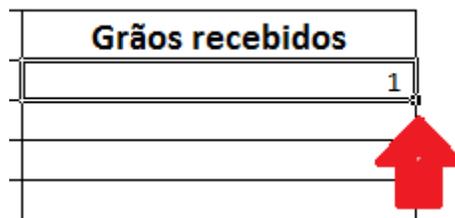
11) Que tipo de função caracteriza a nova regra?

### 3º Parte – Em que caso o sábio irá ganhar mais?

Você deve ter percebido que o cálculo da quantidade de grãos não é uma tarefa tão simples. Para auxiliá-lo na determinação desse valor, vamos utilizar uma planilha eletrônica.

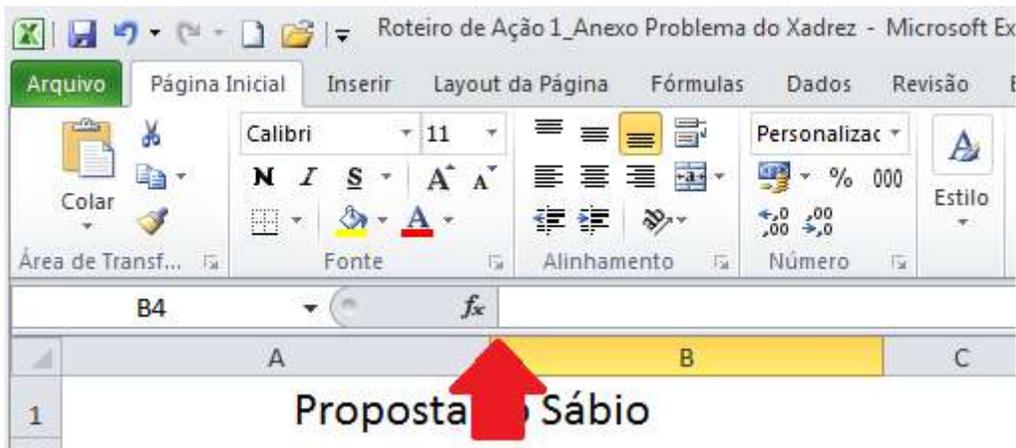
12) Na célula B4, digite, “=2^(A4-1)” e, em seguida tecele “Enter”. Repare que fazendo isso, estamos ordenando que a planilha coloque nessa célula, o valor referente a uma potência do tipo . Discuta com seus colegas e vejam se essa orientação é correta. Dica: lembre-se da fórmula que relaciona as casas do tabuleiro com a quantidade de grãos recebidos.

13) Agora veja como a planilha nos ajuda: não precisamos fazer isso para cada uma das células seguintes! Podemos “puxar a fórmula”. Para isso, você deve posicionar o mouse no canto inferior direito da célula: você verá um quadradinho como indicado na Figura 1.



Quando você aproximar o mouse desse quadradinho, o cursor mudará de formato, formando um sinal de mais fininho “+”. Nesse momento, você deve fixar o botão esquerdo do mouse e movê-lo em direção à célula abaixo. Nesse caso, a planilha entende que você quer que a célula abaixo – B5 nesse caso – tenha a mesma fórmula que a de cima. Vamos verificar?

Selecione a célula B5 e observe o que aparece no local indicado na Figura 2.



14) Puxe a fórmula até a célula B67.

E aí o que você acha dos últimos valores? Grandes, não?

15) Você achou esse valor grande? Mas ele ainda não representa a quantidade de grãos que o sábio pediu. Devemos agora obter a soma de todos esses valores. Fique tranquilo, a planilha também fará esse trabalho!

Na célula B68, digite “=SOMA(B4:B67)” e tecele “Enter”.

Pronto! Aí está a quantidade de grãos que o sábio pediu ao rei. Espertinho, não?

16) Podemos afirmar que a quantidade de grãos de trigo aumenta proporcionalmente ao número de casas? Por quê? Troque idéias com seus colegas.

17) Vamos preencher a parte referente à Proposta do Rei? Clique na célula E4, digite “=D4\*2” e pressione “Enter”.

18) Puxe a fórmula até a célula correspondente à última casa do tabuleiro, E67.

19) Obtenha a soma dos grãos obtidos através dessa proposta. Para isso, veja como fizemos a soma da proposta do sábio.

20) Verifique a soma obtida e diga quantos grãos que deveriam ser entregues ao sábio de acordo com a proposta do rei.

21) Podemos dizer que existe alguma proporção em relação aos grãos e as casas do tabuleiro? Por quê? Troque ideias com seus colegas.

22) Em qual proposta o sábio sai ganhando?

23) Em qual delas o crescimento foi mais rápido?

24) Você seria capaz de explicar por que na segunda regra, ao dobrar a casa do tabuleiro, a quantidade de grãos também dobra, mas o mesmo não acontece na primeira regra? Discuta com seus colegas e registre suas conclusões.

## Atividade 2

**Habilidade relacionada:** Identificar a função exponencial através de sua fórmula.

**Pré – Requisitos:** Conhecimento do conceito de potências e suas propriedades.

**Tempo de duração:** 100 minutos, 2 aulas de 50 minutos.

**Organização da turma:** Em dupla.

**Objetivos:** Apresentar a definição da função exponencial, fazendo a conexão com o uso de potências e suas propriedades.

**Metodologia Adotada:** Propor aos alunos a resolução da situação-problema com objetivo inicial de chegar à fórmula.

### Analise a situação:

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática. Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha da planta triplicava. Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses?

**Resolução:** Para resolver este problema podemos construir uma tabela que relacione crescimento da folha em função do tempo:

Tempo	Diâmetro
Observação inicial	1 cm
Após 1 mês	3 cm
Após 2 meses	9 cm
Após 3 meses	27 cm
Após 4 meses	81 cm

Verificamos então que o diâmetro da folha ao final de 4 meses será igual a 81 cm. Ao observarmos a tabela podemos dizer que a folha cresce de forma exponencial, pois seu diâmetro está variando na forma de potência de base 3.

$$3^0 = 1 \quad 3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81$$

De modo geral podemos dizer que o crescimento da folha pode ser dado pela fórmula:  $D = 3^x$ , onde D é o diâmetro e x é o tempo.

Assim o modelo matemático usado para resolver estas situações como essa é dado pela Função Exponencial.

## **Função Exponencial**

**Definição:** É toda função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+^*$  dada por  $f(x) = a^x$  ou  $y = a^x$  onde a é a base.

Exemplos :

$$f(x) = 3^x, \text{ onde } a = 3.$$

$$y = (\sqrt{7})^x, \text{ onde } a = \sqrt{7}$$

$$f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^x, \text{ onde } a = \frac{5}{7}$$

Quando trabalhamos com função exponencial devemos considerar as seguintes restrições  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , pois:

❖ Para  $a = 0$  e x negativo não existiria  $a^x$ .

Exemplos:  $0^{-1} = \frac{1}{0}$ , não existe divisão por zero.

❖ Para  $a < 0$  não existirá  $a^x$ .

Exemplos:  $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ , não existe raiz quadrada de número negativo.

❖ Para  $a = 1$  e  $x$  qualquer número real,  $a^x = 1$  (função constante).

**Exercício de fixação:** Utilizar os exercícios do livro didático adotado para fixação dos conteúdos.

## Atividade 3

**Habilidade relacionada:** Identificar, ler, interpretar e construir gráficos.

**Pré – Requisitos:** Conhecimento da definição de função exponencial.

**Tempo de duração:** 200 minutos, 4 aulas de 50 minutos.

**Organização da turma:** Individual.

**Objetivos:** Determinar os pontos para a construção do gráfico.

**Metodologia Adotada:** Definir e mostrar como fazer a construção.

## Gráfico da Função Exponencial:

Vamos analisar o comportamento da função exponencial traçando o seu gráfico no plano cartesiano.

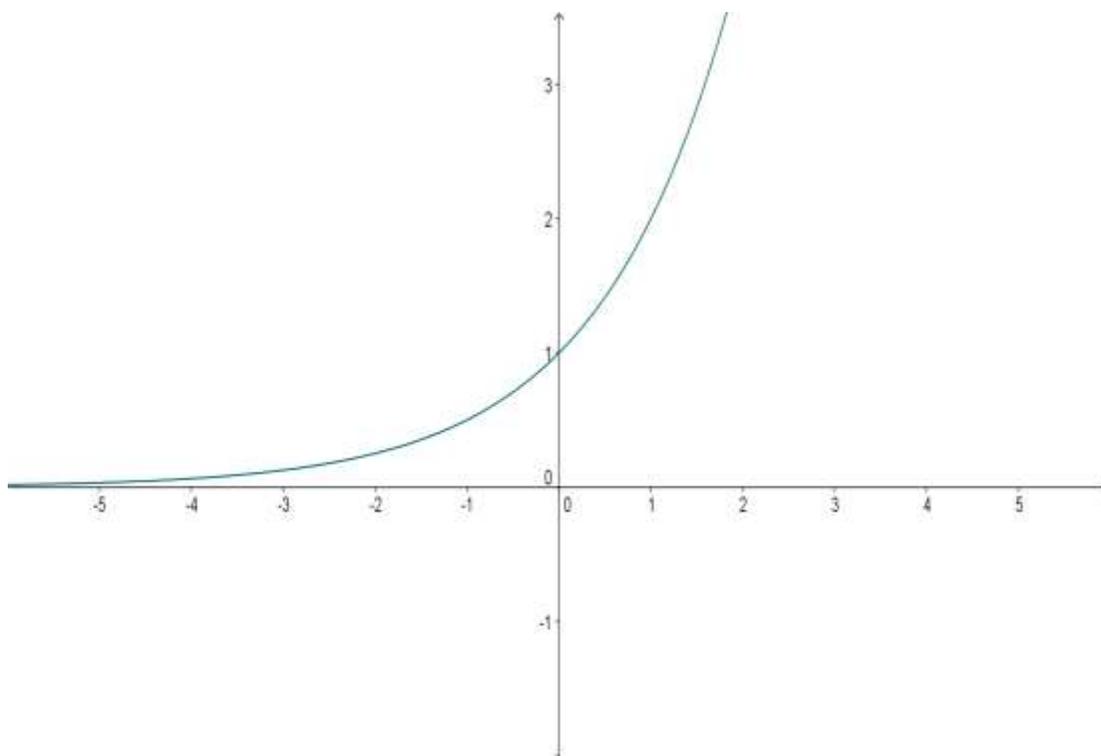
Para a construção deste gráfico atribuímos valores a variável independente  $x$  e obtemos os valores correspondentes para a variável  $y$ . Reforçar a idéia que  $f(x) = y$ .

Temos dois casos a considerar:

**1º Caso:  $a > 1$ .**

Exemplo: construir o gráfico de  $f(x) = 2^x$ .

<b>x</b>	<b><math>f(x) = 2^x</math></b>	<b>y</b>
-2	$f(-2) = 2^{-2}$	$\frac{1}{4} = 0,25$
-1	$f(-1) = 2^{-1}$	$\frac{1}{2} = 0,5$
0	$f(0) = 2^0$	1
1	$f(1) = 2^1$	2
2	$f(2) = 2^2$	4

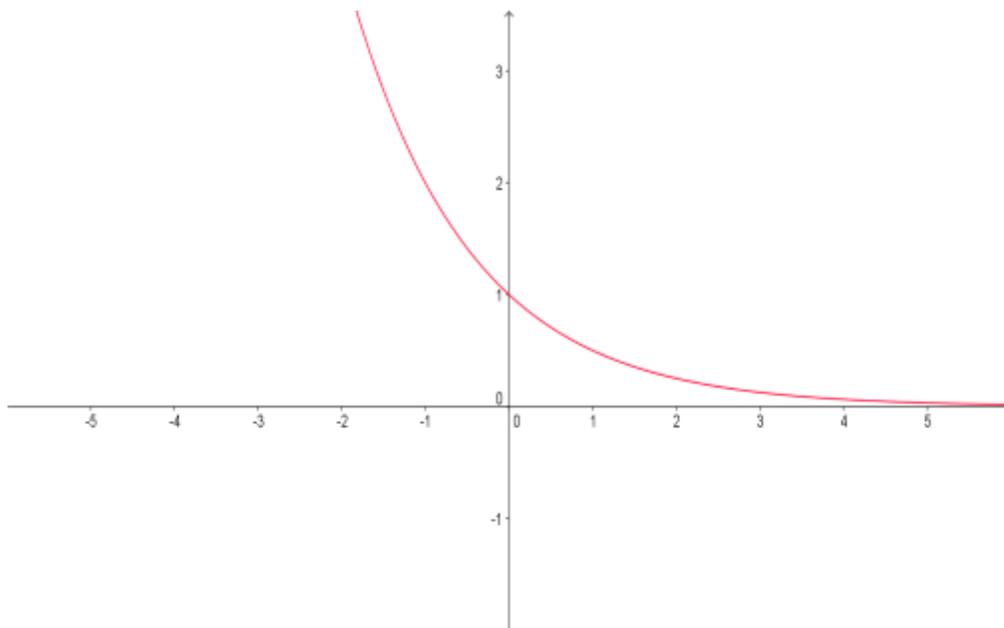


**Observe que quanto maior o expoente  $x$ , maior é a potência  $a^x$ , ou seja, se  $a > 1$  a função  $f(x) = a^x$  é crescente.**

**2º Caso:  $0 > a > 1$ .**

Exemplo: construir o gráfico de  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

<b>x</b>	<b><math>f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x</math></b>	<b>y</b>
-2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	4
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	2
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0$	1
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}=0,5$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}=0,25$



**Observe que quanto maior o expoente  $x$ , maior é a potência  $a^x$ , ou seja, se  $0 > a > 1$  a função  $f(x) = a^x$  é decrescente.**

**Exercício de fixação:** Utilizar os exercícios do livro didático adotado para fixação dos conteúdos e **construir gráficos utilizando o Geogebra.**

# **Avaliação:**

**Tempo de duração: 100 minutos, 2 aulas de 50 minutos.**

Usaremos termos distintos na avaliação durante o processo de ensino e aprendizagem modo a evidenciar diferentes propósitos da avaliação.

Faremos primeiro uma avaliação diagnóstica para analisar o domínio conceitual e procedimental dos alunos em relação à função exponencial. Esta avaliação será individual. Permitindo situar os alunos sobre nível de aprendizagem, permitindo introduzir as correções necessárias e redirecionar suas estratégias de ensino.

Faremos também uma avaliação de caráter mediador, permitindo aos alunos expressar suas idéias. Esta avaliação será em grupo, valorizando efetivamente a produção dos alunos.

## **Bibliografia:**

Matemática, volume único / Luis Roberto Dante – 1ª Edição – São Paulo – Ática, 2005.

Matemática, ensino médio, volume único / Antônio Nicolau Youssef, Elizabeht Soares, Vicente Paz Fernandes – São Paulo – Scipione, 2005.

Roteiro de ação 1 – Que crescimento é esse? – Curso de Formação continuada. 3º Bimestre.

Roteiro de ação – Função polinomial do 2º Grau – Curso de Formação continuada. 3º Bimestre.

Uma Atividade Humana, ensino médio, Vol.1, 1º Ano / Adilson Longen – 1ª Edição – Curitiba – Base Editora, 2003.