Nome: Rodolfo da Costa Neves
Série: 1º ano do ensino médio / 4º Bimestre
Grupo: 11
Tutor: Carlos Eduardo Lima de Barros

Plano de Trabalho1

INTRODUÇÃO

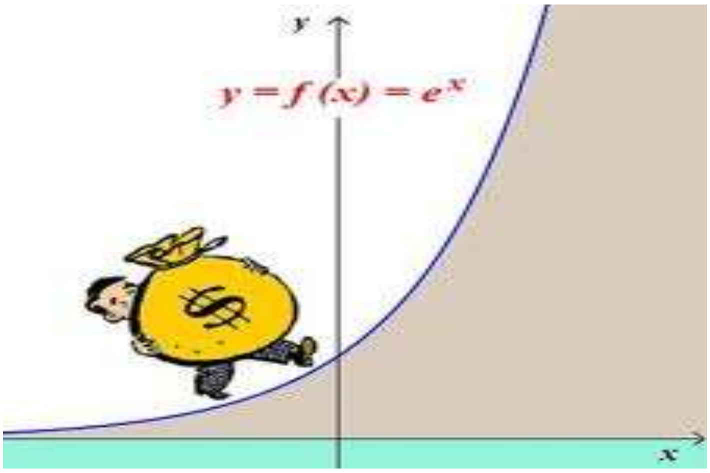
Abordagem ao tema

Este Plano de Trabalho tem como objetivo oferecer aos alunos da 1ª série do Ensino Médio uma demonstração prática da função exponencial, assim como sua utilização na resolução de diversas situações-problemas.

São inúmeros exemplos no dia a dia em que encontramos a utilização da função exponencial. Seja contando população de bactérias em laboratórios, medido a ação destrutiva de um tremor de terra ou mesmo em questões sociais como crescimento populacional e demanda efetiva por alimento.

A história da matemática, como motivadora no desenvolvimento dos conteúdos em sala de aula, tem sido uma grande auxiliadora.

É de grande importância a revisão de pré-requisitos. No caso da função exponencial é importante que o conceito de potencia assim como suas propriedades esteja bem dominado pelos alunos.



Pré-requisitos

Alguns pré-requisitos são fundamentais para o desenvolvimento do conteúdo, como noção de potências e suas propriedades.

Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)

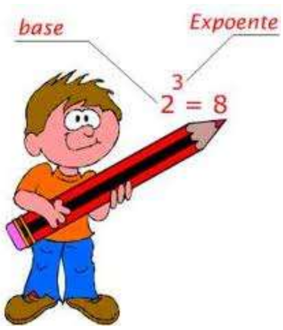
Material: Quadro negro,.

Assunto: Potências e suas Propriedades

Objetivo: Facilitar a aprendizagem do conteúdo a ser abordado: Funções exponenciais.

Potência de expoente natural

Sendo *a* um número real e *n* um número natural, com $n \geq 2$, definimos:



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} .$$

Para n =1 e n = 0 são definidos:

$$a^1 = a .$$

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0).$$

Potência de expoente inteiro

Se a é um número real não nulo (a ≠ 0) e n é um número inteiro e positivo, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} .$$

Potência de expoente racional

Se a é um numero real positivo e $\frac{m}{n}$ um número racional, com n inteiro positivo, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \; .$$

Propriedades

Para as potências de expoente REAL são válidas as seguintes propriedades operatórias:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$.
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$.

Observação! Muito Importante!

É comum a seguinte confusão:

$-2^2 = -4$ → Neste caso apenas o número 2 está elevado ao quadrado, logo repetimos o sinal negativo.

$(-2)^2 = 4$ →Neste caso o sinal e o número 2 estão ambos elevados ao quadrado e potência de expoente par, devido à regra de sinais, tem resultado positivo.

$(-2)^3 = -8$ → Neste caso onde o expoente é impar, devido a regra de sinal, repetimos o sinal da base no resultado.

Após a revisão do conteúdo de potências serão abordados alguns exemplos.

Exemplo 1: Dê o resultado mais simples para $(2^5 : 2^3).2^2$.

Solução:

$(2^5 : 2^3).2^2 = (2^{5-2}).2^2 = 2^3.2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$

Exemplo 2: Calcule o valor da expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6^0$.

Solução:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - 1 = \frac{36+1-8}{8} = \frac{29}{8}$$

Exemplo 3: Simplifique $\frac{2^{x+5} - 2^{x-2}}{2^x}$.

Solução:

$$\frac{2^{x+5} - 2^{x-2}}{2^x} = \frac{2^x.2^5 - 2^x.2^2}{2^x} = \frac{2^x(2^5 - 2^2)}{2^x} = 32 - 4 = 28$$

DESENVOLVIMENTO

1° Etapa

Duração: (Duração: uma aula/tempos de 50 minutos)

Material: Material impresso, computador e data show.

Assunto: Abordagem histórica e a utilização da função exponencial.

Pré-requisitos: Círculo trigonométrico, circunferência e seus elementos.

Metodologia: Utilização do material impresso junto ao computador explorando as primeiras ideias da função exponencial.

Objetivo: Fazer com que os alunos despertem interesse pelo conteúdo através de uma visão histórica e de sua utilização na vida diária.

Começaremos essa etapa falando sobre o desenvolvimento da função exponencial através de uma lenda e depois mostrando a sua utilidade nas diversas áreas da ciência.

Conta à lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 263, o que corresponde a aproximadamente 9 223 300 000 000 000 = 9,2233.1018. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido! A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais, especialmente da função y = 2 x.

As funções exponenciais são aquelas que "crescem ou decrescem" muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

Os impactos ambientais aumentaram muito a partir do séc. XVIII, como consequência da revolução industrial e do avanço das tecnologias de exploração e transformação da natureza. Além disso, houve um crescimento exponencial da população do planeta, composto de pobres em sua maioria. Teoria do economista Malthus. Para Malthus o crescimento populacional desordenado levaria o mundo à miséria, já que a velocidade com que a população crescia era bem maior que a quantidade de alimento e terras férteis. Hoje, com o avanço da tecnologia, sabemos que há alimento para todos no mundo e que o problema atual da fome e a falta de recursos (dinheiro) para obter alimento.

2° Etapa

Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Livro didático, material impresso, quadro negro e computador.

Assunto: Equações exponenciais.

Pré-requisitos: Potência e fatoração.

Metodologia: Definir a equação exponencial, praticando com exercícios e problemas.

Objetivo: Ao final da aula, a expectativa é que os alunos sejam capazes de resolver questões e problemas envolvendo as equações exponenciais.

Definição

Chama-se equação exponencial toda equação que possui a incógnita no expoente.

Exemplos:

- $2^x = 16.$
- $3^{x+1} + 3^{x-2} = 9.$
- $3^{x-1} = 27.$
- $10 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{2x} - 1 = 0.$

Resolução de equações exponenciais

1. **Igualando as bases da igualdade.**

Considere a > 0 e a ≠ 0.

$$a^x = a^p \text{ é } x = p$$

Exemplo: Resolver a equação $2^x = 32.$

Solução

$2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$x = 5$

2. Resolução de equações exponenciais com transformações

Exemplo 1: Resolva a equação $4^x - 5.2^x + 4 = 0$.

Solução

$4^x - 5.2^x + 4 = 0$

$(2^x)^2 - 5.2^x + 4 = 0$

$$2^x = y$$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$$x_1 = 4 \; ou \; x_2 = 1$$

Logo,

Primeiro: $2^x = 4 = 2^2, x = 2$.

Segundo: $2^x = 1, x = 0$.

3. Resolução de problemas

Exemplo: A expressão $C(t) = A.2^t$ nos dá o montante de um capital inicial **A**, a certa taxa anual, após um período **t** de anos de aplicação. Nessas condições, após quanto tempo um capital de **R$ 1500,00** produzirá o montante de **R$ 3000,00**?

Solução

$C(t) = A.2^t$

$3000 = 1500.2^t$

$2^t = \dfrac{3000}{1500}$

$2^t = 2, logo\; t = 1\; ano.$

Após essa etapa é proposto à turma a solução de exercícios diversos envolvendo potências e equações exponenciais.

3° Etapa

Duração: (Duração: 3 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Livro didático, quadro negro, computador, data show e Geogebra.

Assunto: Função exponencial.

Pré-requisitos: Potencia e equação exponencial.

Metodologia: Utilizar da definição para construção do gráfico da função exponencial. Utilização do Geogebra para mostrar esta construção assim como suas assíntotas.

Objetivo: Ao final da aula, a expectativa é que os alunos sejam capazes:

1. **De interpretaram o gráfico da função exponencial assim como sua construção.**
2. **Observar o domínio, o conjunto imagem e suas assíntotas.**

Definição

A função $f : R \to R$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada *função exponencial* de base a.

Exemplos:

- $f(x) = 3^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- $h(x) = (0{,}3)^x$

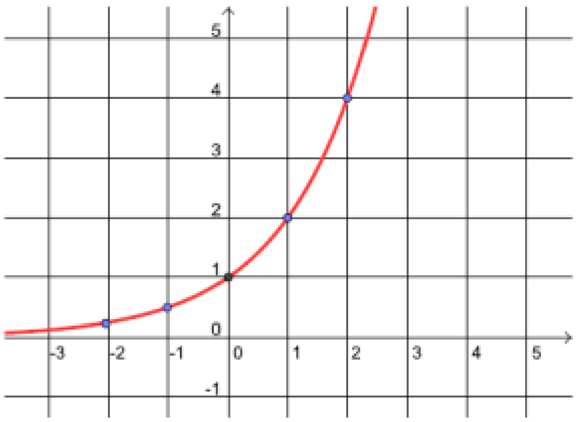
Gráfico da função exponencial

Dada a função $f: R \to R$, definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), temos dois casos para traçar seu gráfico:

1º Caso: a>1.

Exemplo: Traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. (Com a ajuda do Geogebra)

x	$f(x) = 2^x$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$



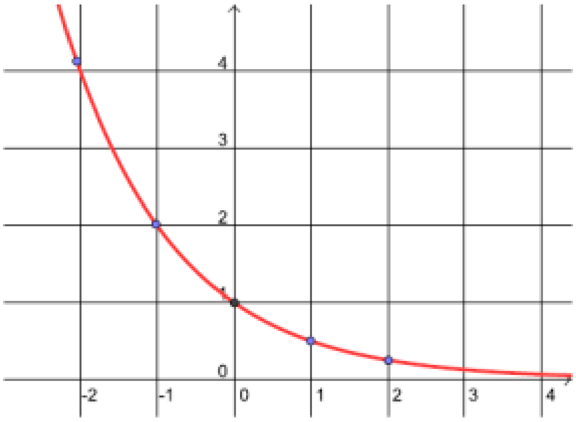
Obs.: Quanto maior o expoente x, maior é a potência a^x, ou seja, se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente.

O gráfico se aproxima ao máximo do eixo x, mas não chega a toca-lo. Logo a reta y = 0 é uma assíntota da função.

2º Caso: 0<a<1.

Exemplo: Traçar o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. (Com a ajuda do Geogebra)

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$(1/2)^{-2} = 4$
-1	$(1/2)^{-1} = 2$
0	$(1/2)^{0} = 1$
1	$(1/2)^{1} = 1/2$
2	$(1/2)^{2} = 1/4$

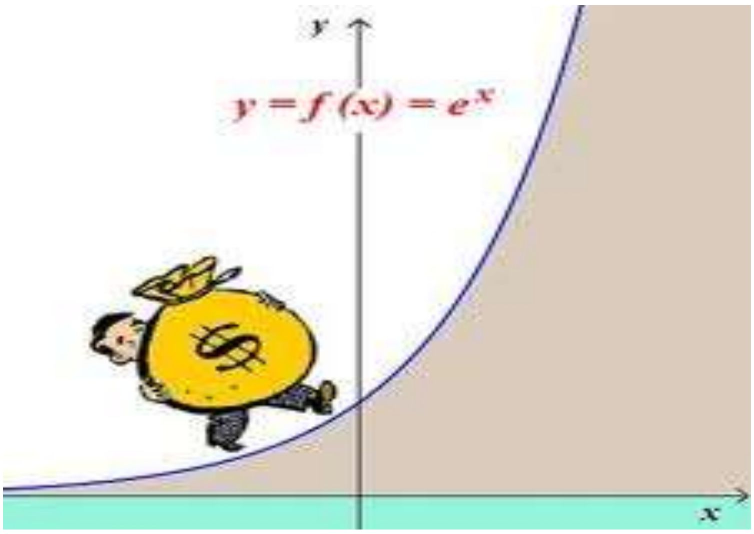


Obs.: Quanto maior o expoente x, menor é a potência a^x, ou seja, se $0< a <1$ a função $f(x)= a^x$ é decrescente.

Com base no gráfico, podem-se tirar algumas considerações:

Seja $f: R \to R$, definida por $f(x)= a^x$ (com $a >0$ e $a \neq 1$).

- Domínio da função f são todos os números reais $\Rightarrow D= R$.
- Imagem da função f são os números reais positivos $\Rightarrow$ **Im** $= R_+^*$.
- A curva da função passa pelo ponto (0,1).
- A função é crescente para a base $a >1$.
- A função é decrescente para a base $0 < a < 1$.



4° Etapa

Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Quadro negro, computador, data show e Geogebra.

Assunto: Função seno, cosseno e tangente.

Pré-requisitos: Círculo trigonométrico, circunferência e seus elementos.

Metodologia: Estender a definição de seno, cosseno e tangente do triângulo retângulo para o ciclo. Definir seno, cosseno e tangente como funções de um número real, Localizar um ponto no ciclo com o uso de coordenadas cartesianas.

1. **Retomar as razões trigonométricas;**
2. **Definir seno, cosseno e tangente no ciclo;**
3. **Definir as funções seno, cosseno e tangente de variável real;**
4. **Construir o gráfico das funções com auxílio de tabelas e identificar domínio, imagem e período.**
5. **Utilizar o Geogebra para correção dos gráficos das funções acima.**

Objetivo: Ao final da aula, a expectativa é que os alunos sejam capazes:

3. **Associar um número real ao arco correspondente, no ciclo trigonométrico e determinar seu seno, cosseno e tangente.**
4. **Reconhecer e aplicar as relações trigonométricas.**

Definição

São inequações exponenciais aquelas que aparecem incógnitas no expoente.

Resolução de Inequações exponenciais

Para resolver inequações exponenciais, devemos observar dois passos importantes:

- Redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;
- Verificar a base da exponencial, $a > 1$ ou $0<a<1$, aplicando as propriedades abaixo.

Caso (i): $a>1$	Caso (ii): $0<a<1$
$a^m > a^n \Rightarrow m > n$ As desigualdades têm mesmo sentido	$a^m > a^n \Rightarrow m < n$ As desigualdades têm sentidos diferentes

Exemplo 1: Resolva a Inequação $2^x > 32$.

Solução

$2^x > 32$

$2^x > 2^5$

$x > 5$

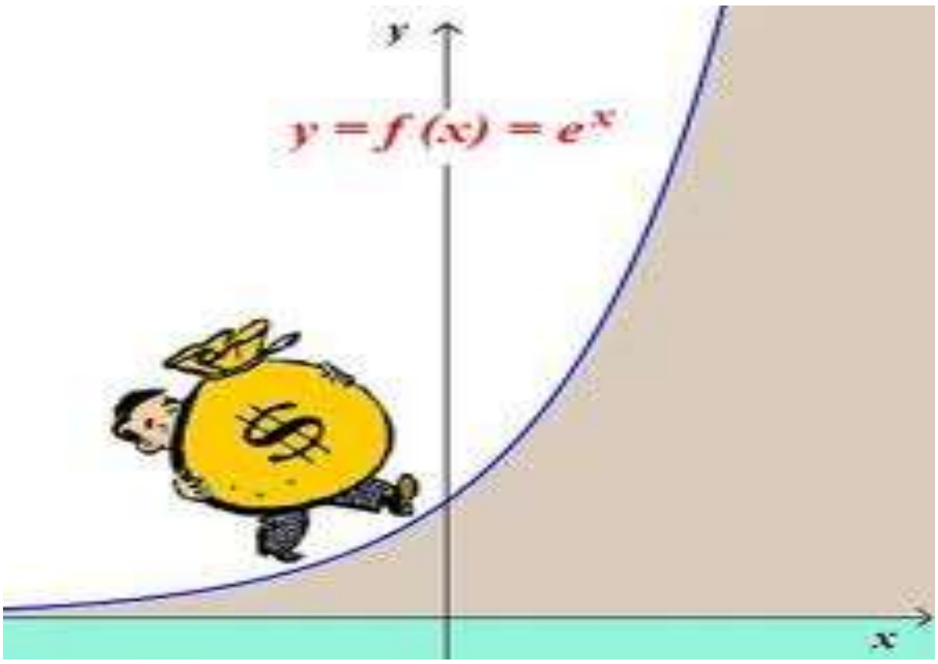
Exemplo 2: Resolva a Inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$.

Solução

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$x < 3$



Avaliação

Duração: **(Duração: duas aulas/tempos de 50 minutos)**

Material: Atividade avaliativa impressa. Utilizar de atividades relacionadas a problemas práticos

Metodologia: Será entregue aos alunos a atividade proposta abaixo. Os mesmo farão em trio com consulta, obedecendo ao tempo de duração.

1. **Apresentar uma situação prática.**
2. **Desenvolver o conteúdo para a solução da atividade prática.**
3. **Solucionar a atividade prática.**

Objetivo: Investigar a capacidade da utilização dos conhecimentos adquiridos para resolver problemas do cotidiano envolvendo as equações, inequações e funções exponenciais. E observar as competências e habilidades adquiridas por eles em sala de aula..

Proposta

Questão 1 : Resolva as equações exponenciais abaixo

a) $2^x = 128$
b) $25^x - 2.5^x - 15 = 0$
c) $2^{x+1} + 2^{x-1} - 10 = 0$
d) $\sqrt[5]{3^{2x-6}} = 9$

H 58: Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Questão 2: Uma determinada máquina Industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $V(t) = V_0 . 2^{-0,2t}$, em que V_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12000,00, determine o valor que ela foi comprada.

H 58: Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Questão 3: Construa o gráfico das funções exponenciais abaixo:

a) $f(x) = 5^x$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

H63: Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

C2 - Identificar a representação gráfica de uma função exponencial, dada à representação algébrica dessa função.

<u>Questão 4</u>: Resolva as inequações exponenciais abaixo:

a) $2^{4x-8} < 16$

b) $3^{5x-10} > 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-8} \geq 32$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-6} \leq 81$

H 58: Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Volume Único. São Paulo: Ática, 2000.

IEZZI, GELSON. Matemática – Volume Único. São Paulo: Atual, 1997.

PAIVA, MANOEL. Matemática – Volume Único. São Paulo: Moderna, 2008.