

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA  
FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ  
SEEDUC/RJ

MATEMÁTICA 1º ANO/ 4º BIMESTRE 2012

PLANO DE TRABALHO

ASSUNTO: FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA  
TÍTULO: FUNÇÕES E SUAS FÓRMULAS

TAREFA 2

Cursista: CLÁUDIA GOMES DE SOUZA      GRUPO: 11

Tutor(a): CARLOS EDUARDO LIMA DE BARROS

Santo Antônio de Pádua - RJ

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	3
DESENVOLVIMENTO.....	5
AVALIAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO.....	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	45

## INTRODUÇÃO

*Creio que o principal objetivo da educação deve encorajar os jovens a duvidarem de tudo aquilo que se considera estabelecido.*

*O importante é a independência do espírito*

Bertrand Russel

Neste plano, a função trigonométrica será abordada a partir do Elo Matemática e História, dentro deste contexto histórico serão revisados o ciclo trigonométrico, o seno, cosseno e tangente de um arco, lei dos cossenos e lei dos senos. Para potencializar esses conceitos, serão propostas a atividade Matemática e as Práticas Sócias que informa, conscientiza e propõem situações problemas onde o aluno é levado a investigar, elaborar estratégias para responder as questões. O leia mais sobre o assunto disponibiliza sites que apresentam o conteúdo mais detalhado e alguns tem atividades para interagir são interessantes e com linguagem acessível. A proposta deste plano é integrar todos os conceitos e apresentá-los a partir do círculo trigonométrico construídos pelos alunos no 3º Bimestre.

Com o uso de recursos tecnológicos: computador e multimídias, as calculadoras comum e científica, os programas Geogebra e Winplot, os alunos serão estimulados a conhecer as tecnologias desenvolvidas para dinamizar o ensino da Matemática. Elas auxiliam a aprendizagem e ajudam na visualização de propriedades da Matemática essenciais para a construção do saber e do pensar matemático.

Os materiais concretos utilizados na confecção de gráficos permitem através de uma construção articular diferentes conceitos de modo prazeroso e criativo, o aluno é o agente capaz de transpor informações do contexto para a construção e vice –versa.

As situações-problema que introduzem os conceitos abordados serão retiradas do livro texto adotado, assim como as demais atividades de compreensão e aplicação dos conceitos dados. Serão usados textos complementares que acrescentarão a discussão sobre a situação apresentada nas situações-problema. Os alunos precisam ser incentivados e motivados durante as atividades propostas, alguns somente as realizam se eu interferir, e outros mesmo com atendimento individual e até com a monitoria de outros colegas as realizam parcialmente.

Este terá a duração de 18 aulas num total de 900 minutos distribuídas em módulos de 50 minutos. Serão reservadas 2 aulas para avaliação individual.

## DESENVOLVIMENTO

### A Função Trigonométrica


- Habilidades: - Reconhecer no texto, a importância da Matemática no avanço das Grandes Navegações; interpretar e associar a trigonometria aos cálculos utilizados pelos matemáticos da época; H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ). H13 – Resolver problemas envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.
- Pré-Requisitos: razões trigonométricas.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: folha de atividade, livro didático, notebook e data-show
- Cuidados especiais: agendar o uso do data-show para ser levado à sala de aula.
- Organização da turma: em dupla.
- Objetivos: Reconhecer no texto que estudo da trigonometria possibilitou ao homem grandes descobertas e colaborou com as mudanças econômicas e sociais da sociedade, aplicar e resolver questões usando o cálculo das relações trigonométricas, interpretar os resultados obtidos para responder as questões levantadas.
- Avaliando: Participação nas atividades, as contribuições dadas, o reconhecimento da importância da Trigonometria e conseqüentemente da Matemática para a História da Humanidade, a realização do cálculo de relações trigonométricas, a interpretação correta dos questionamentos envolvidos no texto apresentado, a resolução dos exercícios propostos para verificação dos conceitos abordados.
- Metodologia adotada: Previsto nos PCN's introduzir um conceito matemático com a história da matemática é uma oportunidade de promover uma atividade diferenciada que integra Matemática a outras disciplinas.. Assim, deve-se levar em conta que a atividade: "tende a oportunizar a leitura, a reflexão, a análise, o conhecimento interdisciplinar e permite tratar os conteúdos e conhecimentos matemáticos de forma contextualizada historicamente favorecendo o crescimento intelectual e cultural dos envolvidos"( Wlasta N. H. De Gasperi e Edilson Roberto Pacheco). Depois, foi proposta uma pesquisa sobre cartografia e uma visita ao site 4ós4x4 maps para entender sua aplicabilidade na época e na atualidade, assim os alunos poderão trocar ideias com os demais colegas de forma descontraída e proporcionando conhecimento. O professor estimulará os alunos a recordarem o outro texto sobre as grandes navegações onde foi explorado o cálculo exponencial, para mostrar que os conceitos matemáticos possuem relações que se estabelecem e propiciam novos conhecimentos, previsto no PCN's. Agrupá-los em duplas para a realização das tarefas, tem o objetivo de organizar a leitura do texto de modo que os alunos tirem o máximo de proveito evitando conversas paralelas que dificultam a interpretação e buscando dinamizar a resolução das questões propostas.

## ATIVIDADE 1

Texto retirado do livro Matemática – Ensino Médio, Katia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz,. Ed. Saraiva/SP, 4 ed – 2004, p. 305 e 306

**O Elo Matemática-História**

**Os cálculos trigonométricos e as Grandes Navegações**



Desde o início do século XV, os portugueses haviam costeado a África Ocidental sempre rumo ao sul, seguindo ainda a maneira medieval de navegar, ou seja, nunca se afastando da costa. Aproximadamente em 1420, o Infante D. Henrique, o Navegador, de Portugal (1394-1460), fundou um instituto de pesquisas náuticas e um observatório astronômico em Sagres, no Cabo São Vicente. As obras de Ptolomeu e de outros escritores antigos foram então levadas para o instituto e seus ensinamentos utilizados nas explorações. Mas, certa vez, um dos capitães do Infante D. Henrique observou: "Com todo o devido respeito ao renomado Ptolomeu, chegamos a conclusões opostas às suas".

Tanto no observatório como no instituto havia matemáticos alemães e cartógrafos italianos, que preparavam mapas das terras e mares explorados desde 1450. Utilizando-se da Trigonometria, os primeiros recalcularam a circunferência terrestre, empregando o reduzido valor atribuído por Ptolomeu ao comprimento de um grau, com o que acabaram por obter uma estimativa favoravelmente pequena. E foi com base nessa avaliação que, em 1474, se fez um gráfico da rota da circunavegação da Terra pelo rumo oeste.

Os portugueses iniciaram a exploração na direção leste, com Bartolomeu Dias dobrando o Cabo da Boa Esperança em 1486 e Vasco da Gama alcançando a Índia pelo mesmo caminho em 1497. Os espanhóis, ao contrário, arrojaram-se para o lado oeste, com Colombo chegando às Índias Ocidentais em 1492. Tanto Colombo como Vasco da Gama tiveram de atravessar grandes extensões oceânicas, sem o menor vislumbre de terra. A fim de possibilitar a repetição das viagens, foram necessários a elaboração de cartas marítimas e o desenvolvimento de métodos para se determinar a posição de um navio em alto-mar. A feitura de tais cartas, abrangendo grandes áreas, em geral envolvia problemas de determinação das posições relativas de pontos dados sobre a superfície da Terra e de representação da sua esfericidade num mapa plano. A determinação da posição de um navio em alto-mar e da localização das terras recém-descobertas exigia processos de medição de latitude e longitude dos lugares envolvendo cálculos trigonométricos.

## Calculando e compreendendo melhor o texto

1) Um navio parte de um porto localizado no porto de Santa Helena (ponto A), navega até o porto de Curumã (ponto B) e retorna. Depois de reabastecer, o navio navega até o porto de São Félix (ponto C) e retorna ao Porto de Curumã. Considere a figura abaixo e responda as questões.

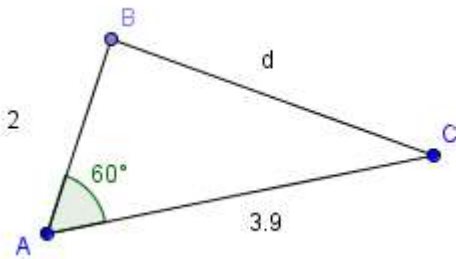
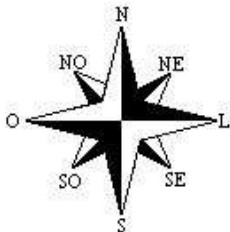


Figura feita pelo autor do trabalho no geogebra

a) Determine a distância percorrida pelo navio desde sua partida até o retorno final em dezenas de quilômetros.

b) Considere que o comandante do navio ao navegar do porto de Santa Helena até o Porto São Félix, descobre que seguiu erradamente 3km rumo leste. Ao perceber o erro o capitão corrigiu a rota, navegando até o Porto São Félix. Qual a distância que o navio percorreu para chegar a este Porto, em dezenas de quilômetros?



Pontos cardeais e os pontos auxiliares. (figura do site: <http://www.cdcc.usp.br/cda/ensino-fundamental-astronomia/parte1a.html> acesso em 25/10/2012)

Utilize a tabela trigonométrica disponibilizada no livro didático.

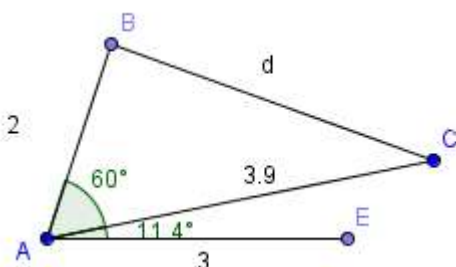


Figura feita pelo autor do trabalho no geogebra

Não houve dificuldade na resolução, somente falta de atenção na resposta. Pois deve ser considerada a distância percorrida e não somente à distância EC.

c) “*Toda bússola apresenta um mostrador com os pontos cardeais e o pontos auxiliares, o aspecto visual desse mostrador está indicado na figura acima. Outro nome aplicado a esse mostrador é o de: ROSA DOS VENTOS. Esse nome tem origem nos navegantes do Mar Mediterrâneo em associação aos ventos que impulsionavam suas embarcações. ... Uma relação completa dos Pontos Cardeais, Pontos Auxiliares e Pontos Co-laterais, nós apresentamos à seguir:*

Rumos ggg mm 76 – Nome

0 ou 64 000° 00' 00" – Norte

2 011° 15' 00" – Norte por Este

4 022° 30' 00" – Norte–Nordeste

6 033° 45' 00" – Nordeste por Norte

8 045° 00' 00" – Nordeste

10 056° 15' 00" – Nordeste por Este

12 067° 30' 00" – Este–Nordeste

14 078° 45' 00" – Este por Norte

16 090° 00' 00" – Este”.

(Texto retirado do site : <http://www.cdcc.usp.br/cda/ensino-fundamental-astronomia/parte1a.html> acesso em 25/10/2012)

Considere que o navio precisa navegar até a ilha de Boa Esperança, que fica a 2 milhas rumo ao nordeste. Com uma pane na orientação, o navio seguiu erradamente 2 milhas rumo ao norte. Percebendo o erro o comandante do navio corrigiu a rota e navegou diretamente para a ilha. Baseado com contexto desenhe a situação, utilize a bússola dada no exercício anterior, e determine a distância que o navio deverá percorrer para chegar a ilha em quilômetros.

Adote: 1 milha náutica é aproximadamente 1,8 km.

**O professor pode esboçar a situação se os alunos têm dificuldade em pontos cardeais, mas deve deixá-los concluir os ângulos envolvidos: estimule-os a analisar a tabela ou a Rosa dos Ventos disponibilizada acima na questão anterior.**

## **PESQUISANDO E DISCUTINDO**

Pesquise a importância da cartografia e troque ideias com seus colegas. Em um mapa da sua cidade(disponível na Casa de Cultura ou na Prefeitura Municipal ou no Cartório de Registros ou na Copasa), localizem diversos pontos importantes como escolas, as igrejas, hospital, clubes. Comparem na Internet com o Google maps ou com outro equivalente. Investiguem...

**Os alunos só conseguiram localizar no Google maps o Pirapetinga Ipê Clube, na Pça Santana, mas compararam o mapa da Copasa por rua com o da Prefeitura que é o da cidade inserida no do Estado de Minas Gerais.**

**Essa atividade não foi cobrada mas avaliada com extra para motivar os demais que se interessaram.**

## É curioso

“ Eratóstenes (277-196 A.C.) era Bibliotecário-Chefe do Museu de Alexandria, e foi nos livros que tomou conhecimento do seguinte fenômeno: Quando o sol se encontrava mais ao norte, os raios solares caíam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siena, a 800 km de Alexandria (isto era sabido porque a imagem do sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos desta cidade). Naquela mesma hora, em Alexandria, os raios caíam inclinadamente, fazendo um ângulo de aproximadamente  $7,2^\circ$  com a vertical, ou seja,  $1/50$  da circunferência completa, que corresponde ao ângulo de  $360^\circ$  ( esse ângulo era medido através da comparação da sombra de um obelisco, por exemplo, com a sua altura) (Figuras 4 e 5).  
“<http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf>

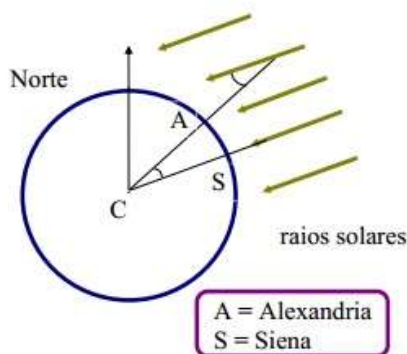


Figura 4

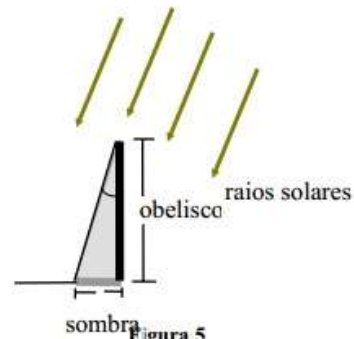


Figura 5

Como os raios solares são praticamente paralelos entre si, então o ângulo central  $\widehat{AC S}$  também mede  $7,2^\circ$ .

Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos, temos:

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360}{7,2},$$

onde R é o raio da Terra.

Como a distância de Alexandria a Siena é 800 km, temos

$$2\pi R = 800 \times \frac{360}{7,2} = 40.000$$

Usando (como faziam os gregos) 3,14 para o valor de  $\pi$ , obtemos que o raio da Terra é de aproximadamente  $R = 6.366$  km



*Leia mais sobre o assunto em:*

<http://www.experimentum.org/blog/?p=1237> acesso em 10/10/2012

<http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf> acesso em 10/10/2012

As questões apresentam questões relativas ao texto, pretende-se inculir nos alunos a necessidade de interpretar um contexto utilizando cálculos matemáticos. E incentivar a pesquisa para que eles a façam mais naturalmente, ou seja, se leram sobre um assunto interessante então aprofunde seu conhecimento, busque informações complementares e troque 90s9x9 com os colegas de classe.

Os alunos realizaram as atividades conforme o esperado, as fórmulas foram consultadas no livro didático, usaram a calculadora para realizarem os cálculos. Alguns alunos tem dificuldade com os pontos cardeais, mas são necessários tanto para localização quanto para a Física, **o professor pode retornar ao texto e explicar a importância desses conhecimentos ao longo da História e na atualidade onde na falta de instrumento estes conhecimentos são importantes e úteis.** Os objetivos foram alcançados e as dificuldades foram esclarecidas dentro de cada grupo com a mediação do professor.

## ATIVIDADE 2

### A MATEMÁTICA E AS PRÁTICAS SOCIAIS

**TODOS NÓS SOMOS RESPONSÁVEIS PELOS RIOS DE NOSSA TERRA...SE NÃO PROTEGERMOS E PRESERVARMOS NOSSOS CURSOS D' ÁGUA DE SUPERFÍCIE E SUBTERRÂNEOS, CORREMOS O RISCO DE DESTRUIR NOSSAS FONTES DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA POTÁVEL! SOMOS TODOS RESPONSÁVEIS!**

[10ós10://sosriosdobrasil.blogspot.com.br/2011/03/aniversario-do-blog-e-noticia-no-site.html](http://10ós10://sosriosdobrasil.blogspot.com.br/2011/03/aniversario-do-blog-e-noticia-no-site.html)



**DIA DO RIO - 24 NOVEMBRO**  
**Celebrações do SOSRiosBr**



**ORGANIZE EM SUA COMUNIDADE, SUA ONG, SUA ESCOLA OU NO SEU GRUPO AMBIENTAL AS CELEBRAÇÕES DO "DIA DO RIO" E SEJA UM PRESERVADOR DO SEU CURSO D' ÁGUA!**

**Os rios e córregos de sua comunidade são de vital importância para a saúde ambiental e qualidade de vida de seus moradores! Ajude a preservar e valorizar os seus rios!!!**

Que ações você faria para melhorar as condições do Rio Pirapetinga? Em que condições está o Rio Pirapetinga? (vamos fotografar as margens e trechos visíveis do Rio Pirapetinga, elaborar um jornal mural promovendo ações simples que vão conscientizar os moradores e demais colegas de que cada um é responsável pela conservação e limpeza das margens, pesquisar como a Prefeitura recolhe os entulhos: dia da semana, qual o procedimento correto para solicitar um serviço municipal: setor e pessoa responsável, elaborar um slogan para incentivar jogar lixo no lixo e não em ruas e margens).

Imagem copiada de: [10ós10://saavedramusicachibeepoesia.blogspot.com.br/2011/03/beleza-dos-rios-do-para.html](http://10ós10://saavedramusicachibeepoesia.blogspot.com.br/2011/03/beleza-dos-rios-do-para.html)



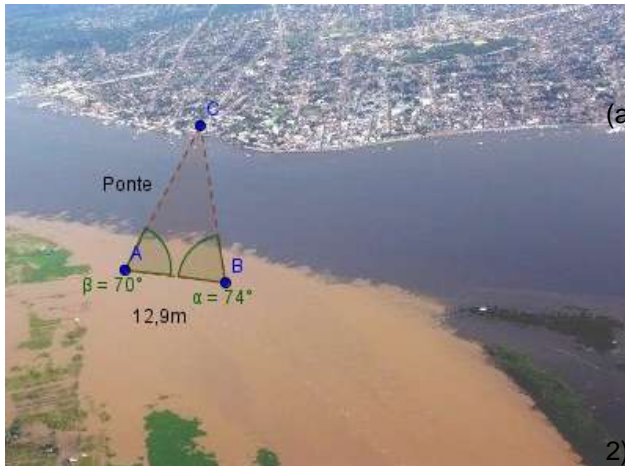
1) O Prefeito de "Margem Limpa" pretende construir uma ponte sobre o Rio "Lindo do Sul", ele é um prefeito consciente e quer desmatar a menor área possível de mangue que permita a construção de uma ponte. No dia previsto para o Topógrafo fazer as devidas medições aconteceu um imprevisto, sendo assim o prefeito viu-se com o prazo do projeto comprometido e buscou ajuda no colégio Pedro Baptista de Souza. A professora disse que poderia ajudá-lo junto com a turma do 1º ano, pois eles tinham o conhecimento necessário para fazer as medições, visto que o topógrafo, já havia marcado os pontos A, B e C onde poderia realizar as medidas necessárias.



Triângulo construído no geogebra pelo auto deste plano de trabalho

- 1) Do ponto A, situado numa das margens do rio, até um ponto B nesta margem os alunos e a professora andaram 12,9 m. Então, um grupo de alunos munidos de um teodolito mediram o ângulo A e outro grupo o ângulo B, sob qual avistavam o ponto C.

Triângulo construído no geogebra pelo auto deste plano de trabalho



Qual o comprimento da ponte, aproximadamente? Adote:  $\sin 36^\circ = 0,588$ ,  $\cos 36^\circ = 0,809$ ,  $\sin 70^\circ = 0,94$ ,  $\cos 70^\circ = 0,342$ ,  $\sin 74^\circ = 0,961$ ,  $\cos 74^\circ = 0,276$ .

(a) 12,13m (b) 13,19m (c) 7,89m (d) 21,08m

Resposta: (d)

Distratores: (a), (b) (c) apresentam erro na montagem das razões possibilitando ao professor trabalhar ângulo oposto, relações entre ângulos e lados, soma de ângulos internos, de modo a solucionar outros problemas semelhantes.

2) Os alunos calcularam o comprimento da ponte. Para isso, eles utilizaram a lei dos senos ou a lei dos cossenos? Por quê? Quais as informações disponibilizadas no problema?

II) A professora e os alunos estão na margem do rio e dispõe de um instrumento de medida que possibilita medir o lado  $BC = 20,3\text{m}$ , o lado  $AB = 12,9\text{m}$  e o ângulo  $B = 74^\circ$ . Nessas condições, ajude a professora e seus alunos a calcular o comprimento da ponte.



Triângulo construído no geogebra pelo auto deste plano de trabalho

Quais as informações dadas no problema? Anote-os na figura acima. Agora analisando-a responda:

Qual lei você utilizará para calcular o comprimento da ponte? Por quê?

**VAMOS PENSAR?** Seria viável utilizar as razões trigonométricas seno, cosseno ou tangente em alguma das questões levantadas seja I ou II? Em que condições você normalmente as utiliza, dê exemplos. Que medida ou medidas seria necessária para que alguma dessas razões fosse utilizada?

Os alunos ligaram para a Prefeitura e pediram as informações solicitadas. Cada grupo deu sugestões muito parecidas: colocar o lixo pela manhã como a Prefeitura informa, colocar o entulho nos dias certos

previstos com a devida solicitação, a cidade tem usina de reciclagem, que muitos alunos não tinham conhecimento, então foi sugerido separar o lixo sólido, do líquido; reciclar podendo doar às instituições que vendem para arrecadar fundo para o Natal de fim de ano, os alunos perceberam que somente um mercado na cidade recolhe pilhas então informaram no trabalho, nenhum comércio recolhe bateria de celular.

Quanto às questões foram resolvidas de forma correta e entregues em folha separa para a devida correção. Os alunos ainda esquecem a unidade de medida, e alguns não deram a resposta do problema, ou seja, somente calcularam sem a devida análise. Os trabalhos foram devidos para as devidas alterações depois do comentário sobre as questões.

### ATIVIDADE 3

- Habilidades: - Reconhecer no círculo trigonométrico a medida de um arco em grau e em radiano, determinar as razões trigonométricas para ângulos maiores que  $90^\circ$  usando a simetria do círculo trigonométrico, calcular os valores para os ângulos maiores que  $90^\circ$ , associar os sinais aos quadrantes diferenciando seno, cosseno e tangente, estender a relação fundamental da trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Pré-Requisitos: arcos e ângulos no círculo trigonométrico, razões trigonométricas.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: livro didático, calculadora, folha de atividade, data show, notebook.
- Organização da turma: em grupos de 3 alunos.
- Objetivos: Trabalhar com a medida de um arco em grau e radiano, associar arcos de  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  e  $4^\circ$  quadrantes ao  $1^\circ$  utilizando a simetria no círculo trigonométrico, determinar os valores das razões para esses arcos analisando os sinais, determinar a relação fundamental da trigonometria utilizando ciclo trigonométrico, construir uma tabela trigonométrica com os valores de :seno, cosseno e tangente de um arco para 1 volta completa.
- Cuidados especiais: agendar o uso de data show para ser levado à sala de aula.
- Avaliando: Participação nas atividades, as contribuições dadas, se realiza cálculos e análises com as razões trigonométricas, se reconhece que todas as razões podem ser determinadas através do círculo trigonométrico, nas aplicações e/ou apresenta uma resolução correta da relação fundamental, se resolve os exercícios propostos para verificação dos conceitos abordados de modo autônomo.
- Metodologia adotada: Utilizar o círculo trigonométrico construído no 3º bimestre mostrará ao aluno que os conteúdos se integram e são estratégias para adquirir novos conhecimentos e revisar outros que serão úteis no decorrer deste plano. A partir desta construção serão articulados todos os conceitos propostos, a intenção é que o aluno interaja e conclua os valores das razões nos outros quadrantes. Neste momento o professor será um mediador organizando as reflexões e instigando novas observações que auxiliarão os alunos na resolução dos exercícios propostos.

## SENO, COSSENO ETANGENTE NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Observe o círculo trigonométrico construído no bimestre anterior. Analise suas conclusões. Reflita mais um pouco. Agora, vamos...

Lembre-se que a abscissa é o valor do \_\_\_\_\_ e a ordenada é o \_\_\_\_\_.

Transcreva para a tabela abaixo os valores notáveis do seno e do cosseno que constam em seu círculo trigonométrico.


Notem que vocês transcreveram o 1º quadrante, agora vamos analisar os valores dos demais ângulos de 1 volta. Leiam com atenção e completem a tabela acima.

Sabendo esses valores e usando a simetria dos pontos do círculo trigonométrico, podemos obter valores de seno e cosseno de arcos em todos os quadrantes.

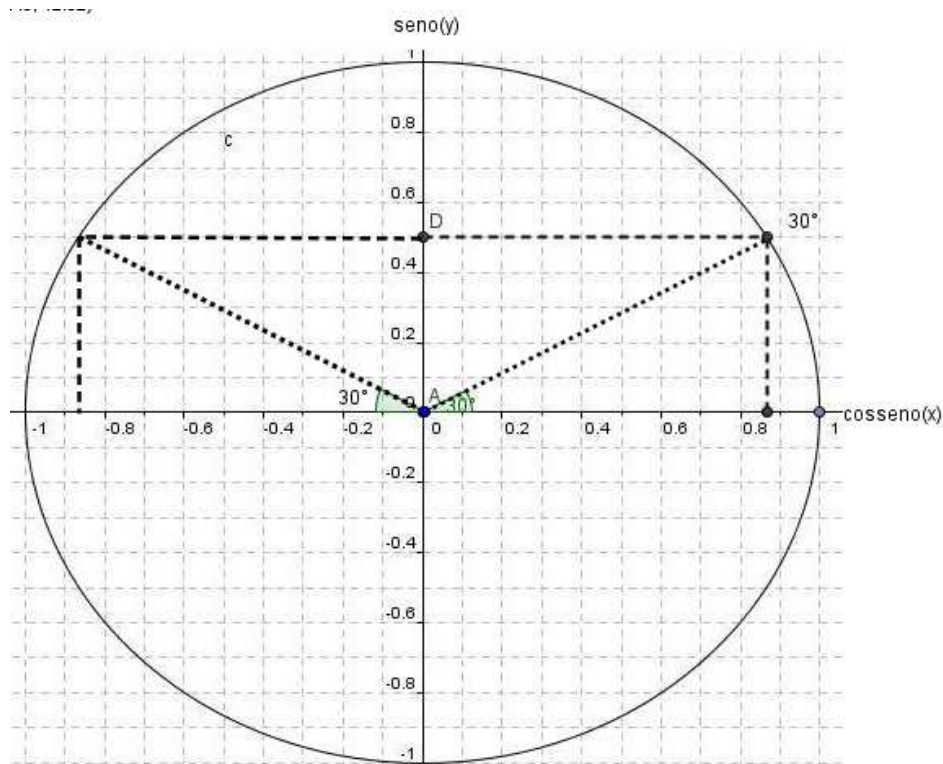
- Arcos do 2º quadrante

Vamos pensar:

Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 2º quadrante, basta, compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{Sen}(\pi - x) = \text{sen}x \quad \text{ou} \quad \text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen}x$$

$$\text{Cos}(\pi - x) = -\cos x \quad \text{ou} \quad \text{Cos}(180^\circ - x) = -\cos x$$



Sendo  $x = 30^\circ$ , então  $\text{sen} x = \text{sen} 30^\circ$ . Daí,  $\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen}(\text{_____})$ , que é um arco do 2º quadrante. Temos que  $\text{sen} 30^\circ = \text{sen}(180^\circ - 30^\circ)$ , ou seja,  $\text{sen} 30^\circ = \text{sen}(\text{_____}) = \frac{1}{2}$ .

De modo análogo, podemos calcular o  $\text{cos} x$ , para  $x = 30^\circ$ . Basta termos o cuidado com o sinal do cosseno no 2º quadrante. Lembre-se que a abscissa é o valor do cosseno. Sendo assim,  $-\text{cos} x = \text{cos}(180^\circ - x)$ , ou seja,  $-\text{cos} 30^\circ = \text{cos}(180^\circ - 30^\circ) = \text{cos}(\text{_____}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

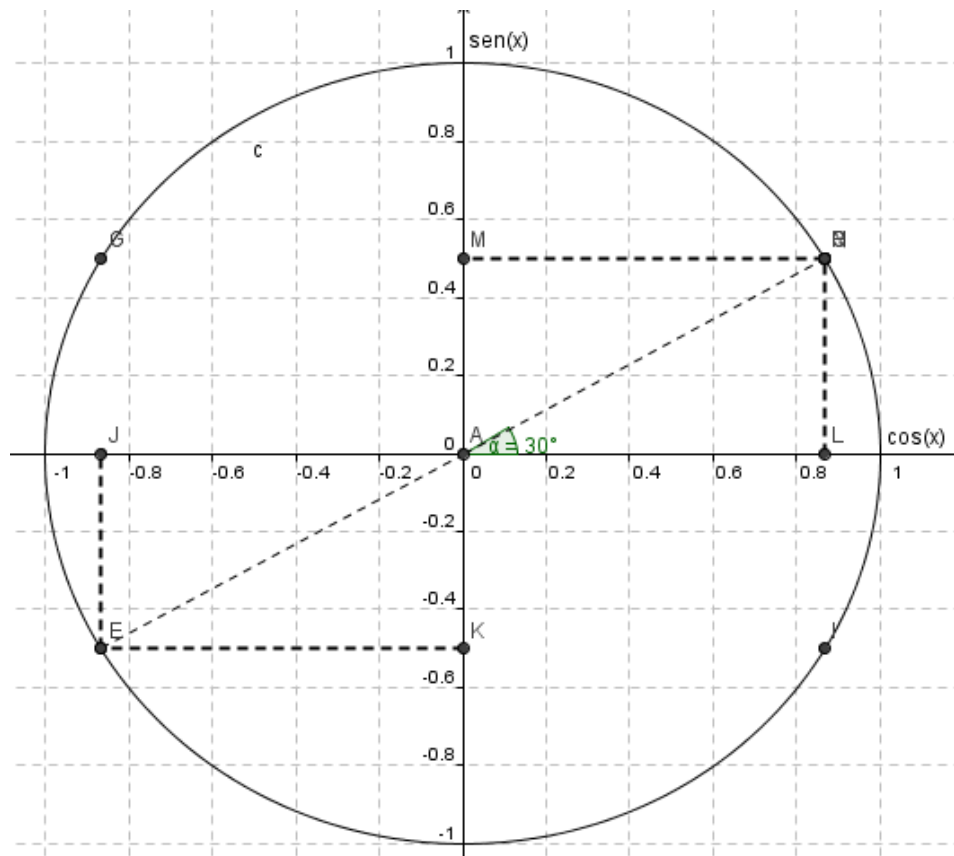
Determine os valores para os arcos de  $x = 45^\circ$  e  $x = 60^\circ$ .

### Arcos do 3º quadrante

Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 3º quadrante, basta, compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{Sen}(\pi + x) = -\text{sen} x \quad \text{ou} \quad \text{sen}(180^\circ + x) = -\text{sen} x$$

$$\text{Cos}(\pi + x) = -\text{cos} x \quad \text{ou} \quad \text{cos}(180^\circ + x) = -\text{cos} x$$



Sendo  $x = 30^\circ$ , então  $\text{sen} x = \text{sen} 30^\circ$ . Daí,  $\text{sen}(180^\circ + x) = \text{sen}(\text{_____})$ , que é um arco do 2º quadrante. Temos que  $\text{sen} 30^\circ = \text{sen}(180^\circ + 30^\circ)$ , ou seja,  $\text{sen} 30^\circ = \text{sen}(\text{_____}) = -\frac{1}{2}$ .

De modo análogo, podemos calcular o  $\cos x$ , para  $x = 30^\circ$ . Basta termos o cuidado com o sinal do cosseno no 3º quadrante. Lembre-se que a abscissa é o valor do cosseno. Sendo assim,  $-\cos x = \cos(180^\circ + x)$ , ou seja,  $-\cos 30^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = \cos(\text{_____}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Determine os valores para os arcos de  $x = 45^\circ$ ,  $x = 60^\circ$ .

- Arcos do 4º quadrante

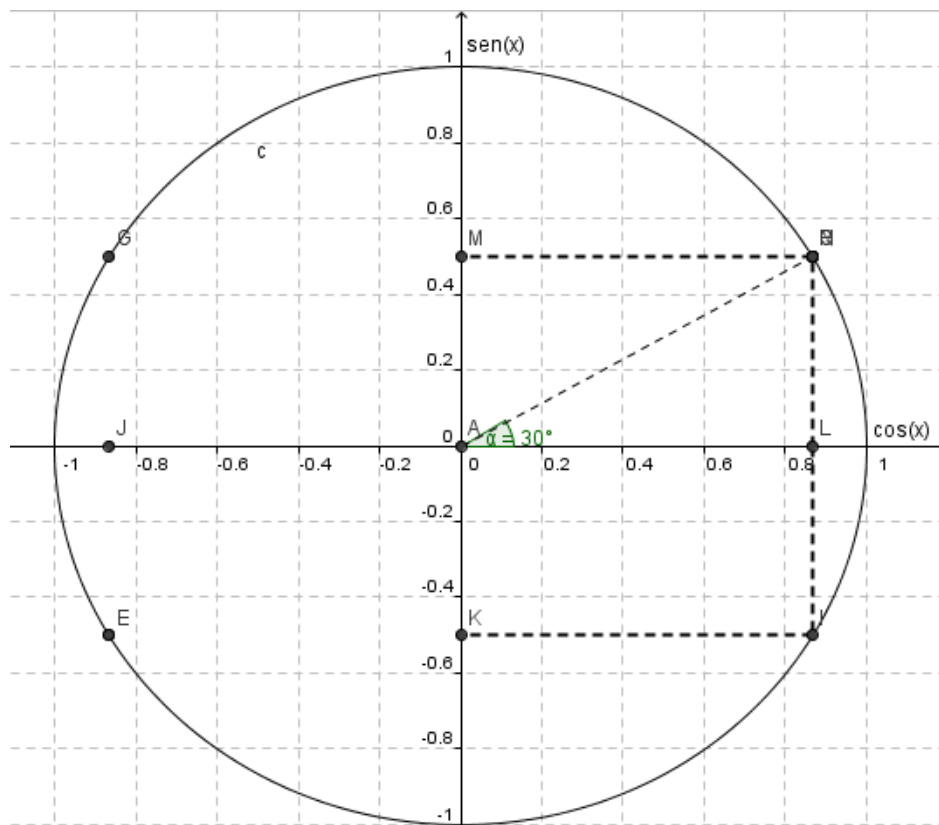
Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 4º quadrante, basta, compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{Sen}(2\pi - x) = -\text{sen} x \quad \text{ou} \quad \text{sen}(360^\circ - x) = -\text{sen} x$$

$$\text{Cos}(2\pi - x) = \cos x \quad \text{ou} \quad \cos(360^\circ - x) = \cos x$$

-





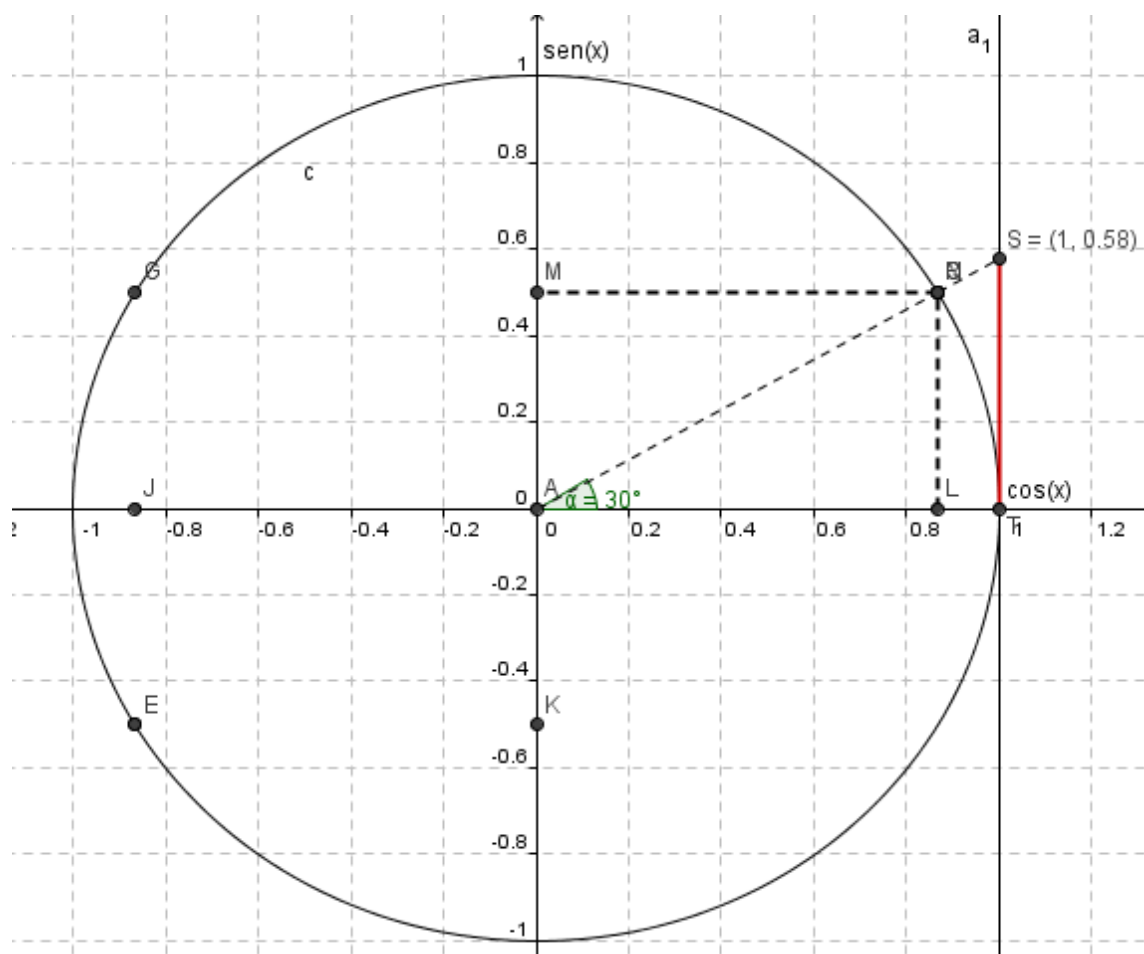
Sendo  $x = 30^\circ$ , então  $\text{sen}x = \text{sen}30^\circ$ . Daí,  $\text{sen}(360^\circ - x) = \text{sen}(\text{_____})$ , que é um arco do 2º quadrante. Temos que  $\text{sen}30^\circ = \text{sen}(360^\circ - 30^\circ)$ , ou seja,  $\text{sen}30^\circ = \text{sen}(\text{_____}) = -\frac{1}{2}$ .

De modo análogo, podemos calcular o  $\text{cos}x$ , para  $x = 30^\circ$ . Basta termos o cuidado com o sinal do cosseno no 4º quadrante. Lembre-se que a abscissa é o valor do cosseno. Sendo assim,  $-\text{cos}x = \text{cos}(360^\circ - x)$ , ou seja,  $\text{cos}30^\circ = \text{cos}(360^\circ - 30^\circ) = \text{cos}(\text{_____}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Determine os valores para os arcos de  $x = 45^\circ$  e  $x = 60^\circ$ .

## TANGENTE DE ARCO

Montar no geogebra a tangente de um arco.



Dado um arco de medida no círculo trigonométrico, definimos a tangente deste arco como o valor obtido assim:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Assim, você pode obter os valores da tangente. Utilize a tabela que você montou de seno e cosseno e mãos à obra!

Valores notáveis da tangente

Determine os valores da tangente dos arcos abaixo, para isso, analise o círculo trigonométrico e complete a tabela.


Trabalhar o conteúdo a partir de círculo trigonométrico foi primordial para o entendimento e revisão dos conteúdos propostos. Como ele já haviam construído no bimestre anterior com material de desenho este foi utilizado para investigar e completar o formulário acima. Usou-se a simetria no círculo e foram marcados os arcos de  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  e  $4^\circ$ , logo a seguir foram analisados os sinais, determinado o seno, cosseno e tangente dos arcos e transcritos para as tabelas que serão usadas na construção do gráfico das funções.

Os alunos fizeram as atividades com concentração e empenho atingindo os objetivos propostos.

### INVESTIGANDO A RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

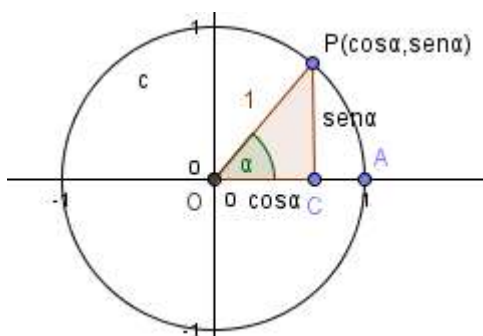


Figura construída no geogebra pelo autor deste Plano de Trabalho

Observe o ciclo trigonométrico ao lado. O ponto P é extremidade do arco AP de medida  $\alpha$  rad; logo, P tem coordenadas  $\cos \alpha$  e  $\sin \alpha$ . Os lados do triângulo COP medem:  $OC = \cos \alpha$ ,  $CP = \sin \alpha$  e  $OP = 1$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo COP, obtemos a **relação fundamental da trigonometria**.

$$\text{Sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Vimos esta relação para um arco AP do primeiro quadrante. Considerando arcos do segundo, do terceiro e do quarto quadrante, se você investigar verificará então que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

## VAMOS APLICAR O QUE REVISAMOS



**Imagem da maior roda-gigante do mundo”** Singapore Flyer” em Cingapura. A roda gigante é composta de 28 cabines, cada qual com espaço para até 28 indivíduos e um giro completo leva cerca de 30 minutos, no seu ponto mais alto nada menos que 165 metros de altura.: <http://www.acemprol.com/a-maior-roda-gigante-do-mundo-t4907.html> acesso em 28/10/2012

1)Um parque de diversões tem uma roda-gigante com 8m de raio. Nela, existem 12 cadeiras dispostas a espaços regulares, numeradas seqüencialmente com três lugares em cada uma.

a)Quando a cadeira de número 5 estiver junto ao chão para pessoas descenderem, que cadeira estará no topo?

Quando a cadeira de número 5 estiver no chão, no topo estará a cadeira de número 11.

b)Qual é a distância, na circunferência, entre a cadeira 7 e a cadeira 11?

As cadeiras de números 7 e 11 formam entre si um ângulo de  $120^\circ$ , ou seja,  $1/3$  da circunferência.

Logo, a distância, em metros, é de:

$$\frac{2\pi \cdot r}{3} = \frac{16\pi}{3} \cong 16,75$$

c)Comparando a roda-gigante com o ciclo trigonométrico, qual é o seno do arco determinado pela cadeira 5 e a origem do ciclo, quando a cadeira de número 12 estiver no chão?

Quando a cadeira 12 estiver no chão, a cadeira 3 estará na origem do ciclo e a cadeira 5 formará com ela um arco de  $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

d)No mesmo caso do item anterior, qual é o cosseno do arco determinado pela cadeira 9 e a origem do ciclo, quando a cadeira 12 estiver no chão?

Quando a cadeira 12 estiver no chão, a cadeira 3 estará na origem e a cadeira 9 estará oposta a ela. Assim,  $20\cos\varphi = -1$ .

Os alunos já tinham conhecimento da relação fundamental que foi dada no bimestre anterior, então foi interessante mostrar sua relação com o círculo trigonométrico.

A atividade envolveu determinação de localização e valor de arcos, e os alunos não tiveram dificuldade na determinação do arco, mas não recordava como determinar a distância então foi necessário lembrar o comprimento de circunferência. Logo, a seguir fizeram os cálculos sozinhos. Eles acharam interessante a informação da roda gigante. Num geral, eles gostam de atividades de raciocínio lógico e comparação.

## ATIVIDADE 4

### O JOGO

- Habilidades: Aplicar os conhecimentos da trigonometria para determinar o valor dentre os possíveis no baralho, visualizar e manipular de forma dinâmica os cálculos trigonométricos..
- Pré-Requisitos: trigonometria no triângulo, trigonometria no círculo.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: uma cópia do baralho de cartas e do dado do jogo com ângulos de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , folha de papel ofício e lápis para registrar os cálculos, calculadora.
- Organização da turma: em grupos de 3 alunos.
- Objetivos: Expressar-se com clareza, utilizando os cálculos trigonométricos dentro das regras do jogo. Associar e completar os ângulos, efetuando e determinando os valores tanto no triângulo quanto nas expressões trigonométricas.
- Cuidados especiais: comunicar com antecedência ao coordenador de turno e corpo docente sobre a atividade, pois os alunos poderão falar alto e manifestar comemorações.
- Avaliando: Participação no jogo, se efetua os cálculos determinando os valores que mais lhe convém, se relaciona o conteúdo já estudado aos cálculos realizados, análise da folha de rascunho com as jogadas, se respeita o adversário e mantém uma competição saudável.
- Metodologia adotada: Com os alunos dispostos em grupos de três será entregue o baralho e o dado, a folha de rascunho, as regras do jogo. É importante que eles registrem as jogadas para ser usado como avaliação, bem como para escolher o valor que mais lhe convém, assim quando jogar novamente se os cálculos se repetirem otimizam o tempo podendo jogar mais de uma vez. O jogo tem a intenção de estimular, motivar os conteúdos propostos, e será usada como revisão, avaliação e para introduzir gráfico de funções e equações trigonométricas. Assim o aluno deve se esforçar e participar se concentrando e buscando vencer o jogo. Quaisquer dúvidas o professor deverá estar atento para interferir e garantir que a atividade seja realizada por todos. Como o jogo resulta em valores de seno, cosseno e tangente caso o aluno não recorde os valores poderão ser consultados nas tabelas elaboradas pelos mesmos no caderno. Ao aplicar esse jogo o aluno é estimulado a uma competição saudável com o principal objetivo de desenvolver habilidades e atitudes que promovam a utilização dos conhecimentos adquiridos anteriormente e a aquisição de novos conhecimentos.

## JOGO: ENCONTRE O PAR

Fonte: Livro 2: Matemática – Ensino Médio, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora Saraiva, 4 edição reformulada – 2004 – São Paulo, páginas 439 a 442.

### ENCONTRE O PAR (p. 373)

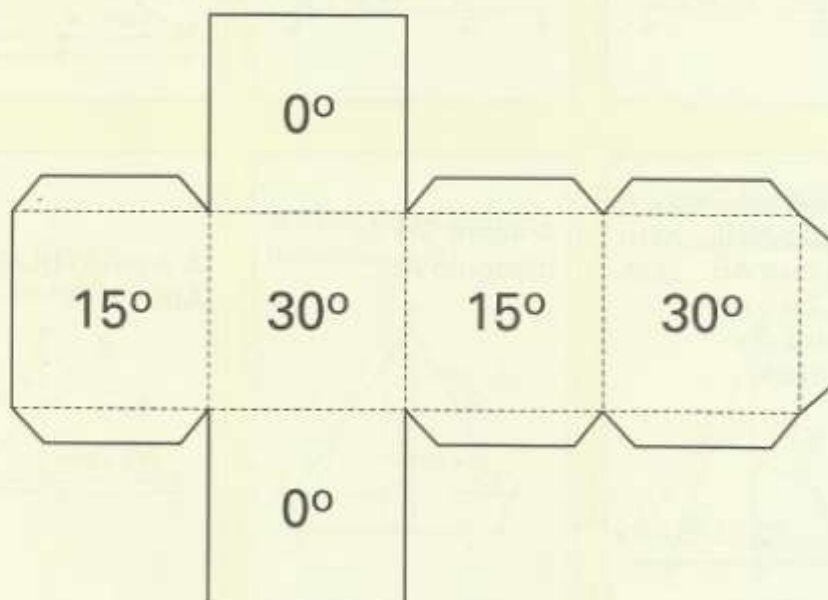
**Número de participantes:** 2 ou 3

**Material necessário:** uma cópia do baralho de cartas (ver páginas seguintes) e do dado abaixo, montado, com os valores dos ângulos em graus ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ ), papel e lápis para registrar os cálculos.

**Regras:**

- As cartas são embaralhadas e colocadas no centro de uma mesa (ou carteira) com as faces voltadas para baixo.
- Os participantes decidem a ordem em que cada um irá jogar.
- Em cada jogada, cada um dos participantes retira duas cartas do monte e joga o dado duas vezes, anotando os valores obtidos.
- Cada jogador deve substituir os valores de  $x$  em suas cartas pelos valores dos ângulos obtidos no dado, escolhendo qual valor, entre os dois sorteados por ele, quer colocar em cada carta.
- Se o jogador, ao calcular o que se pede nas cartas, conseguir dois valores numericamente iguais, ele permanece com o par de cartas; caso contrário, ele devolve as cartas para um segundo monte sobre a mesa. Essas cartas não poderão mais ser utilizadas nas jogadas seguintes.
- Após cada jogador conferir os cálculos dos demais, nova jogada é feita.
- Quando acabarem as cartas do monte inicial, o jogo termina e ganha aquele que tiver o maior número de cartas.

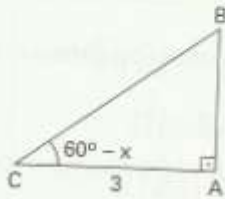
**Dado**



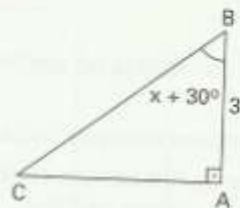


## Baralho

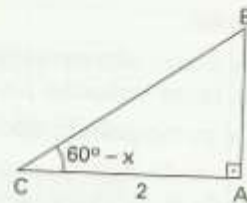
O valor de  $\overline{AB}$  no triângulo retângulo ABC



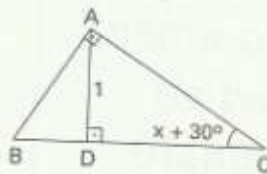
O valor de  $\overline{AC}$  no triângulo retângulo ABC



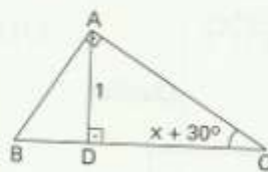
A área do triângulo retângulo ABC



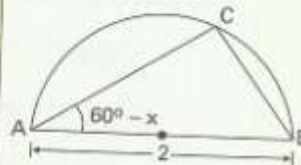
O valor de  $\overline{AB}$  no triângulo retângulo ABC de altura  $AD = 1$



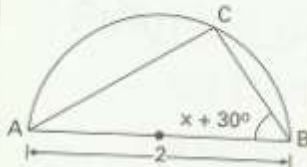
O valor de  $\overline{AC}$  no triângulo retângulo ABC de altura  $AD = 1$



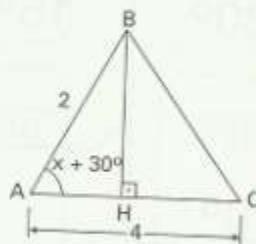
O valor de  $\overline{BC}$  no triângulo ABC, sendo que  $\overline{AB}$  mede 2 e é um diâmetro do semicírculo



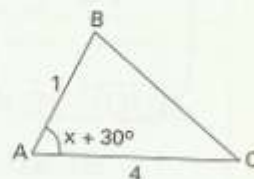
O valor de  $\overline{AC}$  no triângulo ABC, sendo que  $\overline{AB}$  mede 2 e é um diâmetro do semicírculo



A altura  $\overline{BH}$  do triângulo ABC



A área do triângulo ABC





O valor de  
 $\sin 3x + \cos 3x$

O valor de  
 $\sin (2x + 60)$

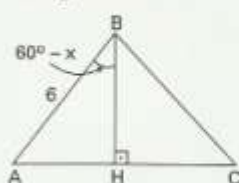
O valor de  
 $2 \cos (45 - 3x)$

O valor de  
 $2 \sin (30 + 2x)$

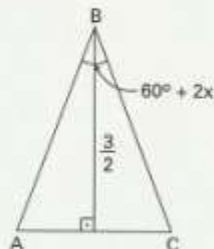
O valor de  
 $\sqrt{3} - \tan 2x$

O valor de  
 $3 \tan (60^\circ - x)$

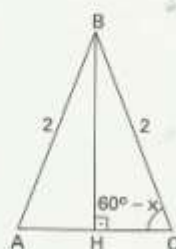
A altura  $\overline{BH}$  do  
triângulo ABC



A base do triângulo  
isósceles ABC



A altura  $\overline{BH}$  do  
triângulo isósceles  
ABC



O valor da função  
 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin^2 3x$

O valor da função  
 $f(x) = 2 \cos 2x$

O valor da função  
 $f(x) = 2 \cos^2 3x$

O jogo é uma excelente estratégia para motivar, interessar e envolver a turma nos conceitos abordados e que virão. Os alunos de início não querem fazer as contas com o registro, então o professor não deve abrir mão já que os cálculos irão auxiliá-los mais à frente com ferramenta para entender fórmulas algébricas de funções e equações.

É a terceira vez que aplico um jogo, então os cuidados e combinados são colocados no quadro para que ocorra de forma mais tranquila. Eles festejam, comemoram mas sem causar constrangimento no colega. É estimulado que se ajudem pois a intenção é obter e sanar o maior número de dúvidas possíveis, eles sabem que o diferencial é a sorte na escolha das cartas por isso é incentivado a colaboração na realização dos cálculos.

Além do laboratório é a atividade que eles mais curtem e que proporciona uma aprendizagem mais efetiva.

Convencionamos que  $\sqrt{2} = 1,41$  e  $\sqrt{3} = 1,73$ .

## ATIVIDADE 5

- Habilidades: Resolver equações trigonométricas.
- Pré-Requisitos: arco seno, cosseno e tangente, equações.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: Livro didático adotado, calculadora.
- Organização da turma: individual.
- Objetivos: Calcular equações trigonométricas encontrando os valores que tornem a sentença verdadeira, identificar uma equação trigonométrica na qual a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica.
- Avaliando: se realiza cálculos de equações trigonométricas, se identifica a equação trigonométrica como aquela na qual a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica, se reconhece uma equação trigonométrica como a solução de um problema.

Metodologia adotada: Será proposta a resolução de um situação-problema para introduzir equações que o aluno tenha conhecimento e domínio do conceito envolvido, isso motivará e dinamizará o conteúdo. Em seguida, estudar-se-á, inicialmente, as equações trigonométricas que podem ser resolvidas por meio de transformação de uma relação trigonométrica conhecida em outras mais simples, mas equivalentes, ou seja, de mesma solução. É importante que o aluno associe as relações exploradas no círculo trigonométrico para usar como estratégia na resolução dessas equações. Logo, será apresentado equações trigonométricas do tipo  $\text{sen } x = \text{sena}$ ,  $\text{cos } x = \text{cosa}$  e  $\text{tg } x = \text{tga}$  e  $\text{sen } x = a$ ,  $\text{cos } x = a$ ,  $\text{tg } x = a$

## Problemas e exercícios

1) Um lavrador, com o auxílio de cordas, precisa construir um canteiro triangular de  $20\text{m}^2$  de área, com um lado medindo 8m e outro, 10m. Ele pegou uma corda e prendeu cada extremidade numa estaca, de modo a ter um dos lados com 10m.

Em seguida, esticou a corda e cravou as estacas no chão. Pronto! Um lado estava marcado.

Pegou outra corda para marcar o lado de 8m e fixou uma das pontas numa das estacas, mas não sabia onde prender a outra ponta de modo que a área desse os  $20\text{m}^2$ .

Para construir o canteiro, ele precisa calcular o ângulo de abertura das duas cordas.

## O poeta é um lavrador

Fonte: <http://poetaeliasakhenaton.blogspot.com.br/2011/03/o-poeta-e-um-lavrador.html#.ULKJkOQ0V8E>

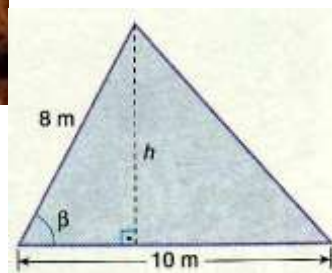
sábado, 12 de março de 2011



**“O poeta é um lavrador de  
sonhos, sentimentos,  
Emoções,  
Cultivando o solo fértil  
Do seu coração.  
A cada dia planta uma nova semente,  
Nasce uma flor, uma poesia  
Do seu divino labor.”**

**-\*\*-Elias Akhenaton-\*\*-**

**BOAS FESTAS!**



Suponhamos que a solução seja o triângulo ao acima. Traçando a altura relativa a um dos lados conhecidos do terreno, temos:

$$\text{Área triângulo} = 10 \cdot h / 2, 20 = 10 \cdot h, h = 4$$

$$\text{Como } \sin \beta = h/8, \text{ temos } \sin \beta = 4/8 = 1/2.$$

Assim, sabemos que o seno do ângulo de abertura entre as cordas é  $1/2$ , sendo  $0^\circ < \beta < 180^\circ$ .

Como  $\sin 30^\circ = 1/2$  e  $\sin 150^\circ = 1/2$ , o problema admite duas soluções. Podemos ter um triângulo acutângulo ou um triângulo obtusângulo.

Observe que a situação do lavrador dependeu da resolução da equação  $\sin \beta = 1/2$ .

Essa equação é um exemplo de equação trigonométrica.

2) Resolver as equações para  $[0, 2\pi]$ .

a)  $\sin x = \sin \pi/3$ .

b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\sin x = 1$

d)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{2}$

e)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f)  $\cos x = -\frac{1}{2}$

g)  $\tan x = 0$

h)  $\tan^2 x - 3 = 0$

i)  $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

## O Gráfico de uma função trigonométrica e Aplicações

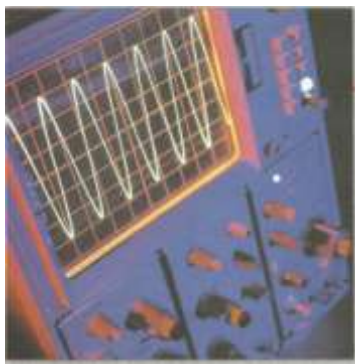
- Habilidades: Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função trigonométrica. Resolver problemas envolvendo a função trigonométrica.
- Pré-Requisitos: Plano cartesiano e gráfico de funções.
- Duração: 4 AULAS: 200 min
- Recursos educacionais utilizados: livro didático adotado, computador com data show, calculadora, folhas de papel milimetrado, régua.
- Organização da turma: Individual.
- Objetivos: Identificar a representação algébrica da função trigonométrica analisando o seu gráfico. Identificar a representação gráfica de uma função trigonométrica, dada sua representação algébrica dessa função, construir e analisar gráfico de função trigonométrica.
- Cuidados especiais: Agendar o uso do recurso multimídia para ser levado à sala de aula.
- Avaliando: Participação nas atividades, a construção do gráfico, a leitura correta do gráfico em relação à situação apresentada, a interpretação correta do gráfico mediante a comparação proposta com a construção no geogebra, a resolução dos exercícios propostos para verificação dos conceitos abordados.
- Metodologia adotada: Por entender que a função trigonométrica é o modelo matemático para muitos fenômenos da natureza, então vamos analisar suas propriedades pelo gráfico explorando suas aplicações. Será utilizado para a construção dos gráficos o papel milimetrado. Estará disponível o Geogebra com os gráficos propostos para que os alunos possam comparar e analisar suas construções, apontar e/ou sugerir análises de outros pontos. É importante que a construção do gráfico de trigonométrica, possibilite a leitura e interpretação de situações-problema facilitando a resolução das mesmas. O aluno é o sujeito dessa construção então será sugerido que eles primeiramente esbocem o comportamento desses gráficos de acordo com o contexto (identificando e classificando as curvas, os períodos e amplitudes) e só depois utilizem os pontos por eles encontrados para construírem o gráfico no papel milimetrado.

### ATIVIDADE 6

1) Utilizando a tabela construída por você com a observação, analise do círculo trigonométrico, determine o Domínio, o conjunto imagem, a periodicidade e sinal das funções seno, cosseno e tangente, esboce o gráfico no papel milimetrado.

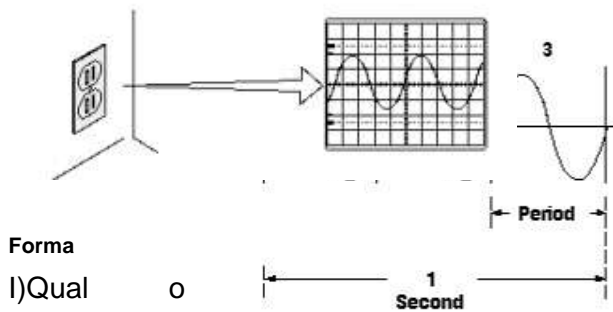
Professor o gráfico da função seno foi feito ponto ponto (ângulos notáveis), os demais com a abscissa de 0,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ ,  $2\pi$ .

2) Na tela de um osciloscópio (instrumento que faz a análise de sinais periódicos para a determinação do



comportamento de circuitos elétricos) podemos visualizar o gráfico de uma função trigonométrica como o da foto ao lado, cuja curva foi produzida por sinais elétricos. Qual a função trigonométrica relacionada neste gráfico?

Função seno(senoidal) . Essa onda é chamada de sinusoidal.



sinusoidal da tensão disponível numa tomada de energia

I)Qual período e a frequência apresentados na figura?

Resposta: 1/3 de segundo e  $F = 3$  ciclos por segundo ou 3Hz (hertz)

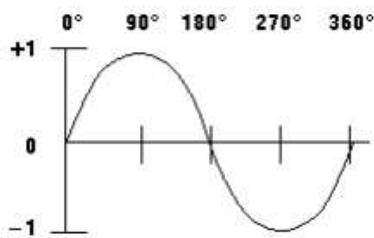


Figura 10: Fase de uma onda sinusoidal ([Tektronics, 1997a])

II) Com um osciloscópio podem medir-se amplitudes de sinais, nomeadamente amplitudes de pico e pico-a-pico. A forma de onda apresentada na Figura 10 tem uma amplitude (de pico) de 1 V e uma amplitude pico-a-pico de 2 V.

Qual a amplitude deste gráfico, dê o seu período em graus, dê o domínio e o conjunto imagem.

Resposta: Máximo:1 e mínimo:-1. Período:360°.  $D=[0°,360°]$  e  $Im=[-1,1]$

Fonte: <http://www.ceset.unicamp.br/~leobravo/TT%20305/O%20Osciloscopio.pdf> acesso em 10/11/2012

3)"O monitoramento da frequência cardíaca de uma pessoa, isto é, do número de seus batimentos cardíacos em certo período de tempo, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto).

O monitoramento cardíaco de um indivíduo, que deve começar na vida intrauterina e prosseguir em exames regulares por toda a vida, é uma das providências que garantem a boa qualidade de vida."



(imagem de um homem durante exame de eletrocardiograma)

(Adaptada – livro Conexões com a Matemática, Obra coletiva, 316. Moderna, 1 ed SP, 2010, p. 48 e 49)

A variação da pressão sanguínea  $P$ (em mmHg, milímetro de mercúrio) de uma pessoa, em função do tempo  $t$ (em s, segundos), é uma função cíclica, sendo que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

A lei da função para certo indivíduo é definida por  $Y = 100 - 20 \cdot 316^{\sin\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)}$ , em que o arco  $\frac{8\pi}{3}$  é dado

em radiano. Esboce o gráfico da situação em um papel milimetrado, analisando-o responda as questões abaixo:

Neste caso foi dada a tabela para organizar os dados e facilitar o cálculo. A intenção é a análise e interpretação dos dados do gráfico para a resolução do problema, por isso os valores das abscissas foram definidos.

X	$\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$	$Y = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$	(x,y)
0			
0,375			
0,75			
1,125			
1,5			
1,875			
2,25			

Considerando o gráfico, segue as questões abaixo:

5. Qual é o intervalo de tempo de um batimento cardíaco?

b) Quantos batimentos cardíacos essa pessoa tem por minuto?

**Resposta: a) 0,75s b) 1 min = 60s então  $60 / 0,75 = 80$  batimentos por minuto.**

c) "O eletrocardiograma é um dos exames mais comuns da prática cardiológica. Criado no início do séc. XX, é utilizado para analisar o funcionamento do coração em função das correntes elétricas que nele circulam.

Suponha que o aparelho registre os batimentos com uma velocidade de 25 mm/s. Sabendo-se que cada pico maior está associada uma contração do coração, e que o comprimento entre uma e outra é de 20mm, determine a frequência cardíaca dessa pessoa, em batimentos por minuto.

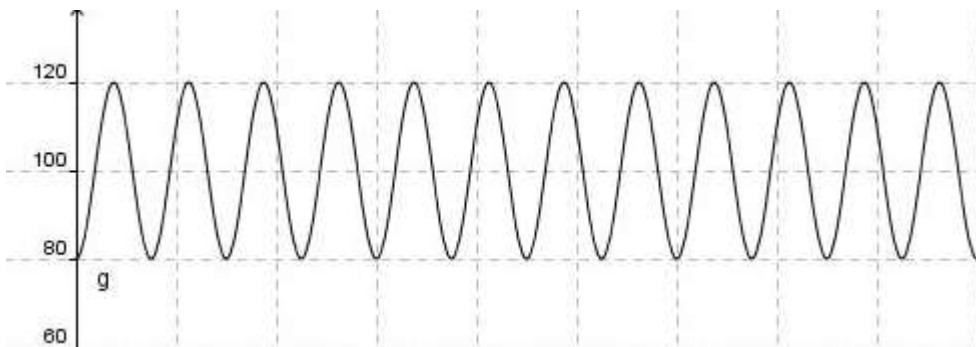
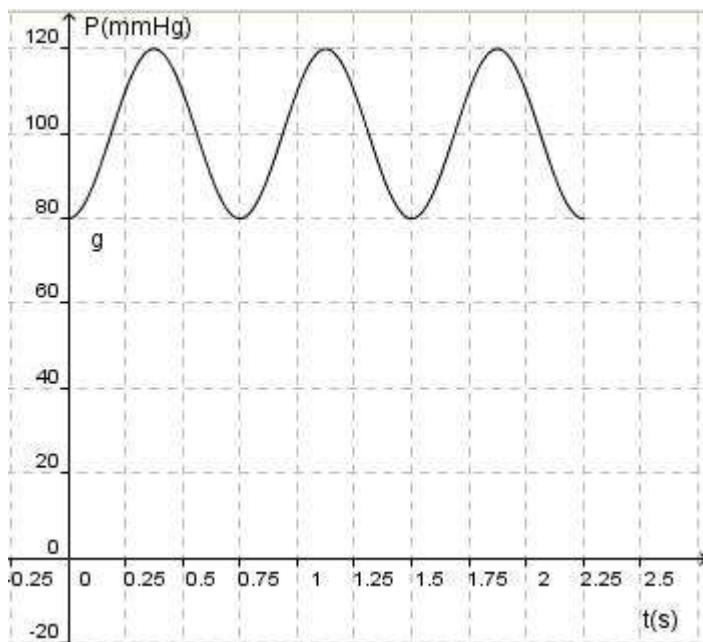
**$F = 25/20 \cdot 60 = 75$  batimentos cardíacos.**

**O professor pode associar progressão aritmética mostrando a razão como o período da função trigonométrica.**

- Aplicando a lei da função P, verificamos que  $P(0,75) = P(1,50) = P(2,25)$ . A sequência 0,75; 1,5; 2,25 é uma progressão aritmética de razão igual a 0,75s, observe: 0,75; 1,5=(0,75+0,75); 2,25=(1,50+0,75), ou seja,  $1,50 - 0,75 = 0,75s$ ;  $2,25 - 1,50 = 0,75s$ . Assim, temos que nessa sequência a razão é um número que sempre é somado ao termo anterior. O significado dessa razão é que ela representa o período da função, ou seja, temos uma função periódica.



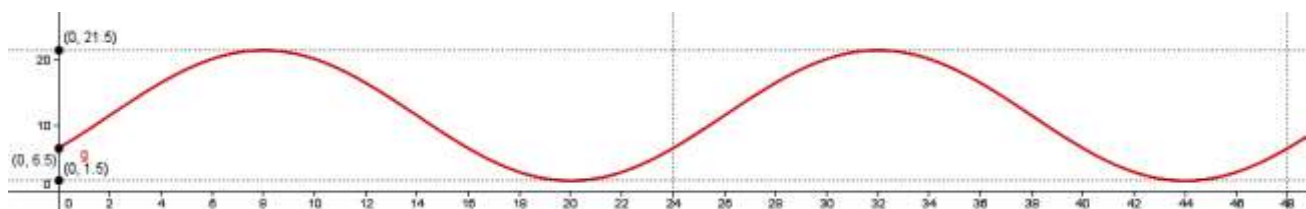
O gráfico abaixo ficará disponível no Geogebra para que o aluno possa verificar seu esboço.



4)Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura  $h$  em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão

$$h(t) = 11,5 + 10\sin\left[\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot (t - 26)\right], \text{ onde o tempo } t \text{ é dado em segundos e a medida angular em}$$

radianos.



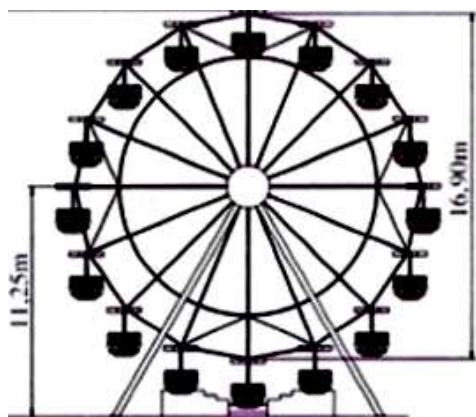
**Gráfico no geogebra pelo autor deste Plano de Trabalho**

Analisando o gráfico responda as questões abaixo:

- Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar( $t=0$ ).
- Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).
- Determine o raio desta roda-gigante.

d) Dê o domínio e o conjunto imagem.

Resposta: a) 6,5m b) 1,5m e 21,5m em 24s c)  $21,5 - 1,5 = 20\text{m}$ .  $20/2 = 10\text{m}$ ;  $D = [0, +\infty[$  e  $\text{Im} = [1,5; 21,5]$



A Mirage do Parque Guanabara em Belo Horizonte/MG é a segunda maior roda gigante fabricada no Brasil, com os seus 20 metros de altura. Veja o desenho técnico. Determine a altura máxima e mínima que uma pessoa atinge nesta roda gigante e o diâmetro da mesma. **Resposta: Máximo: 21,65m mínimo: 4,75m; diâmetro de 16,90 m**

5)(UEL-PR- adaptada em 02/11/2012) Uma bomba de água aspira e expira água a cada três segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Dentre as alternativas a seguir, assinale a expressão algébrica para o volume ( $y$ ) de água na bomba, em função do tempo ( $t$ ), sabendo que é do tipo

$y = a + b \cdot \sin(mt)$ . Adote:  $p = 2\pi/m$ .

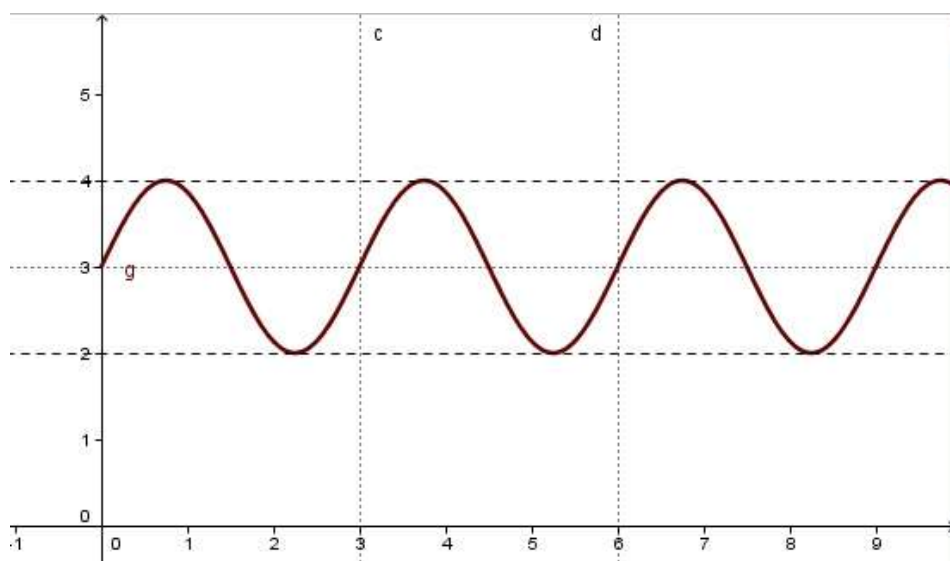


Gráfico construído no

geogebra pelo autor deste Plano de Trabalho

(a)  $y = 2 + 2\sin(\pi/3 \cdot t)$   
 $\sin(\pi/3 \cdot t)$

(b)  $y = 2 + 2\sin(2\pi/3 \cdot t)$   
 (d)  $y = 3 + \sin(2\pi/3 \cdot t)$

(c)  $y = 3 +$

**Resposta: d.**  $p = 2\pi/m$ ,  $m = 2\pi/3$ .  $\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 2 \end{cases}$ ,  $a=3$  e  $b=1$

6) Descreva com uma senoide a altitude do mar em um dia em determinado local que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi 1,6m e na maré baixa foi 0,2m. As marés altas ocorrem às 2h e às 14h, e as marés baixas ocorrem às 8h e às 20h. Vamos considerar a contagem do tempo em horas e a partir da meia-noite.

a)Esboce o gráfico da situação.

Tempo(h)	Altura (m)
2	1,6
8	0,2
14	1,6
20	0,2

b)Qual o período das marés? Dê a amplitude. 12h; máximo:1,6m e mínimo:0,2m

c)Determine a representação algébrica da função  $h(t) = a + b \cdot \sin(ct + d)$ . Use:  $p = 2\pi/c$ .

$P=12h$  daí  $c=\pi/6$ . Para achar a e b. temos  $\begin{cases} a + b = 1,6 \\ a - b = 0,2 \end{cases}$  onde  $a=0,9$  e  $b=0,7$ .

Existe deslocamento horizontal da senoide, então para achar d(constante), vamos trabalhar a amplitude: máximo para  $t=2$ , onde  $\sin x \geq 1$  assim  $x = \pi/2$ , igualando  $\sin(\pi/6 \cdot 2 + d) = \sin \pi/2$  onde  $d = \pi/6$  (1quadrante).

$H(t) = 0,9 + 0,7 \cdot \sin(\pi/6 \cdot t + \pi/6)$ .

Fonte: Livro 2: Matemática – Ensino Médio, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora Saraiva, 4 edição reformulada – 2004 – São Paulo, página 310

## O Elo Matemática-Esporte



Arremesso de dardo.

No arremesso de dardo, uma das modalidades do atletismo, quanto mais distante se lança, melhor! De acordo com a Cinemática, o objeto lançado atinge a maior distância horizontal quando o atleta o arremessa a  $45^\circ$  em relação ao plano horizontal.

A propósito, sendo a expressão para o cálculo de tal distância:

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$$

$$\begin{cases} v_0 = \text{velocidade inicial} \\ \theta = \text{ângulo de lançamento} \\ g = \text{aceleração gravitacional} \end{cases}$$

por que  $\theta$  deve ser igual a  $45^\circ$  para que  $x$  seja o máximo possível?

O professor pode relembrar a amplitude do seno, mostrar a relação e questionar os alunos sobre a resolução. É importante deixá-los pensar, pois eles já trabalharam e analisaram questões similares.

## **INVESTIGANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS USANDO O WINPLOT(LINUX)**

- Habilidade: Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função trigonométrica
- Recursos educacionais utilizados: Folha de atividades, lápis, computadores com winplot(Linux).
- Organização da turma: Em dupla.
- Objetivos: Explorar variações de parâmetros em funções trigonométricas. Identificar e/ou localizar e descrever as propriedades da função trigonométrica de acordo com a sua representação gráfica. Construir o gráfico da função trigonométrica utilizando o winplot(Linux) seguindo o roteiro de construção.
- Cuidados especiais: Agendar o uso do laboratório de informática.
- Avaliando: Participação nas atividades, se interage com o colega integrando-o na realização da atividade, se identifica o gráfico de uma função trigonométrica, se diferencia gráfico de função trigonométrica de acordo com a função, se determina na transformação do gráfico sugerida alteração no período, amplitude, domínio e imagem.

Metodologia adotada: Os alunos serão dispostos em dupla para a realização da atividade de observação, análise e relato usando o winplot (Linux), eles usarão um roteiro de atividade contendo o passos da construção do gráfico da função trigonométrica, elaborada pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Novas Tecnologias que tem semelhança com a abordagem proposta no roteiro de ação do roteiro de ação 4 do Geogebra disponibilizado um curso de aperfeiçoamento do CEDERJ/ SEEDUC 4 bimestre de 2012 . Nessa atividade os alunos poderão investigar os gráficos das funções trigonométricas de acordo com os coeficientes da função, atribuindo valores para construir o gráfico e deverão anotar suas observações de cada um deles separadamente na folha de atividade. Logo a seguir, eles farão a análise das modificações e irão comparar para relatar na folha de atividade. Durante a atividade ficarão dando assistência durante as construções o professor e o profissional responsável pelo laboratório.

## ATIVIDADE NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

### EXPLORANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Atividades utilizando o software Winplot.

I – Primeiro contato com o software Winplot

1. Após abrir o software, clique em Janela -> 2-dim.
2. Na janela que se abrir, clique em Equa ->  $y = f(x)$  ...
3. Na janela que se abrir, digite a expressão de uma função qualquer no espaço após  $f(x) =$  e clique em OK.

II – Explorando funções trigonométricas

1. Desenhe o gráfico de  $y = f(x) = \sin(x)$ . No winplot,  $\sin(x)$  escreve-se como  $\sin(x)$ .
2. Explore os gráficos de funções da forma  $y = f(x) = a + \sin(x)$ , variando a constante  $a$ , em uma mesma tela. Discuta o que acontece com as funções exploradas no exercício quando vocês variaram a constante  $a$ .
3. Explore os gráficos de funções da forma  $y = f(x) = b\sin(x)$ , variando a constante  $b$ , em uma mesma tela. Discuta o que acontece com as funções exploradas no exercício quando vocês variaram a constante  $b$ .
4. Explore os gráficos de funções da forma  $y = f(x) = \sin(cx)$ , variando a constante  $c$ , em uma mesma tela. Discuta o que acontece com as funções exploradas no exercício quando vocês variaram a constante  $c$ .
5. Explore os gráficos de funções da forma  $y = f(x) = \sin(x+d)$ , variando a constante  $d$ , em uma mesma tela. Discuta o que acontece com as funções exploradas no exercício quando vocês variaram a constante  $d$ .
6. Discuta o que acontece com os gráficos de funções da forma  $y = f(x) = a + b\sin(cx+d)$ , na qual  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  são constantes.
7. Vocês acham que as mesmas alterações seriam observadas para os gráficos de  $y = f(x) = \cos(x)$  e  $y = f(x) = \tan(x)$ ? Por quê?

III – Explorando propriedades de funções trigonométricas

1. Desenhe o gráfico de  $y = f(x) = \tan(x)$ .
2. Sabendo que  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , escreva  $y = f(x) = \tan(x)$  apenas em função de  $\sin(x)$ . Lembre-se  $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ .
3. Desenhe o gráfico da função encontrada.
4. Há diferenças entre os dois gráficos? Por quê?
5. Tente o mesmo tipo de manipulação para outras funções trigonométricas, como  $y = f(x) = \sec(x)$ ,  $y = f(x) = \csc(x)$  e  $y = f(x) = \cot(x)$ . Discuta os resultados obtidos.

Fonte: [www.mat.ufmg.br/gepemnt](http://www.mat.ufmg.br/gepemnt) acesso em 15/11/2012

Os alunos dessa vez leram o roteiro e começaram a experimentar as funções no winplot. Houve tempo de cada um da dupla fazer os gráficos. À medida que construía o gráfico, eles registravam suas observações. Como o programa mostra as funções seno e cosseno de modo contínuo, houve dificuldade em diferenciá-los, então foi sugerido que as duplas observassem os valores dos pontos do gráfico e consultassem a tabela construída por eles, assim eles puderam diferenciá-los e continuar analisando. Na construção das inversas os alunos puderam observá-las no mesmo plano que as funções seno, cosse e tangente respectivamente. Determinaram o domínio, conjunto imagem, período e amplitude. Os termos estreito, largo, subir e descer foram

substituídos por translações verticais ou horizontais, expansões ou contrações verticais ou horizontais, reflexão em relação a um dos eixos, conforme o roteiro de ação 5.

## ATIVIDADE 7

- Habilidades: Identificar num texto informativo ou numa composição textual a Matemática e as práticas sociais.
- Pré-Requisitos: funções trigonométricas, equações trigonométricas.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: roteiro de ação: A magia do som pesquisa, folha de orientações sobre a pesquisa, TV e Dvd.
- Cuidados especiais: Solicitar a xerox do texto ao colégio com antecedência de 48 horas.
- Organização da turma: em grupos de 4 alunos.
- Objetivos: Motivar o aluno para que participe da construção do conceito possibilitando ao mesmo resolver as atividades com mais autonomia. Compreender a importância da matemática para entender os riscos à audição se exposto a sons muito altos e constantes, a importância da leitura e interpretação de texto no estudo da matemática, saber expressar matematicamente usando a função trigonométrica de uma situação problema justificando o seu estudo, determinar amplitude, reconhecer e identificar o gráfico da função trigonométrica seno.
- Avaliando: Resolução das atividades propostas, participação ativa nas discussões do grupo, as contribuições dadas, o reconhecimento da importância do estudo das funções trigonométricas, a interpretação correta das questões envolvidas no texto base: Magia do Som e nas atividades.
- Metodologia adotada: O texto e suas implicações vão auxiliar o reconhecimento e importância da Matemática para sua melhor compreensão, a escolha do assunto é pertinente visto que os jovens fazem uso de som de ouvidos por várias horas por dia e frequentam ambientes onde se ouve música muito alta por longos períodos de tempo, além de se informar e estabelecer relações interdisciplinares com a Física (Acústica). A interpretação do texto vai ampliar a discussão e deixar o aluno envolvido na participação e resolução das atividades propostas em grupo.

**Será disponibilizado para cada aluno o texto base: A magia do som. E serão propostas as atividades abaixo.**

1) Responda às questões de acordo com o texto A magia do som.

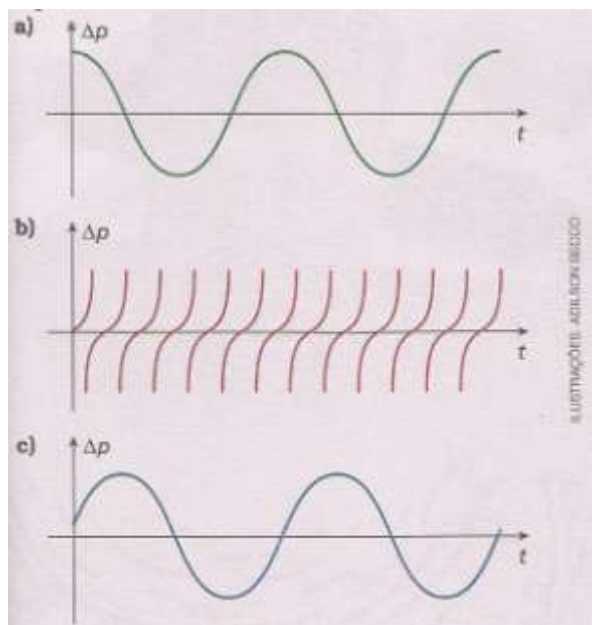
a) O que é som?

b) O que gera o som?

c) Para qual intervalo de variação de pressão o som é audível para o ser humano ?



2. Uma onda sonora pode ser representada por um gráfico bidimensional, em que o eixo horizontal representa a passagem do tempo ( $t$ ) e o vertical representa variação de pressão ( $\Delta p$ ) em determinado ponto do meio. Escreva qual dos gráficos melhor representa um som senoidal:



3. Sabendo que a variação da pressão de uma onda sonora é dada por  $\Delta p = 1,48 \sin(1,07\pi x - 334\pi t)$ , em que  $x$  está expresso em metro,  $t$  em segundo e  $\Delta p$  em pascal, determinem a variação máxima (ou amplitude) de pressão.

4. Leiam o texto a seguir e respondam às questões.

[...] Com o passar do tempo, uma pessoa exposta diariamente a sons muito altos pode ter a audição comprometida. [...]

Sons e vibrações que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis ou perturbar as pessoas é o que se chama de poluição sonora. Apesar das leis e das políticas públicas para controlar o problema e dos alertas feitos por especialistas, a poluição sonora ainda não sensibiliza tanto como a do ar ou a da água.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o limite suportável para o ouvido humano é 65 decibéis\*. Acima disso, o organismo começa a sofrer. [...]

A longo prazo, o ruído excessivo pode causar gastrite, insônia, aumento do nível de colesterol, distúrbios psíquicos e perda da audição. Provoca ainda irritabilidade, ansiedade, excitação, desconforto, medo e tensão.

[...]

Fonte: JOVER, Ana. Cuidado! Barulho demais faz mal à saúde. *Nova Escola*, São Paulo, n. 179, p. 28 e 29, jan./fev. 2005.

- a) Com base no texto acima e no infográfico abaixo, cite alguns exemplos de situações que podem gerar sons muito altos e nocivos à saúde.
- b) Algum de vocês já sofreu danos causados por ruído excessivo? Quais foram os sintomas?
- c) Na opinião de vocês, quais medidas podem amenizar a poluição sonora?

\* decibel (dB): unidade de medida usada quando se determina o nível de intensidade sonora de uma fonte.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- EDITORA MODERNA. Conexões com a Matemática/Editora responsável Juliane Matsubara Barroso, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1 ed. . São Paulo: Moderna, 2010. v 1 e v2.
- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 4 ed. Reformulada. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 2. 304, 305, 310 439, 440, 441, 442 p.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único.1 ed. São Paulo: Ática, 2009.
- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática: uma nova abordagem. 1 ed. São Paulo: FTD, 2000. v1: versão trigonometria.
- BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Matemática,1 ed. São Paulo: Ática, 2004.v 2. 20,52 p.
- PROJETO SEEDUC. Fundação CECIERJ. Consórcio CEDEJ. Extensão. Roteiro de Ação: A Magia do Som, Roteiro de Ação 1 e 5. Curso de Aperfeiçoamento 1º ano do Ensino Médio 3º bimestre/2012. Rio de Janeiro, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PDE/GESTAR II – Programa Gestão da Aprendizagem Escolar : Matemática – Matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. TP6, caderno teoria e prática. Brasília: MEC/Semtec, 2008. 191, 192,193,194,195,196,197,198p.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- FUNDAÇÃO CECIERJ. Consórcio CEDEJ. Extensão. Cursos de Atualização. Curso de Álgebra e Curso de Geometria. 1 semestre 2012. Rio de Janeiro, 2012.  
<http://extensao.cecierj.edu.br/saladeaula/> acesso entre os dias 20/09/2012 a 31/10/2012.
- <http://sosriodosbrasil.blogspot.com.br/2011/03/aniversario-do-blog-e-noticia-no-site.html>  
acesso em 13/10/2012
- <http://www.experimentum.org/blog/?p=1237> acesso em 10/10/2012
- <http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf>, acesso em 10/10/2012
- <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf>, acesso em 26/10/2012.
- <http://www.cdcc.usp.br/cda/ensino-fundamental-astronomia/parte1a.html> acesso em 25/10/2012)
- <http://www.qir.com.br/?p=5924> acesso em 26/10/2012.
- <http://www.acemprol.com/a-maior-roda-gigante-do-mundo-t4907.html>, acesso em 28/10/2012
- <http://www.ceset.unicamp.br/~leobravo/TT%20305/O%20Osciloscopio.pdf>, acesso em 10/11/2012
- [www.mat.ufmg.br/gepemnt](http://www.mat.ufmg.br/gepemnt) acesso em 15/11/2012 -Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Novas Tecnologias , GEPEMNT.  
[http://telecom.inescn.pt/research/audio/cienciaviva/principio\\_audicao.html#aux\\_anchor](http://telecom.inescn.pt/research/audio/cienciaviva/principio_audicao.html#aux_anchor) acesso em 12/11/2012

- <http://poetaeliasakhenaton.blogspot.com.br/2011/03/o-poeta-e-um-lavrador.html#.ULKJkOQ0V8E>  
acesso em 22/11/2012