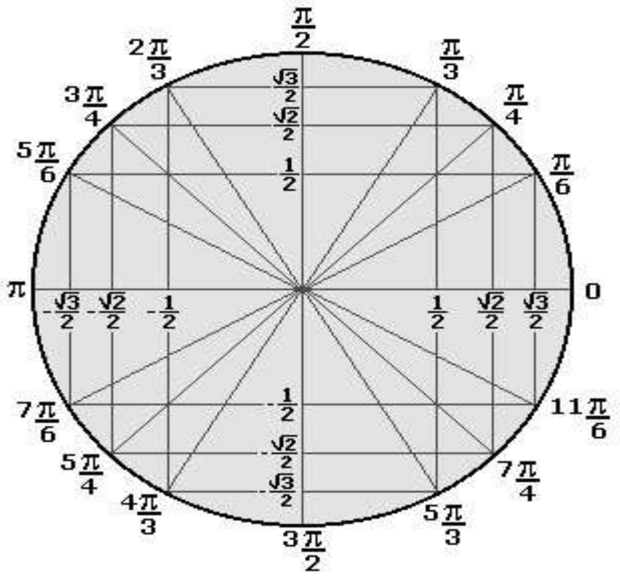
Formação Continuada em Matemática
Formação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho:
Trigonometria na Circunferência.



Tarefa 2
Cursista: Eloisa Elena Renó Grilo
Tutor: Lezieti Cubeiro da Costa

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

- O objetivo deste plano de trabalho é permitir aos alunos a conhecer os conceitos trigonométricos e suas aplicações, destacando o estudo de fenômenos periódicos tais como: movimento ondulatório, movimento dos planetas em torno do sol, oscilação de um pêndulo..

- Faremos nossos estudos buscando situações-problemas do cotidiano, incentivando nossos alunos a construírem o conhecimento a partir deles mesmos.
- Serão necessários oito tempos de cinquenta minutos para conclusão do plano de trabalho do desenvolvimento do conteúdo e avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1:

Habilidade relacionada: Transformar grau em radiano ou vice-versa (H21)

Pré-requisitos: Conceito de arcos, ângulos e circunferência

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos educacionais utilizados: Livro didático adotado pela escola e lousa

Organização da turma: individual

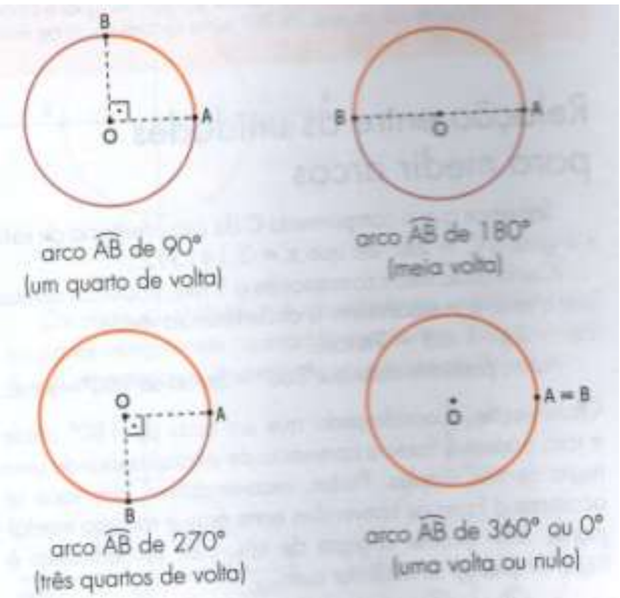
Objetivos: Conhecer unidades para medir arcos de circunferência e converter graus em radianos, e vice-versa.

Metadologia adotada: Abordar os seguintes tópicos

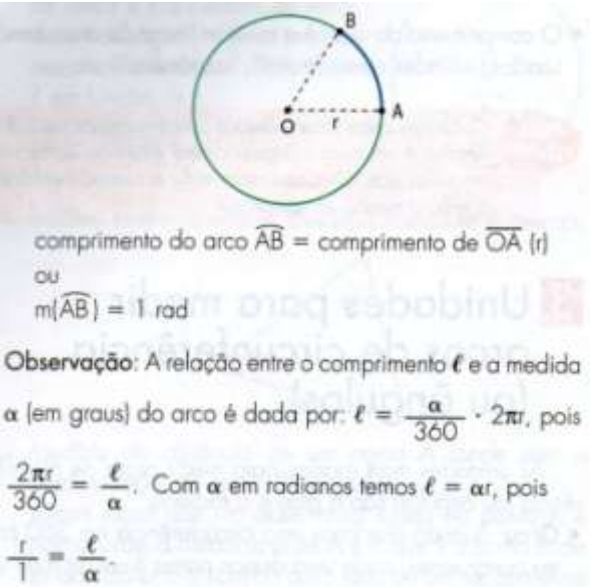
Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)

As unidades mais usadas para medir arcos de circunferência (ou ângulos) são o grau e o radiano.

•**Grau**: quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°). Considere o arco AB, que vai de **A** para **B** no sentido anti-horário.



•**Radiano**: Um arco de um radiano (1 rad)é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência. Isso deve ser interpretado da seguinte forma: se temos um ângulo central de medida 1 radiano, então ele subtende um arco de medida 1 radiano (lembre-se que a medida do arco é igual à medida do ângulo central) e comprimento de 1 raio. Se temos um ângulo central de medida 2 radianos, então ele subtende um arco de medida 2 radianos e comprimento de 2 raios. Se temos um ângulo central de medida α radianos, então ele subtende um arco de medida α radianos e comprimento de α **r**aios. Assim**, L = αr** se a medida α do arco for dada em radianos.



comprimento do arco $\widehat{AB}$ = comprimento de $\overline{OA}$ (r)
ou
m($\widehat{AB}$) = 1 rad

Observação: A relação entre o comprimento ℓ e a medida α (em graus) do arco é dada por: $\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, pois $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\ell}{\alpha}$. Com α em radianos temos $\ell = \alpha r$, pois $\frac{r}{1} = \frac{\ell}{\alpha}$.

Relação entre as unidades para medir arcos

Sabemos que o comprimento C da circunferência de raio r é igual a C=2πr, em que π = 3,141592...

Como cada raio r corresponde a 1 rad, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi r = 2\pi.1rad = 2\pi rad$

Assim, podemos dizer que 360°= $2\pi rad$ ou 180°=πrad

Observação: Considerando que um arco de 180° mede πrad, podemos fazer a conversão de unidades usando uma regra de três simples. Porém, recomendamos que você se acostume a fazer as conversões entre grau e radiano mentalmente, sem recorrer à regra de três. Esse procedimento é muito simples se se observar que:

- $90°$ é $\frac{1}{2}$ de $180°$; logo, é $\frac{1}{2}$ de π rad $\rightarrow 90° = \frac{\pi}{2}$ rad
- $30°$ é $\frac{1}{6}$ de $180°$; logo, é $\frac{1}{6}$ de π rad $\rightarrow 30° = \frac{\pi}{6}$ rad
- $60°$ é $\frac{1}{3}$ de $180°$; logo, é $\frac{1}{3}$ de π rad $\rightarrow 60° = \frac{\pi}{3}$ rad
- $45°$ é $\frac{1}{4}$ de $180°$; logo, é $\frac{1}{4}$ de π rad $\rightarrow 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

Exercícios de fixação:

-Utilizar exercícios do livro didático para fixação da conversão de graus para radianos e para graus.

-Utilização de questões de Saerjinhos anteriores.

Atividade 2

<u>Habilidade relacionada:</u> Introduzir a trigonometria no círculo

<u>Pré- requisitos:</u> Conhecimento de *sen, cos*, e *tg* extraídos do triângulo retângulo.

<u>Tempo de duração:</u> 100 minutos

<u>Recursos educacionais utilizados:</u> vídeos sobre fenômenos periódicos.

<u>Organização da turma:</u> Em círculo

<u>Objetivos:</u> Iniciar o estudo da trigonometria no círculo

<u>Metodologia adotada:</u>

Apresentar o vídeo para a turma com o objetivo de informar sobre os fenômenos periódicos (Aplicação na medicina: ciclo menstrual das mulheres; fenômenos das marés; as fases da lua,etc.).

Discutir com os alunos o vídeo.

Vocês podem enriquecer com mais algum exemplo de fenômeno periódico?

Após isso, abordar os tópicos descritos abaixo.

Estudaremos a trigonometria, tal qual ela apareceu há milhares de anos, com o objetivo de resolver triângulos. Agora vamos fazer um estudo mais abrangente de seno, cosseno e tangente, uma necessidade mais recente da Matemática. Nesse novo contexto, o triângulo retângulo é insuficiente para as definições necessárias e temos a necessidade de definir um novo “ambiente” para a trigonometria: a circunferência unitária ou círculo unitário (também chamado circunferência trigonométrica).

Veremos agora conceitos necessários para esse novo estudo.

Vamos recordar alguns conceitos já conhecidos da geometria plana:

• Arco geométrico: É uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive. Se os dois pontos coincidirem, teremos um ângulo nulo ou arco de uma volta.

•Arco e ângulo central: Todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

•Comprimento da circunferência de raio r: $C=2\pi r$.

•Comprimento e medida de arco: A medida de um arco é a medida do ângulo central que o subtende, independentemente do raio da circunferência que contém o arco. Usam-se geralmente unidades como o grau e o radiano para medir arcos.

•O comprimento do arco é a medida linear do arco, sendo usadas unidades como “metro”, “centímetro”, etc.

Nesse momento, não haverá exercícios e sim uma discussão sobre os vídeos e a introdução do conteúdo.

Atividade 3

<u>Habilidade relacionada:</u> Determinar o Comprimento de arco

<u>Pré-requisitos:</u> diferenciar raio de diâmetro e conhecer unidades de medidas (radianos)

<u>Tempo de duração:</u> 100 minutos

<u>Recursos educacionais utilizados:</u> Livro didático adotado pela escola e lousa

<u>Organização da turma:</u> individual

<u>Objetivos:</u> Fazer um breve comentário sobre o surgimento da Trigonometria e calcular o comprimento de arco

<u>Metodologia adotada:</u> *Iniciar com a poesia "Pôr do sol".*

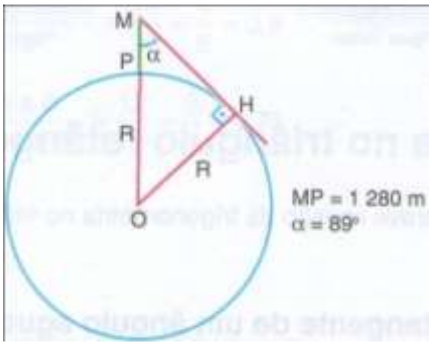
Abordar os seguintes assuntos:

Qual é o raio médio aproximado da Terra? Essa questão deixava curiosos e intrigados os matemáticos e astrônomos da antiguidade.

Uma solução interessante foi imaginada na Grécia Antiga. A ideia era obter essa distância, absolutamente inacessível, a partir de distâncias e ângulos que pudessem ser medidos diretamente.

Na época, eles não tinham instrumentos muitos precisos, principalmente para medir ângulos. Mesmo assim, acharam aproximações razoáveis para a medida do raio da Terra. Veja um procedimento que eles imaginaram.

Uma pessoa sobe no alto de um morro próximo ao mar, de onde ela possa ver a linha do horizonte.



Na figura anterior, supomos a Terra esférica. Veja o que representam os vários pontos e segmentos.

O→Centro da Terra

H→Linha do horizonte

P→Pé do morro

M→Alto do morro

PM→Altura do morro

OP e OH→Raios da Terra, de medida R

Pode-se obter, com facilidade, a altura PM do morro. Além disso, há instrumentos que ajudam a medir o ângulo **α.** Ele é o ângulo de visão da linha do horizonte, em relação à altura do morro. Sabemos, também, da geometria plana, que o ângulo H é reto.

Como poderíamos, a partir desses dados, obter o raio da Terra? É aí que surge um dos ramos mais fascinantes da matemática: A trigonometria.

A palavra **trigonometria** vem do grego. É a junção de trigon(=triângulo) e metron(=medida).

A trigonometria tem suas raízes na Astronomia. O astrônomo grego Hiparco de Nicéia costuma ser considerado seu fundador. Ele viveu por volta do ano 120 a.C.

Hiparco foi o primeiro a determinar, com alguma precisão, o nascer e o ocaso de várias estrelas. Para isso, elaborou tabelas relacionando comprimentos de arcos e cordas em circunferência.

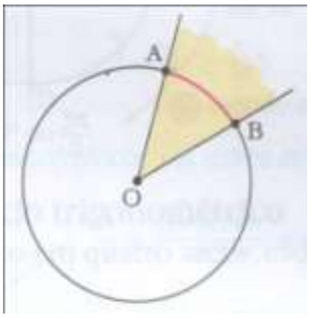
Mais tarde, por volta de 150 a.C., a trigonometria grega atingiu seu apogeu. Foi quando Ptolomeu, a partir das teorias de Hiparco, publicou o trabalho denominado *A Sintaxe Matemática,* também conhecido como Alma gesto. Nesse trabalho, Ptolomeu defendia a teoria geocêntrica. Segundo ele, a Terra seria o centro do sistema solar.

As teorias de Ptolomeu perduraram até o século XV, quando Nicolau Copérnico lançou a teoria heliocêntrica, que considerava o Sol como centro. Nesse momento, a necessidade de refazer os cálculos da astronomia posicional levou a importantes avanços nos estudos de trigonometria.

Entre o final do século XVI e o início do século XVII, os estudos de Galileu, Descartes e Fermat ampliaram os conceitos trigonométricos. Seu uso passou a ser de grande importância no estudo de certas funções, principalmente aquelas que representam fenômenos periódicos.

Abordar também: Comprimento de arco

Considerado uma circunferência com centro O e raio medindo *r,* um ângulo central AOB de medida γ, em radianos, e o correspondente arco AB contido nesse ângulo, podemos estabelecer a seguinte regra de três:



r___1

$med\ (AB)$___γ

$$\frac{r}{med\ AB} = \frac{1}{\gamma}$$

$$r.\gamma = \text{med (AB)}.1$$

$$\gamma = \frac{\text{med AB}}{\text{r}} \text{ ou med AB} = \gamma.\text{r}$$

A medida do ângulo central AOB=γ, em radianos é determinada pelo quociente entre o comprimento do arco AB e a medida do raio da circunferência que o contém.

Exemplo:

Para determinar, em radianos, a medida do arco AB de comprimento 20 cm contido numa circunferência de diâmetro 20 cm, fazemos:

$$r = \frac{diâmetro}{2} = \frac{20\ cm}{2} = 10cm$$

Logo, a medida de γ, em radianos, é obtida por:

$$\gamma = \frac{\text{med arcAB}}{\text{r}} => \ \gamma = \frac{\text{20cm}}{\text{10cm}} => \ \gamma = \text{2rad}$$

Exercícios de fixação:

-Utilizar exercícios do livro didático para calcular o comprimento de arco.

-Utilização de questões de Saerjinhos anteriores.

AVALIAÇÃO

- Durante o processo de ensino-aprendizagem o aluno será avaliado através das atividades propostas, da argumentação e participação.
- Será feita aplicação de avaliação individual escrita com o objetivo de sondar a utilização de conteúdos aprendidos, sendo avaliado também leitura e interpretação de problemas.
- Diagnóstica (auto-avaliação) para sondar falhas durante a aprendizagem levando assim a aperfeiçoá-la.
- Será através de exercícios de vestibulares retirados do livro didático.
- Resolução das questões dos saerjinhos anteriores.

Avaliação da implementação do plano de trabalho

Pontos positivos

- Os vídeos mostrados atraíram os alunos, levando-os a ter mais interesse em participar das aulas de Matemática. Eles gostaram muito da ilustração da bicicleta (postada por uma colega), do ciclo das marés, ciclo menstrual, etc... Não imaginavam que esses assuntos poderiam estar ligados a Matemática.

- A discussão propiciou o enriquecimento dos alunos e do professor, na medida que fui apenas uma mediadora do processo.

Pontos negativos

- A falta de um laboratório de informática e um projetor.

Alterações

Acrescentaria a poesia “Pôr do sol” proposta no roteiro de ação 1, pois acho que os alunos iriam se interessar mais ainda pelo assunto, além de descontrair um pouco.

Impressões dos alunos

Os alunos participaram e falavam:

-Quando você vai trazer outro vídeo desse professora?

- Onde a gente consegue esses vídeos para vermos em casa?

- Nunca ia imaginar que esses assuntos (ciclo menstrual...) teriam algo a ver com Matemática!

Enfim, os alunos participaram com motivação de todas as atividades propostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1) SILVA, C.X. ; FILHO, B.B. Matemática aula por aula. São Paulo: FTD, 2003.
2) DANTE, L.R. Matemática: Contextos e aplicações: São Paulo: Ática, 2011.
3) GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R.; JR, R.G. Matemática fundamental: Uma nova abordagem. São Paulo: FTD.
4) Pesquisa ao site:

www.profgarcia.xpg.com.br/avaliações_praticas_da_trigonometria, acessado em 20/11/2012

www.brasilescola.com/matemática/comportamento_um_arco, acessado em 20/11/2012