

**FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
CECERJ / SEEDUC – RJ**

PLANO DE TRABALHO

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

**MATEMÁTICA – 1º ANO E.M.
4º BIMESTRE / 2012**

Cursista: LUCIENE CHIAPINI PEREIRA

Matrícula(SEEDUC): 283746-6

Colégio: E. João Maurício Brum

**Tutora: Lezieti Cubeiro da Costa
Grupo 4**



Introdução

A trigonometria é a parte da matemática que analisa a relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nela se baseia o estudo das funções trigonométricas relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos.

A aplicação da trigonometria se estende a vários campos do conhecimento, como: astronomia, meteorologia, eletricidade, mecânica, música, engenharia, economia, acústica, medicina, biologia, etc. Muitos desses campos de grande interesse do aluno.

Neste Plano de Trabalho, vamos estender o conceito de seno, cosseno e tangente em sua representação no ciclo trigonométrico que é um círculo cujo centro está localizado na origem do plano cartesiano com raio medindo 1. A partir do círculo unitário é possível deduzir várias identidades trigonométricas.

Depois, vamos, com o auxílio do software Geogebra e dos roteiros de ação, construir o gráfico da função seno e da função cosseno e analisá-los.

Este Plano de Trabalho será implementado em 7 aulas de 50 minutos.

Desenvolvimento

1ª Atividade – Encontrando seno, cosseno e tangente de arcos múltiplos de 30° e 45° .

Tempo de Duração: três aulas (150 minutos).

Recursos Educacionais Utilizados: computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, folha xerocada com o resumo das atividades.

Organização da Turma: duplas

Objetivos:

Representar seno, cosseno e tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.

Representar seno, cosseno e tangente dos arcos de 30° , 45° e seus múltiplos.

Metodologia:

Faremos a construção da circunferência trigonométrica no Geogebra.

Passos para a construção

01) Com a tela do Geogebra aberta, construa uma circunferência trigonométrica de centro na origem (A) e passando pelo ponto B(1,0), utilizando a ferramenta “*círculo dados centro e um de seus pontos*” (6º menu de botões).

02) Mude a cor da circunferência traçada para rosa, clicando com o botão direito do mouse sobre a circunferência, selecionando a opção Propriedades-Cor.

03) Marque um ponto C qualquer sobre a circunferência e que pertença ao primeiro quadrante, utilizando a ferramenta “*novo ponto*” (2º menu de botões).

04) Oculte o rótulo do ponto C, clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto e desmarcando a opção *exibir rótulo*.

05) Insira o seguinte texto (10º menu de botões) na área de trabalho: “ $C=$ ”+C.

06) Posicione o texto anterior (coordenadas do ponto C), próximo ao ponto C, clicando com o botão direito do mouse sobre o texto, selecionando a opção Propriedades-Posição-Origem: C.

07) Trace a reta perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto B, para isso utilizar a ferramenta “*reta perpendicular*” (4º menu de botões).

08) Encontre o ponto de interseção (D) entre a reta perpendicular anterior e o eixo x , utilizando a ferramenta “*interseção de dois objetos*” (2º menu de botões).

09) Oculte a reta perpendicular traçada no passo 7, clicando no círculo ao lado da equação dessa reta na janela algébrica.

10) Trace o segmento de reta definido pelo ponto C e pelo ponto D encontrado anteriormente, utilizando a ferramenta “*segmento definido por dois pontos*” (3º menu de botões).

11) Traceje o segmento CD, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, selecionando a opção Propriedades-Estilo.

12) Oculte o seu rótulo, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, desmarcando a opção *exibir rótulo*.

13) Trace a reta perpendicular ao eixo y que passa pelo ponto C, para isso use a ferramenta “*reta perpendicular*” (4º menu de botões).

14) Encontre o ponto de interseção (E) entre a reta perpendicular traçada anteriormente e o eixo y , utilizando a ferramenta “*interseção de dois objetos*” (2º menu de botões).

15) Oculte a reta perpendicular traçada no passo 13, traçando no círculo ao lado da equação dessa reta na janela algébrica.

16) Trace o segmento de reta definido pelos pontos C e E, utilizando a ferramenta “*segmento definido por dois pontos*” (3º menu de botões).

17) Traceje o segmento CE, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, selecionando a opção Propriedades-Estilo.

18) Oculte o seu rótulo, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, desmarcando a opção *exibir rótulo*.

19) Trace o segmento definido pelos pontos A e C e oculte o seu rótulo.

20) Trace o segmento AD, oculte seu rótulo e mude sua cor para azul e sua espessura para cinco.

21) Determine o comprimento do segmento AD, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.

22) Trace o segmento AE, oculte seu rótulo e mude sua cor para vermelho e sua espessura para cinco.

- 23) Determine o comprimento de AE, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.
- 24) Trace o ângulo BAC, através da ferramenta “*ângulo*” (8º menu de botões).
- 25) Insira o seguinte texto (10º menu de botões) na área de trabalho: “ $\alpha = \alpha$ ”
- 26) Mude a cor do texto anterior para verde escuro.
- 27) Trace a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto B.
- 28) Trace a reta que passa pelo centro da circunferência e pelo ponto C, utilizando a ferramenta “*reta definida por dois pontos*” (3º menu de botões).
- 29) Traceje a reta anterior.
- 30) Marque o ponto de interseção (F) entre a reta que passa pelos pontos A e C (traçada no passo 28) e a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto B (traçada no passo 27).
- 31) Trace o segmento definido pelos pontos B e F, mude sua cor para verde e espessura para cinco.
- 32) Determine o comprimento do segmento anterior, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.
- 33) Amplie o desenho usando 12º menu de botões.

Circunferência feita, vamos trabalhar com ela: movimentado “C”, alteramos o valor do arco. Inicialmente, peguei para observação, nas atividades xerocadas, os ângulos de 30°, 45° e 60°, mas pedirei aos alunos para observarem alguns outros ângulos do 1º quadrante e verificarem seu seno, cosseno e tangente (sen/cos). Os alunos, nessa atividade, deverão identificar as funções nos segmentos assinalados.

Atividades baseadas na construção feita

- 1) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter $\widehat{D\hat{A}C}$ 45°. O raio da circunferência que você traçou é 1. Qual é o seno do ângulo $\widehat{D\hat{A}C}$ (observe no gráfico)?

- 2) Qual é o co-seno? _____
- 3) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}45^\circ}{\text{cos}45^\circ}$? _____
- 4) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo $\widehat{D\hat{A}C}$ é 45°? _____
- 5) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter $\widehat{D\hat{A}C}$ 30°. Qual é o seno do ângulo $\widehat{D\hat{A}C}$ (observe no gráfico)? _____
- 6) Qual é o co-seno? _____
- 7) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}30^\circ}{\text{cos}30^\circ}$? _____
- 8) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo $\widehat{D\hat{A}C}$ é 30°? _____

- 9) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter DÂC 60°. Qual é o seno do ângulo DÂC (observe no gráfico)? _____
- 10) Qual é o co-seno? _____
- 11) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}60^\circ}{\text{cos}60^\circ}$? _____
- 12) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo DÂC é 60°? _____

Você já observou que o seno é definido no eixo y e o co-seno, no eixo x. A tangente é definida na reta perpendicular ao eixo x, passando pela origem da circunferência trigonométrica. Agora, observando os arcos que você formará na construção feita, encontre o seno, o cosseno e a tangente (observe com atenção, de acordo com a localização do arco no quadrante, os sinais das funções pedidas)

- | | | |
|----------------------|------------------|-----------------|
| 01) sen 0° = _____ | cos 0° = _____ | tg 0° = _____ |
| 02) sen 90° = _____ | cos 90° = _____ | tg 90° = _____ |
| 03) sen 120° = _____ | cos 120° = _____ | tg 120° = _____ |
| 04) sen 135° = _____ | cos 135° = _____ | tg 135° = _____ |
| 05) sen 150° = _____ | cos 150° = _____ | tg 150° = _____ |
| 06) sen 180° = _____ | cos 180° = _____ | tg 180° = _____ |
| 07) sen 210° = _____ | cos 210° = _____ | tg 210° = _____ |
| 08) sen 225° = _____ | cos 225° = _____ | tg 225° = _____ |
| 09) sen 240° = _____ | cos 240° = _____ | tg 240° = _____ |
| 10) sen 270° = _____ | cos 270° = _____ | tg 270° = _____ |
| 11) sen 300° = _____ | cos 300° = _____ | tg 300° = _____ |
| 12) sen 315° = _____ | cos 315° = _____ | tg 315° = _____ |
| 13) sen 330° = _____ | cos 330° = _____ | tg 330° = _____ |
| 14) sen 360° = _____ | cos 360° = _____ | tg 360° = _____ |

Nessa atividade, os alunos manusearão a construção feita e observarão, a cada arco encontrado, o comportamento das funções trigonométricas. É necessário dar atenção especial às tangentes não definidas de 90° e 270°. **Essas atividades foram xerocadas para que o aluno, observando a construção feita, completasse a sequência (são ângulos múltiplos de 30° e 45°). Depois dessa atividade, outros ângulos sugeridos pelos alunos serão apresentados, e seus múltiplos nos outros três quadrantes serão observados, assim como seus respectivos senos, cossenos e tangentes.**

2ª Atividade – Construindo e analisando o gráfico da função seno

Tempo de Duração: duas aulas (100 minutos)

Recursos Educacionais Utilizados: computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, folha xerocada com o resumo das atividades

Organização da Turma: duplas

Objetivos:

Construir o gráfico da função seno e analisar o sinal da função nos quatro quadrantes, assim como o crescimento e o decrescimento dessa função.

Metodologia:

Vamos construir na tela do Geogebra o gráfico da função seno.

Passos para a construção

1) No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite $O=(0,0)$. O programa marcará o ponto O , origem do sistema de eixos cartesianos.

2) Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique em “*círculo dados centro e raio*” (6º menu de botões) e clique no ponto O . Aberta a caixa de diálogo, digite 1 que é o raio do círculo trigonométrico.

3) Para marcar a origem do ciclo trigonométrico – $A(1,0)$ – vá ao campo de entrada e digite $A = (1,0)$, seguido de “*enter*”.

4) Proceda da mesma maneira para marcar os pontos $B=(-1,0)$, $C=(0,1)$ e $D=(0,-1)$, pontos limites dos quadrantes.

5) Marque o arco AOE , clicando no botão “*arco circular dados centro e dois pontos*” (6º menu de botões) e sequencialmente nos pontos O , A e E , na janela algébrica aparecerá a indicação “ $d=...$ ”, que representa o comprimento do arco AOE .

6) Digite no campo de entrada os pontos $G=(0,\sin(d))$ e $R=(d, \sin(d))$. Surgirão na tela os pontos G e R . O comprimento OG indica o seno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o seno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se. G move-se no intervalo de $[-1,1]$ no eixo y (seno) e R move-se no intervalo de uma volta (2π).

7) Digite agora no campo de entrada, a função $g(x)=\sin(x)$, seguido de “*enter*”.

Construção feita, o que você observou?

1) Descreva a relação entre o comprimento do segmento OG e o ponto R.

2) A abscissa do ponto R é o comprimento do arco AOE. Ao movimentar o ponto E no círculo, que valores a abscissa pode assumir?

3) No intervalo $[0,\pi]$ o seno é positivo ou negativo? _____

4) E no intervalo de $[\pi,2\pi]$ o seno é positivo ou negativo? _____

5) Observe o comportamento da função seno no gráfico e preencha a tabela:

Função seno	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

6) Qual é o arco de uma volta, do ciclo trigonométrico, que apresenta, na função seno,

a) o valor máximo? _____

b) o valor mínimo? _____

3ª Atividade – Construindo e analisando o gráfico da função cosseno

Tempo de Duração: duas aulas (100 minutos)

Recursos Educacionais Utilizados: computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, folha xerocada com o resumo das atividades

Organização da Turma: duplas

Objetivos:

Construir o gráfico da função cosseno e analisar o sinal da função nos quatro quadrantes, assim como o crescimento e o decréscimo dessa função.

Metodologia:

Vamos construir na tela do Geogebra o gráfico da função cosseno.

Passos para a construção

1) No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite $O=(0,0)$. O programa marcará o ponto O , origem do sistema de eixos cartesianos.

2) Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique em “*círculo dados centro e raio*” (6º menu de botões) e clique no ponto O . Aberta a caixa de diálogo, digite 1 que é o raio do círculo trigonométrico.

3) Para marcar a origem do ciclo trigonométrico - $A(1,0)$ – vá ao campo de entrada e digite $A = (1,0)$, seguido de “*enter*”.

4) Proceda da mesma maneira para marcar os pontos $B=(-1,0)$, $C=(0,1)$ e $D=(0,-1)$, pontos limites dos quadrantes.

5) Marque o ponto AOE , clicando no botão “*arco circular dados centro e dois pontos*” (6º menu de botões) e sequencialmente nos pontos O , A e E , na janela algébrica aparecerá a indicação “ $d=...$ ”, que representa o comprimento do arco AOE .

6) Digite no campo de entrada os pontos $H=(\cos(d),0)$ e $S=(d, \cos(d))$. Surgirão na tela os pontos H e S . O comprimento OH indica o cosseno do arco AOE e o ponto S é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o cosseno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe H e S movendo-se. H move-se no intervalo de $[-1,1]$ no eixo x (cosseno) e S move-se no intervalo de uma volta (2π).

7) Digite agora no campo de entrada, a função $h(x)=\cos(x)$, seguido de “*enter*”.

O que você observou?

1) Descreva a relação entre o comprimento do segmento OH e o ponto S .

2) A abscissa do ponto S é o comprimento do arco AOE . Ao movimentar o ponto E no círculo, que valores a abscissa pode assumir?

3) No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ o cosseno é positivo ou negativo? _____

4) Nesse intervalo, quando o percorrermos no sentido decrescente, o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da abscissa de E vão aumentando ou diminuindo? E os respectivos cossenos estão aumentando ou diminuindo?

5) Faça essa mesma análise nos outros três quadrantes. Descreva o que você observou:

6) Observe o comportamento da função cosseno no gráfico que você construiu e preencha a tabela:

Função co-seno	1° Quadrante	2° Quadrante	3° Quadrante	4° Quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

7) Qual é o arco de uma volta, do ciclo trigonométrico, que apresenta, na função co-seno,
a) o valor máximo? _____
b) o valor mínimo? _____

Avaliação

As construções feitas nas aulas e os conceitos adquiridos com base nessas construções serão avaliados nas atividades propostas.

Também, uma avaliação escrita será organizada com base no que foi trabalhado neste Plano, levando em conta principalmente os descritores do Currículo Mínimo: Representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico e identificar gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno (o gráfico da função tangente será trabalhado após a implementação desse plano).

Não só a avaliação da aprendizagem, mas também a avaliação do trabalho deverá ser feita com a turma para correção de possíveis erros.

Referências Bibliográficas

IEZZI, Gelson. et all. *Matemática: Ciência e Aplicações*. V 1. São Paulo: Saraiva, 2010.

PAIVA, Manoel. *Matemática*. V único. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2003.

BARROSO, Juliane Matsubara (org.). *Conexões com a Matemática*. V 1. São Paulo: Moderna, 2010

Roteiros de Ação: Trigonometria na Circunferência. Formação Continuada, projeto SEEDUC/CECERJ, em <http://projetoeduc.cecierj.edu.br> . Rio de Janeiro: 3º bimestre, 2012.

SMOLE, Katia C.Stocco; DINIZ, Maria Ignez de S.Vieira . *Matemática Ensino Médio*. V 1. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.