Plano de Trabalho 2
Matemática 4º Bimestre

Trigonometria na Circunferência

Tutor: Antônio de Almeida Filho

Professora: Marizete Beviláqua Tinte Castellani

Turma: 1001 – 1ª série/ Ensino Médio

Ano: 2012

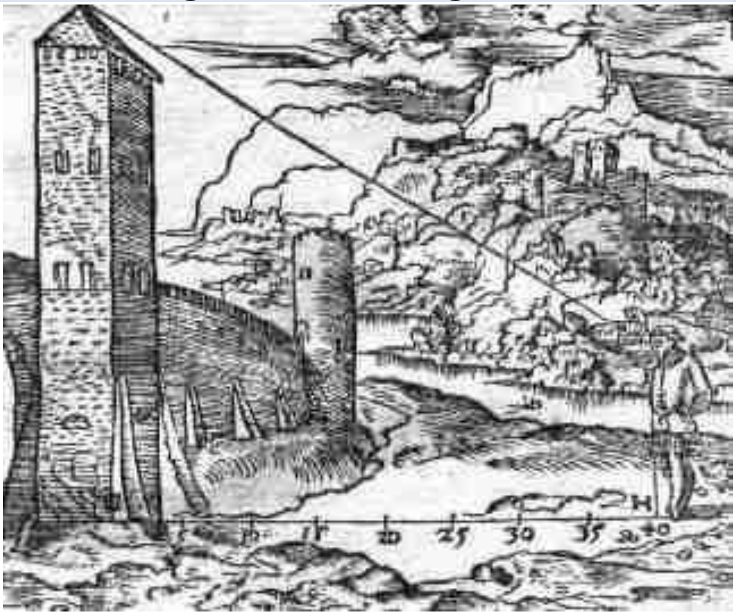
Colégio Estadual “Roberto Silveira”

Tempo para execução: 6 a 8 aulas

Introdução

Ao longo da história, a Matemática evoluiu muito e sofreu muitas modificações desde a antiguidade até os tempos atuais. E o principal responsável por essa evolução foi a transmissão de conhecimentos, que se dá, através do processo ensino-aprendizagem. Porém, "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua própria produção ou a construção." (FREIRE, 1996,p.52).

A trigonometria surgiu há mais de dois mil anos. Tratava inicialmente de



resolver problemas relacionados à astronomia, como, por exemplo, o cálculo de distância entre planetas e determinação de distâncias inacessíveis, ou seja, calcular distâncias que não podem ser medidas de modo convencional. A base teórica na qual se fundamentou originalmente a trigonometria foi a semelhança de triângulos. O astrônomo Hiparco (180-125 a.C.) era um dos astrônomos da antiguidade; trabalhou com triângulos que foram inscritos em círculos. Como ele estava lidando frequentemente com triângulos na esfera divina, foi chamado "o pai da trigonometria".

As sugestões dos roteiros, visando atender os pontos de maior carência na aprendizagem do aluno, sugerem um ensino atrativo, contextualizado e objetivo, possibilitando a estruturação do pensamento lógico e do raciocínio, despertando a curiosidade e o interesse do aluno. E, este plano de ação tem como objetivo, para o conteúdo de "trigonometria na circunferência", criar condições para que os alunos participem do processo de construção dos conceitos básicos. As atividades selecionadas envolvem a interpretação e resolução de alguns problemas práticos do cotidiano. Eles terão, também, a oportunidade de construir um *Teodolito* improvisado e com o auxílio deste instrumento, farão a medição da altura do prédio do Colégio e a altura da árvore existente no pátio da escola. Através dessa atividade, eles poderão verificar a importância que as relações trigonométricas desempenham nas medidas indiretas de distâncias, que neste caso, envolverá o estudo da função tangente.

Desenvolvimento

O roteiro escolhido e adaptado:

- Roteiro de Ação 2 – Falta muito? É

-Objetivos: Introduzir o estudo da função tangente, utilizando a geometria para resolução de uma situação problema que envolva medição;

- Duração prevista: 100 minutos.

- Área de conhecimento: Matemática

- Assunto: Trigonometria

- Pré-requisitos: Geometria do triângulo retângulo;

- Material necessário para construção do medidor de ângulos: Papel cartão; Régua; Transferidor; Tesoura; Calculadora; Canudo; Fita adesiva; Peso (para o fio de prumo); Linha de costura (ou barbante); Fita métrica ou trena.

- Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

- Descritores associados:
H14 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.
H21 – Utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

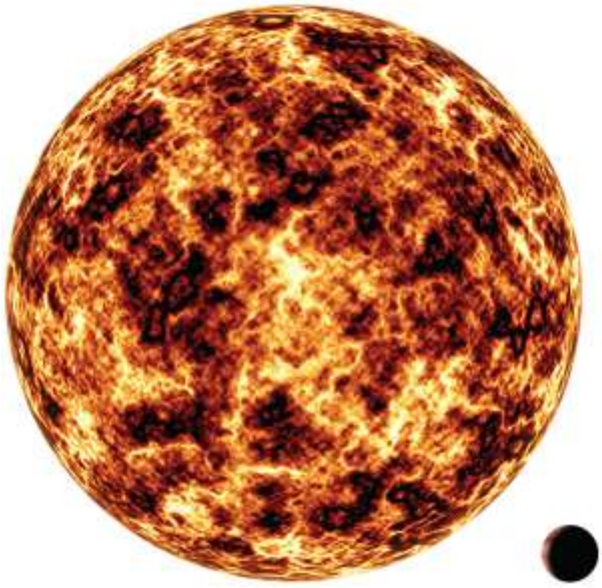
Parte 1 – Abordagem histórica - utilizar a história da matemática, como auxílio para a aprendizagem significativa dos alunos na apropriação da trigonometria. Isso porque no contexto histórico, a trigonometria tem em sua cronologia e em seus termos um significado importante em virtude das transformações que esse conhecimento foi sofrendo ao longo dos tempos para poder despertar o interesse do aluno no sentido de se envolver emocionalmente com a (re)descoberta da trigonometria.

Apresentação de Slides- Montagem sobre o assunto

Parte 2 – *Questionamentos para valorização do conhecimento dos alunos; ter uma ideia sobre o que conhecem sobre instrumentos de medida e motivação para participarem da atividade.*

Você sabe qual é a distância da Terra ao Sol? Como terá sido medida essa distância?

A preocupação em medir distâncias acompanha o homem da antiguidade até os dias de hoje. Calcular pequenas distâncias é um problema de fácil solução. Mas muitos problemas interessantes envolvem a medida de distâncias inacessíveis.



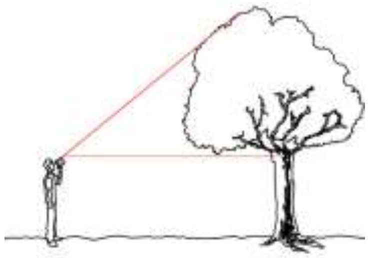
Sejam estas medidas acessíveis ou inacessíveis, praticamente todas, podem ser obtidas com o auxílio da trigonometria. Na essência, o problema que está presente em quase todas as situações é a resolução de um triângulo.
Você seria capaz de fornecer exemplos de instrumentos de medidas?

1. Cite quais grandezas são possíveis de serem medidas com os instrumentos citados?

2. Imagine se o instrumento de medida citado pode ser usado para determinar as seguintes medidas: distância entre dois planetas, espessura de um fio de cabelo, altura do Morro do Pão de Açúcar, distância de uma margem a outra da Baía de Guanabara, largura do rio Paraíba do Sul.

3. Suponha que você deseja saber a distância do planeta Terra ao Sol. Como poderemos fazer isso? Quais são os instrumentos mais adequados? Quais são as dificuldades? Discuta com seus colegas.

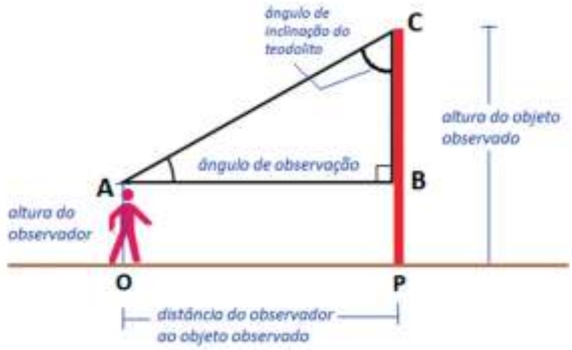
4. Você conhece o teodolito? Para que ele serve?
- Atividade de construção do teodolito improvisado;
- De posse do nosso medidor de ângulos, iremos medir a altura de algo inacessível na escola.
- A altura do prédio da escola;
- A altura da árvore (pé de jaca), localizada no pátio da escola;



5. Posicionar-se a uma distância conhecida do objeto cuja altura você vai determinar (você pode medir antes a distância).

6. Leve o teodolito à altura dos seus olhos e observe qual a menor indicação para a medida do ângulo do barbante no transferidor. Qual foi o ângulo?

7. Use agora os seus conhecimentos sobre razões trigonométricas para determinar a altura do objeto que você observou pelo teodolito. Mas lembre-se: o segmento BC indicado no esquema acima representa apenas uma parte da altura procurada. A altura total será o resultado da soma da medida do segmento BC com a sua própria altura, certo?
Mãos à obra!



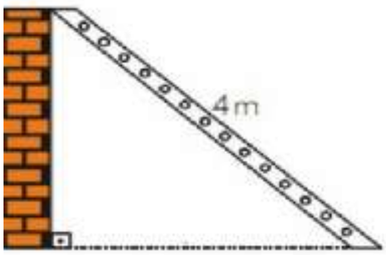
O aluno deverá identificar qual a razão trigonométrica mais adequada para resolver este problema, que no caso é a tangente.

A vivência do experimento é fundamental para que o aluno possa relacionar a utilização das razões trigonométricas com a possibilidade de medir distâncias inalcançáveis. Esclarecer também sobre o desenvolvimento de um instrumento de medida tão amplamente utilizado e que se baseia em uma atividade tão simples também traz mais corpo ao estudo desta área.

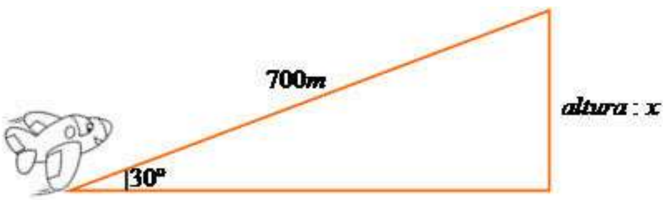
Exercícios de fixação:

1) Jean gostaria de saber a altura total do muro do condomínio onde mora. Ele se lembrou das explicações da professora de Matemática e utilizou um artifício. Sabendo que uma escada media 4m de comprimento, encostou-a no topo do muro e mediu com um transferidor o ângulo formado pela escada e o chão e encontrou 30°.

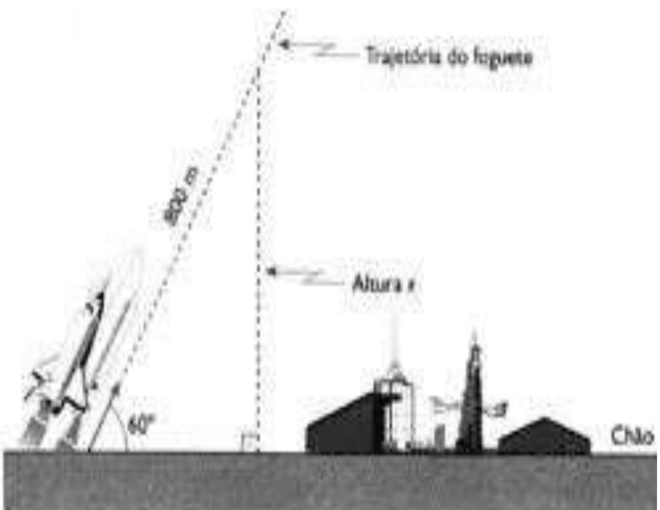
Caso ele tenha feito os cálculos corretos utilizando as razões trigonométricas, quanto mede o muro?



2) Um avião, ao decolar, sobe formando com a pista um angulo de 30°. Após percorrer 700 metros, qual a altura em que ele se encontra do solo?



3) Um foguete e lançado a 200m/s, segundo um angulo de inclinação de 60° (ver figura). Determinar a altura do foguete após 4s, supondo a trajetória retilínea e a velocidade constante. (Considere$\sqrt{3}$ = 1,732)



Solução:

Após 4s, ele percorre 4. (200m) = 800m.

Temos que:

$$\frac{x}{800} = \text{sen}60^{o} \Rightarrow x = 800.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \cong 692{,}8$$

A altura é aproximadamente 692,8m.

4) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30°. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

a)2 km
b)3 km
c)4 km X
d)5 km

Solução: 4 km

Resolução:

h = **x** e lado/hipotenusa)= **8**

$\text{sen } 30^0 = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$ km

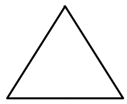
5) Se cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60^0, calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 20 m.

a) $3\sqrt{10}$ m
b) $10\sqrt{3}$ m X
c) 20 m
d) $5\sqrt{3}$ m

Solução: $10\sqrt{3}$ m

Resolução:

h = **x** e lado/hipotenusa)= **20**



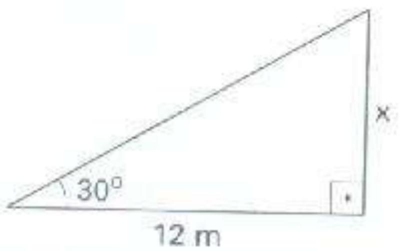
$\text{sen } 60^0 = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20} \rightarrow 2x = 20\sqrt{3}$

$x = \frac{20\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 10\sqrt{3}$ m

6) Qual é o valor da medida x no triângulo da figura? São dados $\text{sen } 30^0 = 1/2$, $\cos 30^0 = \sqrt{3}/2$ e $\text{tg } 30^0 = \sqrt{3}/3$.

a) $12\sqrt{3}$ m
b) $8\sqrt{3}$ m
c) $6\sqrt{3}$ m
d) $4\sqrt{3}$ m X



Resolução:

No triângulo retângulo, temos:

$\text{tg } 30^o = \frac{\text{cat. Oposto}}{\text{cat. Adjacente}}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{12}$

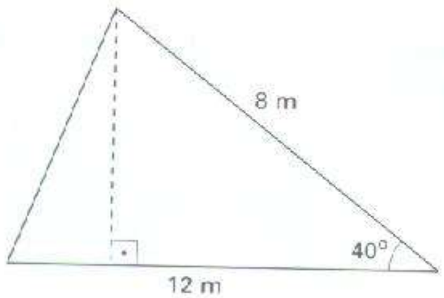
$3x = 12\sqrt{3}$

$x = \frac{12\sqrt{3}}{3}$

$x = 4\sqrt{3}$ m

7) Qual é a área do triângulo da figura? Dado: $\text{sen } 40^0 = 0{,}64$.

a) 22,72 m^2
b) 26,82 m^2
c) 28,80 m^2
d) 30,72 m^2 X



Resolução:

No triângulo retângulo temos:

1°) $\text{sen } 40^0 = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}$

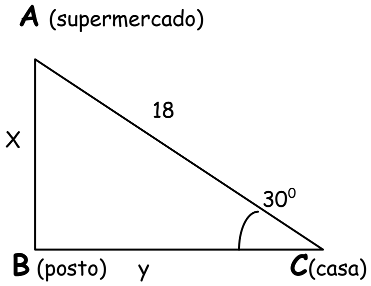
$0{,}64 = \frac{x}{8} \rightarrow x = 5{,}12$ m (altura)

2º) Calculo da área: $A = \frac{b.\,h}{2}$

$A = \frac{12.\,5{,}12}{2} \rightarrow A = \frac{61{,}44}{2} \rightarrow A = 30{,}72\ m^2$

8) Após seu trabalho, Carolina foi de carro ao supermercado (ponto A). Ao sair, ela percebeu que o nível de combustível do seu carro estava muito baixo. Ela optou em antes passar no posto que fica na esquina de duas avenidas (ponto B) e depois ir para casa (ponto C). Observando o esquema abaixo e sabendo que pela avenida AC o percurso tem 18 km, quantos quilômetros Carolina percorreu a mais indo pelas avenidas AB e BC?

(Faça $\sqrt{3} = 1{,}7$)



Resolução: Lado **AB**= x **BC** = y

AC = hipotenusa = 18

1º) encontrar **AB = x**

Sen 30⁰= cat oposto / hipotenusa

$\frac{1}{2} = \frac{x}{18} \rightarrow 2x = 18 \rightarrow x = 9$ **ou AB = 9**

2º) encontrar **BC = y**

cos 30⁰ = cat adjacente / hipotenusa

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{18} \rightarrow 2y = 18\sqrt{3} \rightarrow y = 9\sqrt{3}$

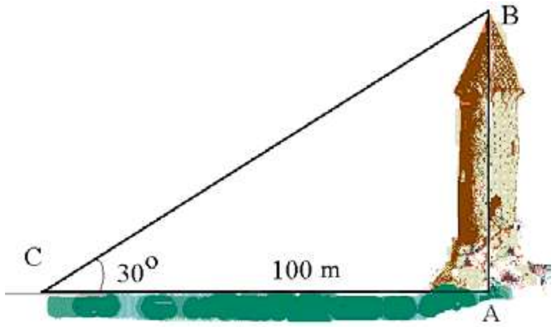
fazendo $\sqrt{3} = 1{,}7$ $\rightarrow y = 9 \cdot 1{,}7 \rightarrow y = 15{,}3$

Logo, AB +BC = 9 + 15,3 = 24,3

Carolina percorreu a mais 6,3 k

(pois 24,3 – 18= 6,3)

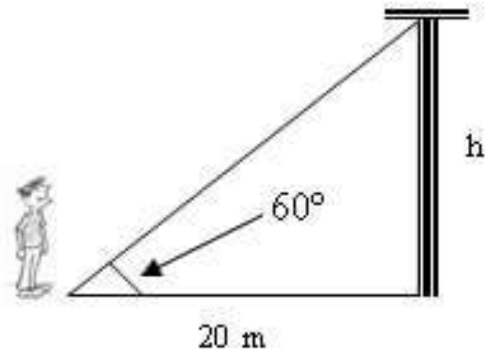
9) O topo de uma torre vertical AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de 30°. A distância de C à base da torre é 100m. Calcule a altura da torre. Obs.: tg 30° ≅ 0,58



Resp.: 58m

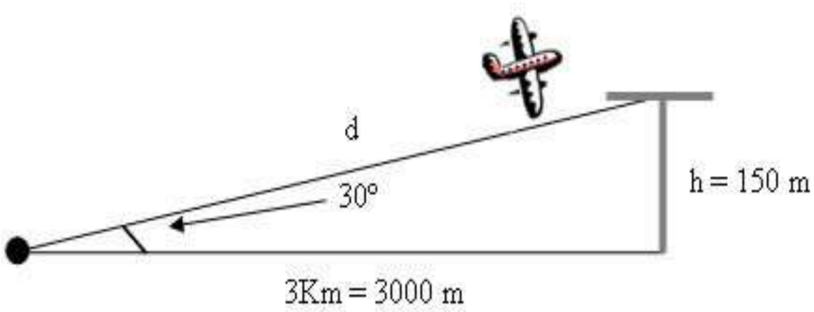
10) Do ponto A, uma pessoa observa o topo de uma torre sob um ângulo de 60°. Determine a altura da torre, sabendo que a pessoa está a 20 metros dela.

$$tg60^{\circ}=\frac{h}{20}$$
$$\sqrt{3}=\frac{h}{20}$$
$$h=20\sqrt{3}$$
$$h=34$$



11) Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de 30° com a pista (horizontal). Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energia elétrica situada a 3km do aeroporto e com altura igual a 150 metros. Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre.

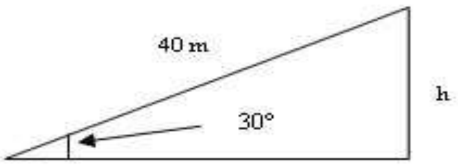
Esquema da situação: *Usaremos a relação da tangente*



$$tg=\frac{CO}{CA}$$
$$tg30^{\circ}=\frac{x}{3000}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{3000}$$
$$3x=3000\sqrt{3}$$
$$x=\frac{3000\sqrt{3}}{3}$$
$$x=1000\sqrt{3}$$
$$x=1700$$

12) Uma inclinação tem 40 metros de comprimento e forma com o plano horizontal um ângulo de 30°. A que altura está situado o ponto mais alto da inclinação?

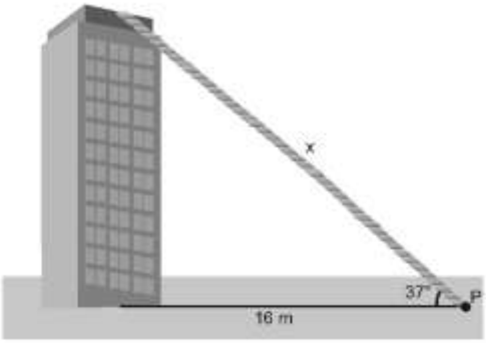
$$sen=\frac{CO}{hip}$$
$$sen30^{\circ}=\frac{h}{40}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{h}{40}$$
$$2h=40$$
$$h=\frac{40}{2}$$
$$h=20$$



O ponto mais alto da inclinação está situado a 20 metros do solo

Questão do Saerjinho

(M110056ES) Um fio foi colocado no alto de um prédio e em um ponto P distante da base 16 metros. O ângulo formado pelo fio e pelo segmento de reta que liga P à base do prédio é 37°, como mostra o desenho abaixo.



Dados:
sen 37° ≅ 0,6
cos 37° ≅ 0,8
tg 37° ≅ 0,75

Qual é a medida X, em metros, desse fio?

A) 12,8
B) 20,0
C) 21,3
D) 22,1
E) 26,6

Trigonometria

LEI DOS SENOS

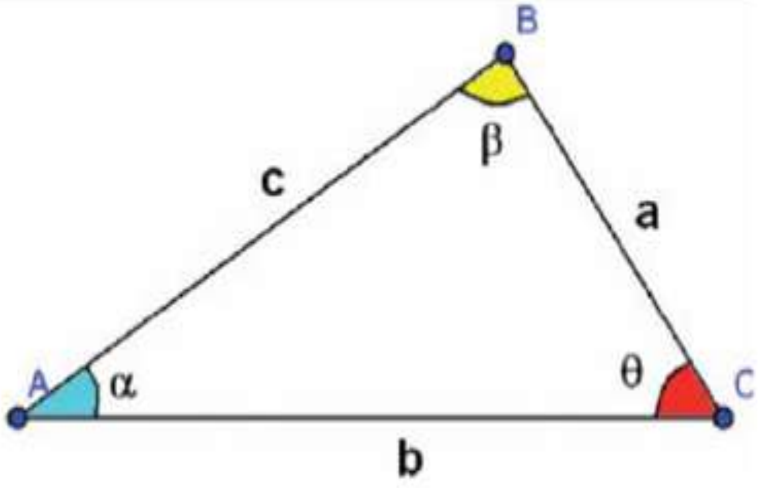
$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\theta)}$$

LEI DOS COSSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\beta),$$

$$c^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\theta).$$



As LEIS dos SENOS e dos COSSENOS.

- Objetivos: Apresentar a Lei dos Cossenos como uma generalização do Teorema de Pitágoras que pode ser usada em qualquer triângulo.

- Habilidade relacionada: Resolver problemas, envolvendo a Lei dos Cossenos ou a Lei dos Senos.

- Pré-requisitos: Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, cálculos com números reais.

- Recursos Educacionais Utilizados: Folha de atividade (Lei dos Senos e Lei dos Cossenos), quadro e caneta.

- Organização da turma: Em duplas, para que o professor possa assim dar atenção a todos da classe num tempo menor, e também para que os próprios alunos possam discutir com seus colegas a compreensão dos fatos.

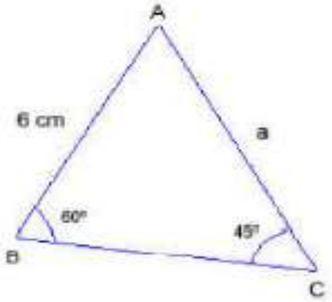
- Metodologia adotada: Perguntar para os alunos o que fazer quando um triângulo não possuir um ângulo reto. Ou seja, questionar sobre o que fazer com triângulos acutângulos e/ou obtusângulos.

As relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente são válidas somente no triângulo retângulo, porém, podemos estabelecer algumas identidades trigonométricas para um triângulo qualquer, sendo ele acutângulo ou obtusângulo. Essas identidades são chamadas de LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS. Faremos o estudo da lei dos senos para um triângulo qualquer

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

(Para simples fixação da aplicação das leis)

01. No triângulo acutângulo a seguir, determine o valor de x.



Solução: Utilizando a lei dos senos, temos que

$$\frac{6}{sen\ 45^\circ} = \frac{x}{sen\ 60^\circ}$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

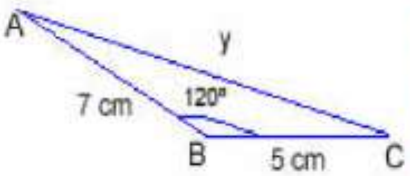
$$x = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\sqrt{6}}{2}$$

$$x = 3\sqrt{6}\ cm$$

02. Determine o valor de y no triângulo obtusângulo abaixo.
Considere: sen 120º = √3/2 e cos 120º = -1/2.



Solução: Lembrando que a lei dos cossenos também é válida para o triângulo obtusângulo, temos que:

$$y^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$y^2 = 49 + 25 - 70 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

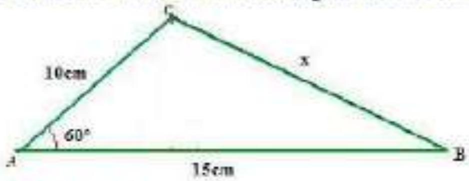
$$y^2 = 49 + 25 + 70 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 74 + 35$$

$$y^2 = 109$$

$$y = \sqrt{109}$$

03. Qual o valor de x no triângulo ABC acutângulo abaixo?



Solução: Aplicando a lei dos cossenos, temos que:

$$x^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 100 + 225 - 300 \cdot \frac{1}{2}$$

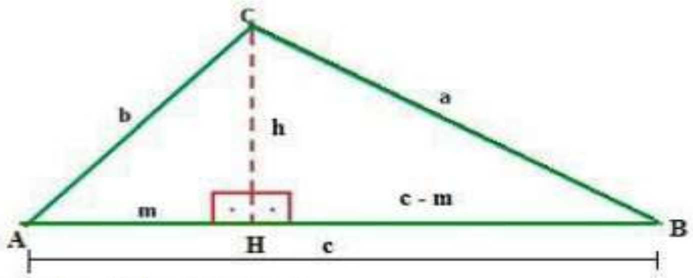
$$x^2 = 325 - 150$$

$$x^2 = 175$$

$$x = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$$

DEMONSTRAÇÃO → Lei dos Senos

Considere o triângulo ABC, acutângulo, abaixo, onde CH é a altura relativa ao lado AB.



No triângulo ACH, temos que: $sen\,A = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot sen\,A$ (I)

No triângulo BCH, temos que: $sen\,B = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot sen\,B$ (II)

De (I) e (II), obtemos:

$b \cdot sen\,A = a \cdot sen\,B$

Ou

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

Assim, podemos concluir (por semelhança de triângulos) que: $\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$

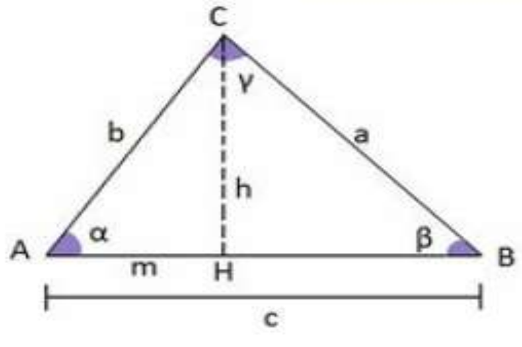
Essa lei é chamada de LEI DOS SENOS ou TEOREMA DOS SENOS.

A demonstração acima foi feita para um triângulo acutângulo, mas a mesma pode ser realizada para qualquer triângulo de forma análoga, chegando ao mesmo resultado.

DEMONSTRAÇÃO → Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos é uma importante ferramenta matemática para o cálculo das medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer. Para demonstrá-la, consideremos um triângulo ABC qualquer e o ângulo Â.

O triângulo ABC é acutângulo.



No triângulo BCH, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 \quad (I)$$

No triângulo ACH, também pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \;\rightarrow\; h^2 = b^2 - m^2 \quad (II)$$

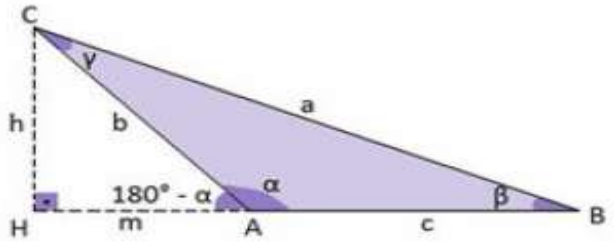
Substituindo (II) em (I), vem:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 \;\rightarrow\; a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.m \quad (III)$$

Ainda no triângulo ACH, temos: $\cos\alpha = \frac{m}{b} \;\rightarrow\; m = b.\cos\alpha \quad (IV)$

Substituindo (IV) em (III), obtemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$

O triângulo ABC é obtusângulo e Â é obtuso



No triângulo BCH, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 \quad (I)$$

No triângulo retângulo ACH, novamente por Pitágoras, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c+m)^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.m \quad (III)$$

Ainda no triângulo retângulo ACH, temos:

$$\cos(180º - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{m}{b} \rightarrow m = -b.\cos\alpha \quad (IV)$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.(-b.\cos\alpha) \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

Usando raciocínio análogo, obtemos as expressões:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$$

***PODEMOS ENUNCIAR A LEI DOS COSSENOS**: Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

Avaliação

Este plano tem por finalidade ajudar o aluno a compreender o conteúdo e a superar as dificuldades durante o processo de ensino e aprendizagem. Para isso, a avaliação será contínua, formativa e estará relacionada à participação dos alunos. Como? Ouvir as suas opiniões, as suas dúvidas, encorajá-los a persistirem em seus próprios esforços e a desenvolverem e atingirem a autonomia.

Outras formas de avaliação:

*Trabalhos realizados individualmente ou em grupo (medição da altura da escola e da árvore);

* Testes ou provas objetivas;
* Pesquisas realizadas durante as aulas e como tarefa de casa.

Bibliografia

- ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Trigonometria na circunferência
Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.
- Livro de apoio: MATEMATICA PAIVA, 1º Ano/Manoel PAIVA – 1ª Edição – São Paulo: 2009
- Troca de idéias com os colegas- atividades compartilhadas no Fórum;
- Midiateca - disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.
- Links acessados:
http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20102/mat341/trigonometria.ppt
http://www.slideshare.net/LuciBragagnolo/histria-da-trigonometria-7379904
http://www.edicoessm.com.br/backend/public/recursos/Reproducao%20SP%20Matematica%202%20unidade%201%20%20capitulo%201.pdf
http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Trigonometria/Lei_dos_senos_e_dos_cossenos
http://www.brasilescola.com/matematica/lei-dos-senos.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigonometria.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigon1/mod114.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/trigonometria.htm
http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/utilizando-as-relacoes-trigonometricas.htm