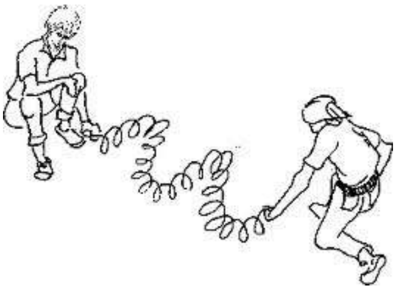
Nome: Rodolfo da Costa Neves
Série: 1º ano do ensino médio / 4º Bimestre
Grupo: 11
Tutor: Carlos Eduardo Lima de Barros

Introdução

Abordagem ao tema

A palavra trigonometria tem origem grega e seu significado está associado à medidas de um triângulo. É a parte da matemática que estuda as relações existentes entre seus lados e ângulos.

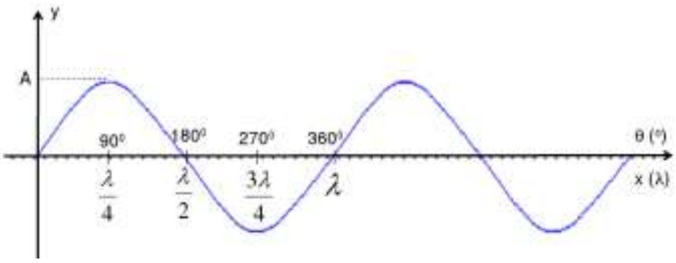
A trigonometria surge entre os babilônicos e egípcios, com sua utilização na Astronomia, no calculo do tempo e na navegação. Foi desenvolvida pelos gregos e indianos posteriormente, com o desenvolvimento do calculo diferencial e integral, a trigonometria tomou outra forma, tendo suas funções associadas a fenômenos ondulatórios.



A trigonometria é constantemente empregada em inúmeros, outros, campos da ciência, como Engenharia, Física, Biologia, Economia, entre outras.

Na figura abaixo observamos alguns instrumentos sonoros.

Na física, ondas sonoras são definidas como ondas mecânicas, pois se propagam em um meio material. Diferentemente da luz (ondas eletromagnéticas), que podem se propagar no vácuo.



O deslocamento vertical y de uma onda senoidal em função do ângulo θ é descrita por:

$$\boldsymbol{y = A.\,sen\theta}$$

Pré-requisitos

Alguns pré-requisitos são fundamentais para o desenvolvimento do conteúdo, como noção de medidas ângulos; círculos e seus elementos; e o teorema de Pitágoras, entre outros.

Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)

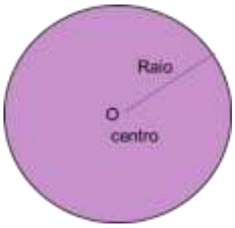
Material: Quadro negro, computador e data show.

Assunto: Círculo, circunferência, círculo trigonométrico e teorema de Pitágoras.

Objetivo: Facilitar a aprendizagem do conteúdo a ser abordado: Trigonometria na circunferência.

Círculo e circunferência

Círculo: é o conjunto dos pontos de um plano pertencentes a uma circunferência e seu interior



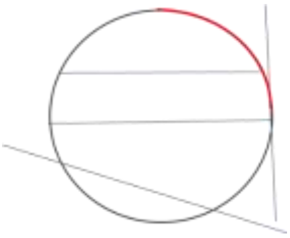
✓Elementos da Circunferência

Reta Secante: corta a circunferência em dois pontos.

Reta Tangente: corta a circunferência em um ponto.

Arco: é um pedaço da circunferência em dois pontos.

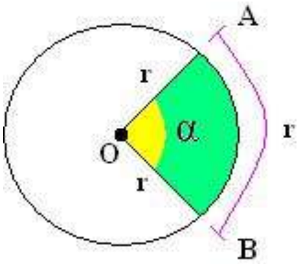
Corda: é qualquer segmento que liga dois pontos distintos da circunferência. (Se a corda passa pelo centro é chamado de diâmetro e vale duas vezes o raio)



Medidas de arcos

Para medir ângulos e arco de circunferência utilizamos o grau como unidade de medida. Iremos conhecer uma nova unidade de medida que irá facilitar alguns cálculos, o radiano.

O cálculo do radiano é feito a partir de uma circunferência de raio r e um arco dessa mesma circunferência ($\overline{AB}$), se a medida do arco for a mesma medida do raio, veja a figura abaixo:



Dizemos que a medida do arco $\overline{AB}$ é igual a 1 radiano ou seja 1 rad. Assim, podemos definir um radiano como sendo um arco onde a sua medida é a mesma do raio da circunferência que contém o arco.

O valor do ângulo α será igual a 1 radiano, se somente se, o valor do arco correspondente a ele for igual a 1 radiano.

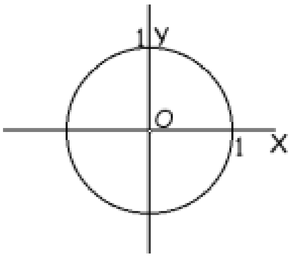
Transformações de unidades

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco, por exemplo, 2π é equivalente a 360°, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

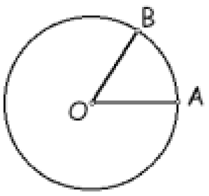
π rad é equivalente a 180º

Circulo trigonométrico

Círculo Trigonométrico é um círculo de centro na origem do referencial e raio igual a uma unidade, ao qual se encontra associado um referencial ortogonal xOy.



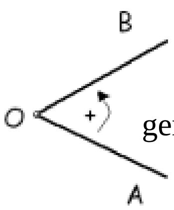
Consideremos sobre o círculo trigonométrico de centro O, os pontos A e B escolhidos como a figura indica.

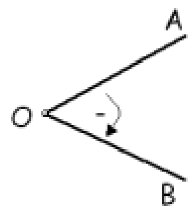


O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas OA e OB são, respectivamente, o lado origem e o lado extremidade.

Há dois sentidos de percurso num círculo:

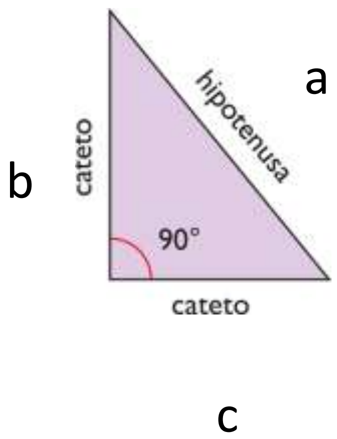
Ângulo positivo é o ângulo gerado no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Ângulo negativo é o ângulo  gerado no sentido dos ponteiros do relógio.



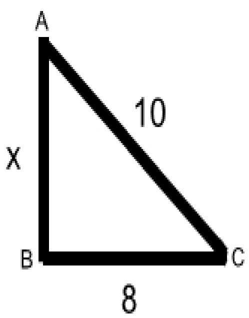
Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras diz: O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos. Utilizamos o teorema de Pitágoras em triângulos retângulos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exemplo: Calcule o valor de x no triângulo abaixo.



$a^2 = b^2 + c^2 \to 10^2 = x^2 + 8^2 \to x^2 = 100 - 64 = 36$, logo

$x = \sqrt{36} \to x = 6.$

Desenvolvimento

1° Etapa

Duração: (Duração: 4 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Quadro negro, computador, data show e Geogebra.

Assunto: Função seno, cosseno e tangente.

Pré-requisitos: Círculo trigonométrico, circunferência e seus elementos.

Metodologia: Estender a definição de seno, cosseno e tangente do triângulo retângulo para o ciclo. Definir seno, cosseno e tangente como funções de um número real, Localizar um ponto no ciclo com o uso de coordenadas cartesianas.

1. **Retomar as razões trigonométricas;**
2. **Definir seno, cosseno e tangente no ciclo;**
3. **Definir as funções seno, cosseno e tangente de variável real;**
4. **Construir o gráfico das funções com auxílio de tabelas e identificar domínio, imagem e período.**
5. **Utilizar o Geogebra para correção dos gráficos das funções acima.**

Objetivo: Ao final da aula, a expectativa é que os alunos sejam capazes:

1. **Associar um número real ao arco correspondente, no ciclo trigonométrico e determinar seu seno, cosseno e tangente.**
2. **Reconhecer e aplicar as relações trigonométricas.**

Funções seno, cosseno e tangente

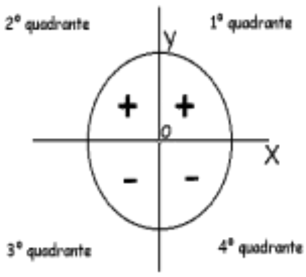
O sinal de uma razão trigonométrica depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto associado ao círculo trigonométrico.

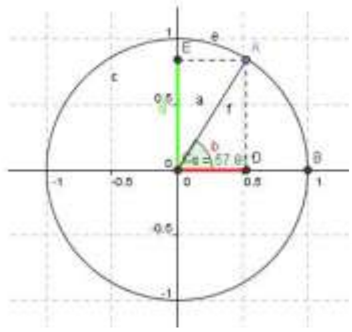
Definindo o seno no círculo trigonométrico.

Para todo o α,

Lembramos:

$$sen\ \theta = \frac{cat.Oposto}{Hipotenusa} = \frac{a}{r}$$





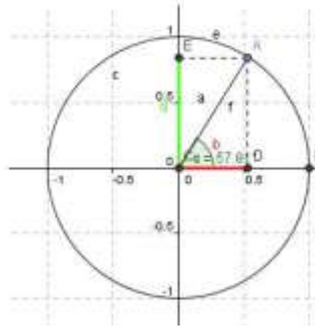
$$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$$

Definindo o cosseno no círculo trigonométrico.

Para todo o α,

Lembremos:

$$\cos\theta = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{r}$$



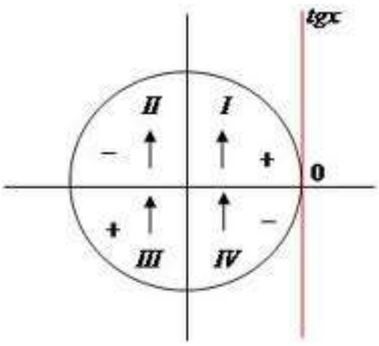
$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

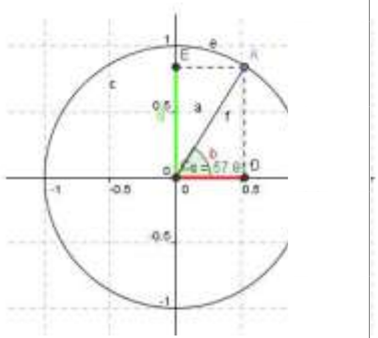
Definindo a tangente no círculo trigonométrico.

Para todo o α,

Lembremos:

$$tan\ \theta = \frac{cat.\,oposto}{cat.\,adjacente} = \frac{a}{b}$$





Obs.: A tangente não é definida para arcos definidos por $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Com as definições e visualização acima os alunos podem identificar o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 0°, 90º, 180º e 360°.

Graus	Radianos	Seno	Cosseno	Tangente
0º	0 rad	0	1	0
90°	π/2 rad	1	0	Não definido
180°	π rad	0	-1	0
270°	3π/2 rad	-1	0	Não definido
360°	2π rad	0	1	0

Gráfico das funções seno, cosseno e tangente.

Função seno

1° Construção da tabela

Obs.: x é o valor do ângulo em radianos e y o seno do mesmo.

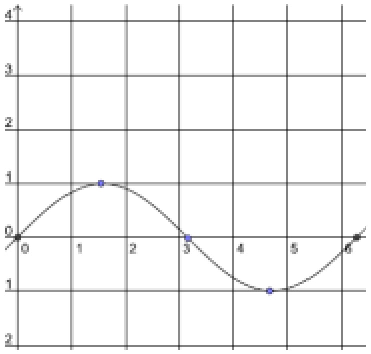
$$y = sen\ x$$

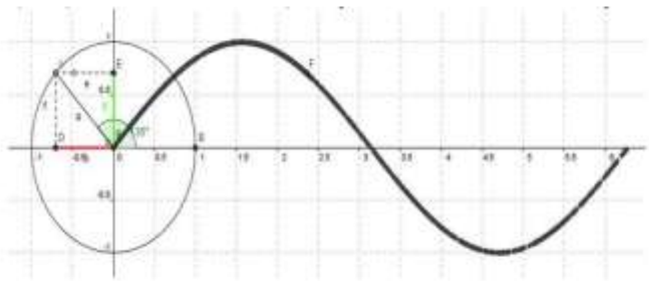
x	y
0	$y = sen\ 0 = 0$
π/2	$y = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$
π	$y = sen\ \pi = 0$
3π/2	$y = sen\ \frac{3\pi}{2} = -1$
2π	$y = sen\ 2\pi = 0$

2° Marcação dos valores em malha quadriculada pelos alunos.

A Atividade será realizada pelos alunos sob a supervisão do professor.

3º Construção da função no Geogebra





➢ **Conclusões:**

- *Domínio da função: R.*
- *Imagem:* $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ → *Função limitada.*
- *Período: A função seno é periódica e seu período é 2π. (intervalo de repetição de um ciclo completo).*

Função cosseno

Utilizaremos os mesmos passos, da função seno, para construção da função cosseno.

1° Construção da tabela

Obs.: x é o valor do ângulo em radianos e y o cosseno do mesmo.

$$y = cos\ x$$

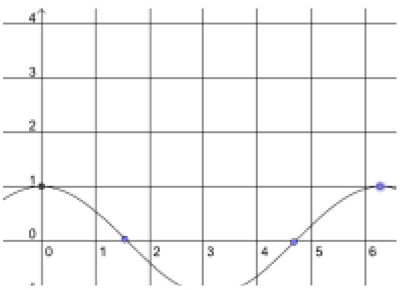
x	y
0	$y = cos\ 0 = 1$
π/2	$y = cos \frac{\pi}{2} = 0$
π	$y = cos\ \pi = -1$
3π/2	$y = cos \frac{3\pi}{2} = 0$
2π	$y = cos\ 2\pi = 1$

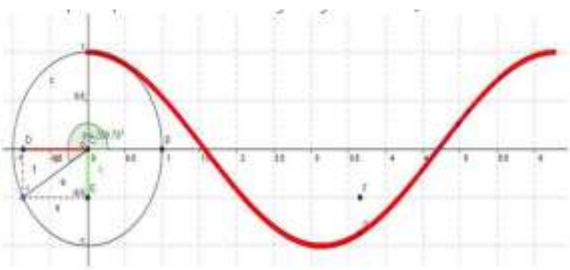
2° Marcação dos valores em malha quadriculada pelos alunos.

A Atividade será realizada pelos alunos sob a supervisão do professor.

3º Construção da função no Geogebra

Observamos com os alunos os possíveis erros na construção do gráfico deles.





➢ **Conclusões:**

- *Domínio da função: R.*
- *Imagem:* $\{y \in \mathbb{R}/-1 \leq y \leq 1\}$ → *Função limitada.*
- *Período: A função cosseno é periódica e seu período é 2π. (intervalo de repetição de um ciclo completo).*

Função tangente

1. Construção da tabela

Obs.: x é o valor do ângulo em radianos e y o tangente do mesmo.

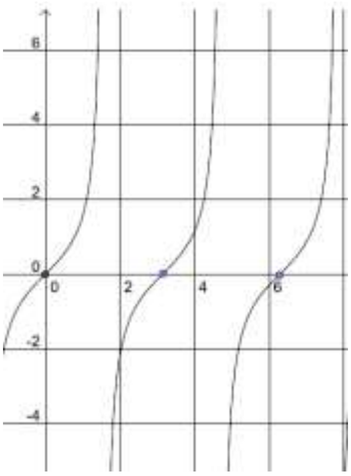
$$y = \tan x$$

x	y
0	$y = tan\ 0 = 0$
π/2	$y = tan\frac{\pi}{2} = não\ é\ definida.$
π	$y = \tan \pi = 0$
3π/2	$y = tan\frac{3\pi}{2} = não\ é\ definida$
2π	$y = tan\ 2\pi = 0$

2° Marcação dos valores em malha quadriculada pelos alunos.

A Atividade será realizada pelos alunos sob a supervisão do professor.

3º Construção da função no Geogebra



➢ **Conclusões:**

- *Domínio da função:* $\left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$
- *Imagem:* $\mathbb{R}$.
- *Período: A função tangente é periódica e seu período é π. (intervalo de repetição).*

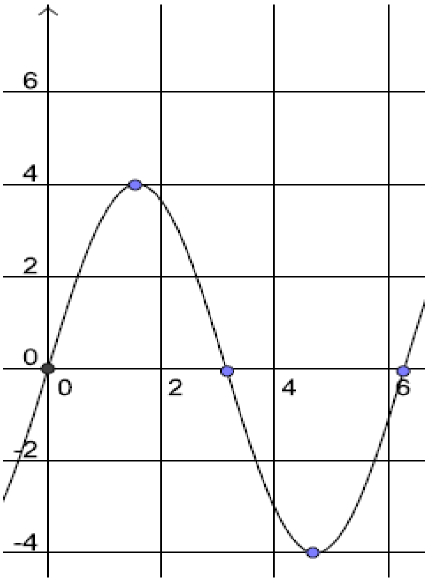
Exemplo: Construa o gráfico das funções abaixo:

Habilidade H 38: **Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.**

Habilidade H 21: **Transformar grau em radiano ou vice-versa. Construtor 2: Converter em radianos a medida de um arco dado em graus, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária.**

a) $y = 4\ sen\ x$

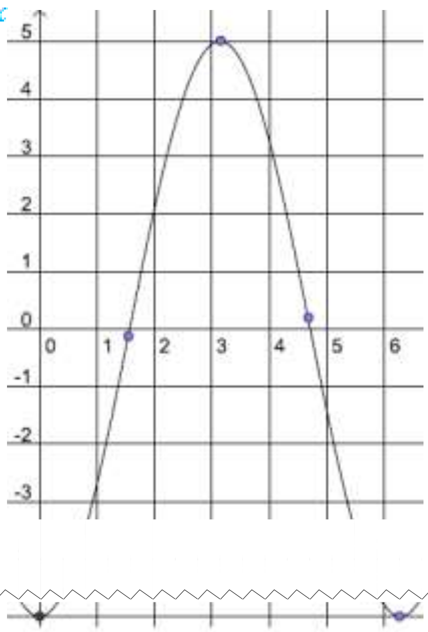
x	y
0	$y = 4\ sen\ 0 = 0$
π/2	$y = 4\ sen \frac{\pi}{2} = 4$
π	$y = 4\ \text{sen}\, \pi = 0$
3π/2	$y = 4\ sen \frac{3\pi}{2} = -4$
2π	$y = 4\ sen\ 2\pi = 0$



Domínio: $\mathbb{R}$.
Imagem: $\{y \in \mathbb{R} / -4 \leq y \leq 4\}$.
Período: 2π.

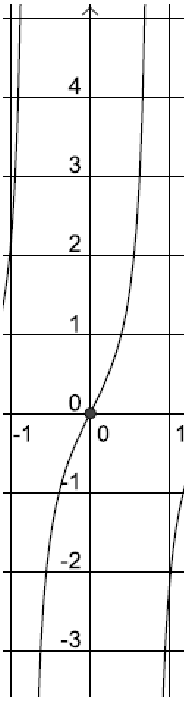
b) $y = -5 \cos x$

x	y
0	$y = -5\ cos\ 0 = -5$
π/2	$y = -5\ cos \frac{\pi}{2} = 0$
π	$y = -5\ cos\ \pi = 5$
3π/2	$y = -5\ cos \frac{3\pi}{2} = 0$
2π	$y = -5\ cos\ 2\pi = -5$



Domínio: $\mathbb{R}$.
Imagem: $\{y \in \mathbb{R} / -5 \leq y \leq 5\}$
Período: π.

c) $y = tg\ 2x$



x	y
-π/4	$y = tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) = não\ é\ definida$
-π/8	$y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
0	$y = \tan 0 = 0$
π/8	$y = tan\frac{\pi}{4} = 1$
π/4	$y = tan\ \frac{\pi}{2} = não\ é\ definida$

Domínio da função: $\{x \in R / x \neq \pi/4 + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\}$

Imagem: $\mathbb{R}$.
Período: A função tangente é periódica e seu período é $\pi/2$. (intervalo de repetição).

2. Etapa

Duração: (Duração: 3 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Quadro negro.

Assunto: Lei dos senos e cossenos.

Pré-requisitos: Razões trigonométricas, teorema de Pitágoras.

Metodologia: Utilizar de situações práticas como motivadores na aprendizagem da lei dos senos e cossenos.

1. **Apresentar uma situação prática.**
2. **Desenvolver o conteúdo para a solução da atividade prática.**
3. **Solucionar a atividade prática.**

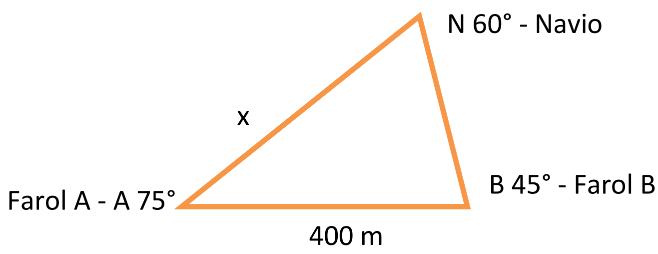
Objetivo: Ao final da exposição do conteúdo, a expectativa é que os alunos sejam capazes de aplicar a lei dos senos e cossenos na resolução de problemas.

Lei dos senos

- **Situação Prática**

Um navio avista dois faróis A e B, sobe um ângulo de 60º, enquanto do farol A avistam-se o navio e o farol B sob um ângulo de 75º, conforme mostra a figura.

Sabendo que a distância entre os dois faróis é de 400 m, calcule a distância do navio ao farol A.

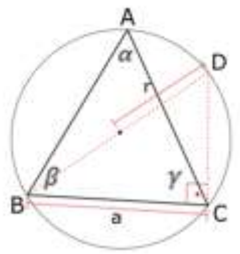


➢ **Desenvolvimento do conteúdo**

A solução do problema acima só poderá ser resolvida com o estudo que faremos abaixo.

Lei dos senos.

Seja um triangulo qualquer ABC inscrito numa circunferência, conforme a figura abaixo.



Construímos um triangulo retângulo B$\hat{D}$C com BD passando pelo centro da circunferência. Observe, também, que mantemos a corda BC comum aos dois triângulos inscritos e que os ângulos BÂC e B$\hat{D}$C são congruentes, pois determinam a mesma corda (BC) na circunferência.

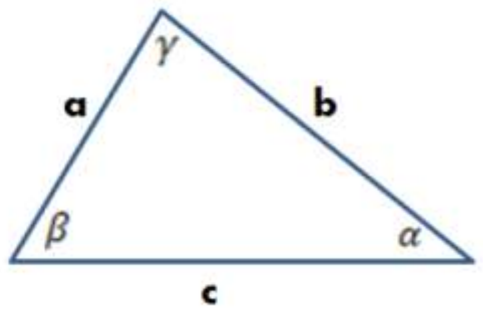
Temos então que:

$$\boldsymbol{sen\left(B\hat{D}C\right) = sen\,\alpha = \frac{a}{2r} \rightarrow 2r = \frac{a}{sen\,\alpha}}$$

Utilizando a mesma construção para os outros ângulos do triângulo temos:

$$2r = \frac{b}{sen\,\beta}\ e\ 2r = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

Com estes resultados demonstramos a lei dos senos.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Podemos, agora, retornar a situação prática e soluciona-la.

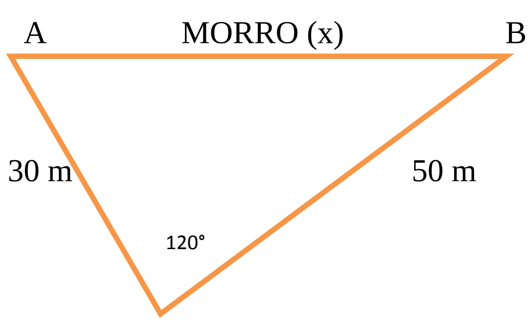
Solução

$$\frac{x}{sen\ 45°} = \frac{400}{sen\ 60°} \rightarrow x\frac{\sqrt{3}}{2} = 400\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 400\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{6}}{3}\ \text{m}$$

Lei dos cossenos

- **Situação Prática**

Um túnel que será construído ligando dois pontos, A e B, da base de uma montanha. Um engenheiro posicionou-se em um ponto C tal que ACB é 120º, AC =30m e BC = 50m, conforme a figura. Qual será o comprimento AB do túnel?



- **Desenvolvimento do conteúdo**

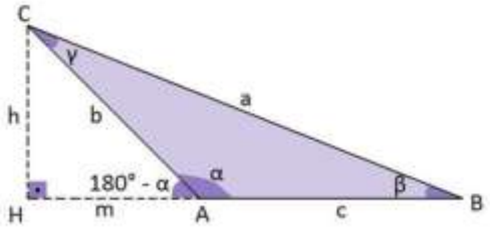
A solução do problema acima só poderá ser resolvida com o estudo que faremos abaixo.

Lei dos cossenos

Consideremos um triângulo de lados a, b e c. Temos duas possibilidades: ou o triângulo é acutângulo ou é obtusângulo. Vejamos:

Triângulo Obtusângulo

Tomemos um triângulo Obtusângulo qualquer, conforme abaixo:



Podemos escrever, com ajuda das relações trigonométricas no triângulo retângulo, o seguinte:

$$m = b.\cos(180° - \alpha) = b.(-\cos\alpha) = -b.\cos\alpha$$

$$h = b.cos(180° - \alpha) = b.\cos\alpha$$

Utilizando o teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = b^2cos^2\alpha + c^2 + 2.c.(-b\cos\alpha) + b^2sen^2\alpha$$

Logo, arrumando a equação, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

Mudando a posição do triângulo temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

Obs.: A demonstração quando o triângulo é acutângulo fica como proposta de atividade para os alunos.

Podemos, agora, retornar a situação prática e soluciona-la.

Solução

$$x^2 = 30^2 + 50^2 - 2.30.50.\cos 120°$$

Obs: cos 120° = - cos 60°.

$$x^2 = 900 + 2500 - 2.30.50.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3400 + 1500 = 4900$$

$$x = \sqrt{4900}$$

$$x = 70\ m.$$

Avaliação

Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)

Material: Atividade avaliativa impressa. Utilizar de atividades relacionadas a problemas práticos

Metodologia: Será entregue aos alunos a atividade proposta abaixo. Os mesmo farão em dupla com consulta, obedecendo ao tempo de duração.

4. **Apresentar uma situação prática.**
5. **Desenvolver o conteúdo para a solução da atividade prática.**
6. **Solucionar a atividade prática.**

Objetivo: Investigar a capacidade da utilização dos conhecimentos adquiridos para resolver problemas do cotidiano envolvendo as funções trigonométricas, leis dos senos e cossenos. E observar as competências e habilidades adquiridas por eles em sala de aula..

Atividades

Questão 1- Podemos descrever o movimento de giro de uma roda-gigante por meio de uma função trigonométrica. Por exemplo, considerando um extremo A de um diâmetro horizontal, podemos descrever o movimento, considerando pela função $f(t) = 111 + 97.sen\frac{\pi t}{15}$, em que f(t) é a altura, em metro, do ponto A em relação ao terreno no instante t, em minuto, a partir do início da medição do tempo (t=0). Qual é a altura máxima atingida pelo ponto A?

Habilidade H 38: **Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.**

Solução

A altura máxima atingida pelo ponto A é o valor máximo da função. Esse valor é encontrado através da imagem.

$Imagem \rightarrow -1 \leq sen\frac{\pi t}{15} \leq 1$

Multiplicando os membros dessa igualdade por 97, temos:

$$-97 \leq -97.sen\frac{\pi t}{15} \leq 97$$

Adicionando 111 aos membros:

$111 - 97 \leq 111 - 97.sen\frac{\pi t}{15} \leq 111 + 97$

$14 \leq f(t) \leq 208$

Portanto a altura máxima atingida pelo ponto A é 208 m.

Questão 2 – Um pistolão realiza um movimento periódico no interior de um cilindro, percorrendo 16 cm na subida e 16 cm na descida, tal que cada oscilação completa 32 cm (subida e descida) é realizada pelo pistão em 1/60 min. Considere que nos instante zero o pistão está subindo e que a sua cabeça (tampa) está 8 cm da base do cilindro, a função que descreve a altura f(t), atingida pela cabeça do pistão em relação à base, em função do tempo t, em minutos, é:

Habilidade H 38: **Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.**

a) $f(t) = 8\,cos(60\pi t)$

b) $f(t) = 16\,cos(60\pi t)$

c) $f(t) = 8\,cos(120\pi t)$

d) $f(t) = 8\,sen(120\pi t)$ $\rightarrow$ *Alternativa correta*

e) $f(t) = -16\,cos(60\pi t)$

Questão 3 – Construa o gráfico das funções abaixo:

Habilidade H 38: Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.

a) $f(t) = 8\,cos(x)$

b) $f(t) = 8\,sen\,(2x)$

c) $f(t) = 4\,tan(x)$

Questão 4 – A figura representa um mapa em escala 1:1000, indicando três pontos em uma selva. Os lados do triângulo representam os possíveis caminhos para deslocar-se entre esses pontos. Um grupo de amigos está na posição representada pelo ponto A. Quanto eles irão percorrer para chegar à posição representada pelo ponto C, sabendo que utilizarão o caminho mais curto?

Habilidade H 13: Resolver problemas envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.
Construtor C2: Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos cossenos.

Solução

Utilizaremos, observando os dados, a lei dos cossenos.

$$x^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 - 2.4\sqrt{3}.4.\cos 30°$$
$$x^2 = 48 + 16 - 48 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16}$$
$$x = 4\ cm$$

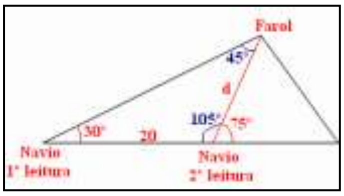
<u>Questão 5</u> – Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de 30º para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de 75º. Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a 2ª leitura. (Use $\sqrt{2} \cong 1{,}4$).

Habilidade H 13: Resolver problemas envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.

Construtor C1: Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos senos.

<u>Solução</u>

Observe a situação ilustrada na figura. A distância d pode ser calculada pela lei dos senos.



$$\frac{d}{sen\ 30°} = \frac{20}{sen\ 45°} \rightarrow d\sqrt{2} = 20 \rightarrow d = \frac{20}{1{,}4}$$

$$d = 14\ milhas$$

Referências Bibliográficas

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: **Contexto e Aplicações**. 3ª ed. 4 vols. São Paulo: Ática, 2008.

IEZZI, Gelson. **Matemática.** São Paulo: Atual, 1997.

PAIVA, Manoel. **Matemática** – Volume Único. São Paulo, Moderna, 2008.

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Razões Trigonométricas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4° bimestre/2012. Disponíveis em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br.