FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Tutora: **Maria Tereza Baierl**

Matemática 1º ano - 4º bimestre/2012

PLANO DE TRABALH0

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

http://www.colegiosantamaria.g12.br/noticias/ver-destaque.asp?destaque_id=595

Professora: Valéria Gomes Gonçalves

Tutora:Maria Tereza Baierl

<u>S u m á r i o</u>

INTRODUÇÃO

O objetivo desse Plano de Trabalho é que o aluno conheça a função trigonométrica e sua aplicação. O aluno verá que muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento intermitente podem ser analisados com o auxilio da função trigonométrica, tais como a astronomia, economia, engenharia, geografia, etc.

É amplo o seu campo de aplicação. Dentre vários podemos destacar em geografia onde a utilizamos para estimar distâncias consideráveis entre cidades, países, etc. No campo da astronomia também em sistemas de navegação por satélite (nos oceanos, em aviões, no espaço) para estimar distâncias de algumas estrelas, etc.

Para melhor entendimento do aluno esse Plano de Trabalho teve inicio com exercícios de revisão da parte de trigonometria no triangulo retângulo e só depois foi introduzida à função trigonométrica. A ideia é que o aluno não tenha dificuldade em matérias anteriores que possam prejudicar o seu desenvolvimento.

Para a elaboração desse Plano de Trabalho serão necessários dez tempos de cinquenta minutos e mais dois tempos de cinquenta minutos para a avaliação final.

Funções trigonométricas

Desenvolvimento

ATIVIDADE I

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

DURAÇÃO PREVISTA: 4 aulas

ASSUNTO: Trigonometria no triângulo retângulo (revisão)

OBJETIVOS: Revisar esse tema a fim de prosseguir com o tema função trigonométrica.

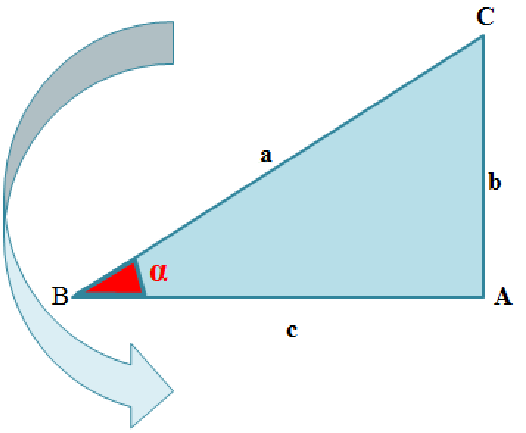
PRÉ-REQUISITOS: Teorema de Pitágoras, triângulos semelhantes, e utilização de transferidor.

MATERIAL NECESSÁRIO: Livro didático, material para construção do teodolito e cartolina para elaboração de cartazes.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Em dupla

DESCRITORES ASSOCIADOS: H12-Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°)

Revisão de trigonometria no triângulo retângulo



- sen $\alpha = \frac{b}{a}$
- cos $\alpha = \frac{c}{a}$
- tg $\alpha = \frac{b}{c}$

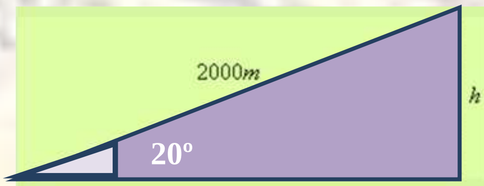
Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
0º	0	1	0	185 º	-0,09	-0,99	0,09
5 º	0,09	0,99	0,09	190 º	-0,17	-0,98	0,17
10 º	0,17	0,98	0,17	195 º	-0,26	-0,96	0,27
15 º	0,26	0,96	0,27	200 º	-0,34	-0,94	0,36
20 º	0,34	0,94	0,36	205 º	-0,42	-0,91	0,47
25 º	0,42	0,91	0,47	210 º	-0,50	-0,87	0,58
30 º	0,50	0,87	0,58	215 º	-0,57	-0,82	0,70
35 º	0,57	0,82	0,70	220 º	-0,64	-0,77	0,84
40 º	0,64	0,77	0,84	225 º	-0,71	-0,71	1
45 º	0,71	0,71	1	230 º	-0,77	-0,64	1,19
50 º	0,77	0,64	1,19	235 º	-0,82	-0,57	1,43
55 º	0,82	0,57	1,43	240 º	-0,87	-0,50	1,73
60 º	0,87	0,50	1,73	245 º	-0,91	-0,42	2,14
65 º	0,91	0,42	2,14	250 º	-0,94	-0,34	2,75
70 º	0,94	0,34	2,75	255 º	-0,96	-0,26	3,73
75 º	0,96	0,26	3,73	260 º	-0,98	-0,17	5,67
80 º	0,98	0,17	5,67	265 º	-0,99	-0,09	11,4
85 º	0,99	0,09	11,4	270 º	-1	0	ñ existe
90 º	1	0	ñ existe	275 º	-0,99	0,09	-11,4
95 º	0,99	-0,09	-11,4	280 º	-0,98	0,17	-5,67
100 º	0,98	-0,17	-5,67	285 º	-0,96	0,26	-3,73
105 º	0,96	-0,26	-3,73	290 º	-0,94	0,34	-2,75
110 º	0,94	-0,34	-2,75	295 º	-0,91	0,42	-2,14
115 º	0,91	-0,42	-2,14	300 º	-0,87	0,50	-1,73
120 º	0,87	-0,50	-1,73	305 º	-0,82	0,57	-1,43
125 º	0,82	-0,57	-1,43	310 º	-0,77	0,64	-1,19
130 º	0,77	-0,64	-1,19	315 º	-0,71	0,71	-1
135 º	0,71	-0,71	-1	320 º	-0,64	0,77	-0,84
140 º	0,64	-0,77	-0,84	325 º	-0,57	0,82	-0,70
145 º	0,57	-0,82	-0,70	330 º	-0,50	0,87	-0,58
150 º	0,50	-0,87	-0,58	335 º	-0,42	0,91	-0,47
155 º	0,42	-0,91	-0,47	340 º	-0,34	0,94	-0,36
160 º	0,34	-0,94	-0,36	345 º	-0,26	0,96	-0,27
165 º	0,26	-0,96	-0,27	350 º	-0,17	0,98	-0,18
170 º	0,17	-0,98	-0,18	355 º	-0,09	0,99	-0,09
175 º	0,09	-0,99	-0,09	360 º	0	1	0
180 º	0	1	0				

Tabela dos ângulos múltiplos de cinco.

Dado um triângulo retângulo qualquer, se conhecemos um de seus lados e um ângulo agudo, conseguimos calcular seus outros lados. Para isso basta utilizarmos a tabela ao lado.

Veja:

1) Calcule o Valor desconhecido nos triângulos abaixo:



$$sen20° = \frac{h}{2000}$$

$$0{,}342 = \frac{h}{2000}$$

$$h = 2000 * 0{,}342$$

$$h = 684m$$

Deixar uma tabela fixada na sala, para possíveis consultas.

ÂNGULOS NOTÁVEIS

Tabela dos ângulos notáveis:

Ângulo	30°	45°	60°
Seno	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
Cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
Tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

1) Lucas está a 35 m de distancia de um farol, e vê o seu topo sob um ângulo de 60º. Sabendo que Lucas tem 1,60m de altura. Determine a altura do farol.

Veja a ilustração:

http://www.downloadswallpapers.com/papel-de-parede/farol-no-campo-2655.htm

a) **H ≅ 60,6**

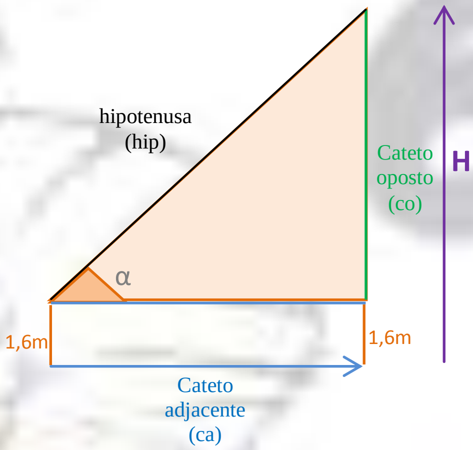
b) **H ≅ 20,2**

c) **H ≅ 21,68**

d) **H ≅ 62,2**

Resolução:

ca = 35m
α = 60º
co = h
altura da torre = H = h + 1,6



Consultando a tabela, temos que a relação existente entre o cateto oposto e o cateto adjacente é a tangente, logo:

$\text{tg } 60º = \frac{h}{35} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{35} \rightarrow h = 35 \cdot \sqrt{3} \rightarrow h \cong 60,6$

$H = h + 1,6 \rightarrow H \cong 60,6 + 1,6 \rightarrow H \cong 62,2 \text{ m}$

Para melhor entendimento do aluno e também para diversificar um pouco a aula, uma vez que esse assunto é uma revisão vamos confeccionar um teodolito, seguindo passo a passo o roteiro de ação 2.

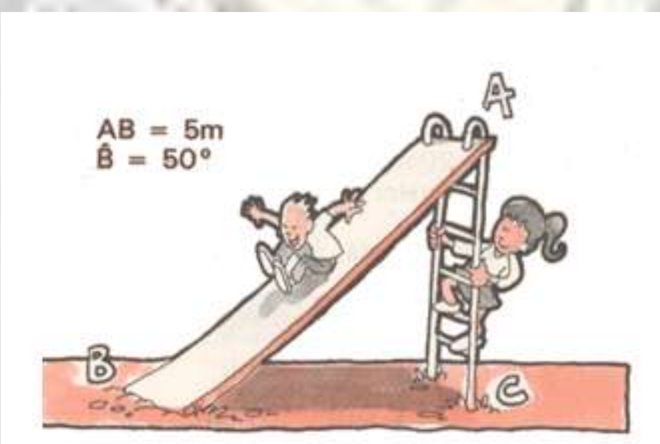
Com o teodolito feito ultrapassar as barreiras da sala de aula e ir para algum lugar aberto. Poderão ser medidas, por exemplo, árvores, o próprio colégio, montanhas e tudo mais o que for possível e interessante para a turma.
(Essa atividade pode ser pontuada. Individual ou em grupo os alunos ficarão responsáveis por descobrir a altura de algo pré-determinado pelo professor).

Exercícios:

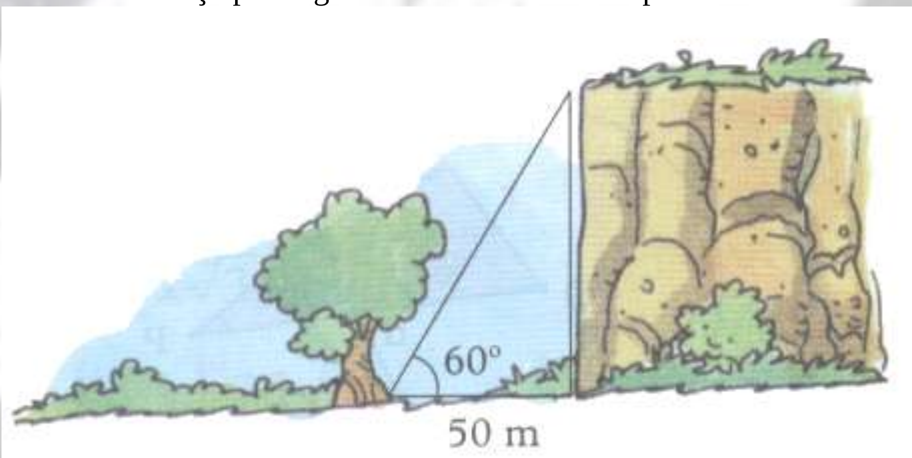
1) Resolva os problemas abaixo:

(Será necessária a tabela dos ângulos)

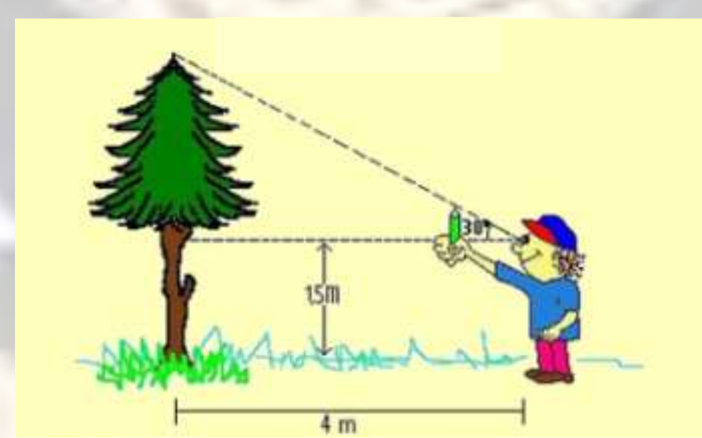
a) Calcule a altura de um escorregador que tem 5 m que tem uma inclinação de 50º com o chão.



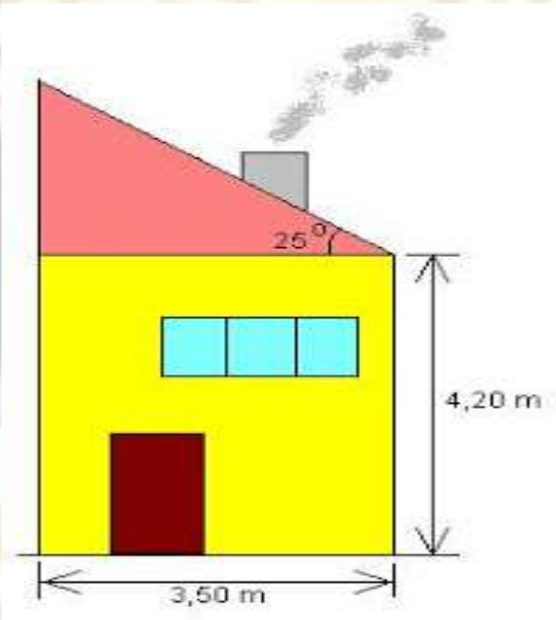
b) O ângulo de elevação do topo da encosta tomado a partir do pé de uma árvore é de 60º. Sabendo-se que a árvore está distante de 50 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore do topo da encosta:



c) Qual é a altura da árvore:



d) Qual a altura do telhado da casa? E a altura da casa?



ATIVIDADE II

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

DURAÇÃO PREVISTA: 4 aulas

ASSUNTO: Ciclo trigonométrico

OBJETIVOS: Compreender onde se encontra a extremidade de qualquer arco em um ciclo trigonométrico.

PRÉ-REQUISITOS: Conversão de graus em radianos e vice e versa. Conhecer as características de um círculo (raio, diâmetro,... etc.).

MATERIAL NECESSÁRIO: Caderno, lápis.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Individual.

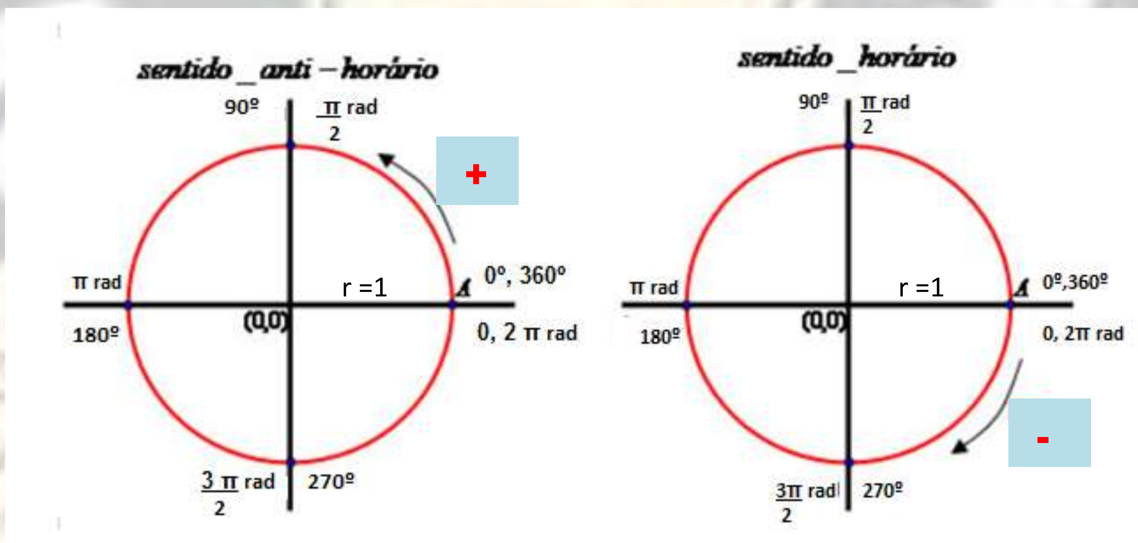
DESCRITORES ASSOCIADOS: H21 Transformar grau em radiano ou vice-versa.

Ciclo trigonométrico

Chamamos de ciclo trigonométrico a circunferência que contenha as seguintes características:

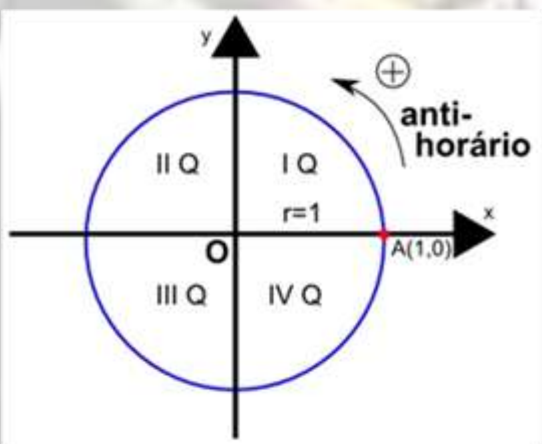
- *O centro é a origem do plano cartesiano.*
- *O raio é unitário (r=1)*
- *O ponto A é a origem do ciclo trigonométrico. A localização da extremidade de um arco varia de acordo com o comprimento desse arco.*
- *Sentido positivo é o anti-horário.*
- *O sentido negativo é sentido horário.*

Veja a representação abaixo:



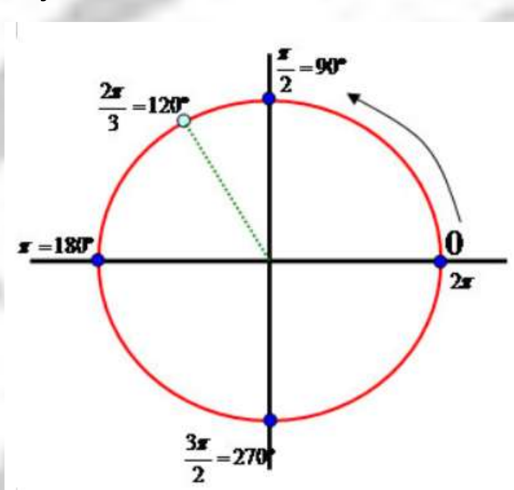
Localização da extremidade de um arco no ciclo trigonometrico.

Os eixos cartesianos dividem o ciclo em quatro arcos iguais, no qual chamamos de quadrante. Veja:



Por exemplo, é dado o arco ***P*** que mede 120º, onde esse arco se encontra no ciclo trigonométrico?

Vejamos:



Cada quadrante possui um arco de 90º, logo, para 120º temos, 90º+ 30º, ou seja, ultrapassa o primeiro quadrante e encontra-se no 2º quadrante.

Em resumo temos: (sendo ***P*** qualquer arco);

- ***P*** Є QI, se e somente se, $0° < x < 90°$ ou $0 < x < \frac{\pi}{2}$
- ***P*** Є QII, se e somente se, $90° < x < 180°$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
- ***P*** Є QIII, se e somente se, $180° < x < 270°$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
- ***P*** Є QIV, se e somente se, $270° < x < 360°$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Agora vamos treinar!

Exercícios.

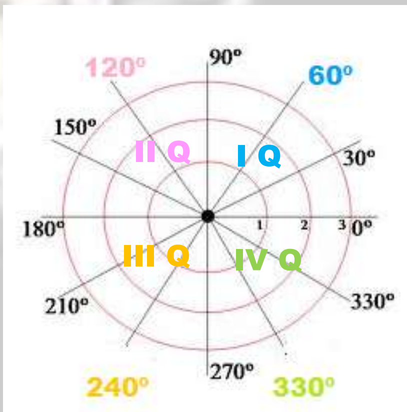
1) **Determine o quadrante que pertence a extremidade do arco pedido:**

(Exercícios resolvidos)

a) **Do arco de 60º**

Resposta: A extremidade do arco de 60º pertence ao 1º *quadrante,*

pois 0º < ***60º*** < 90º.



b) **Do arco de 240º**

Resposta: A extremidade do arco de 240º pertence ao

3º *quadrante, pois 180º <* ***240º*** < 270º.

c) **Do arco de 120º**

Resposta: A extremidade do arco de 120º pertence ao 2º *quadrante, pois* $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$.

d) **Do arco de 330º**

Resposta: A extremidade do arco de 330º pertence ao 4º *quadrante, pois* $270^\circ < 330^\circ < 360^\circ$.

Arcos com mais de uma volta

E o arco de 470º? Em qual quadrante está?

Um arco de 470º tem mais de uma volta, pois 470º > 360º, daí fazemos?

$$\begin{array}{r} 470^\circ \\ \underline{-360^\circ} \\ 110^\circ \end{array} \longrightarrow 90^\circ < 110^\circ < 180^\circ$$

sendo assim o arco de 470º pertence ao 2º quadrante.

Arcos negativos

Um arco de -110º está na primeira volta negativa. Vamos chamar esse ponto onde o arco para de ponto *P*. Se saímos do ponto *P* e andarmos uma volta no sentindo anti-horário (+ 360º) paramos novamente no ponto *P*.

$-110^\circ + 360^\circ = 250^\circ \longrightarrow \quad 180^\circ < 250^\circ < 270^\circ$

Concluímos assim que um arco de -110º pertence à primeira volta negativa e tem a mesma extremidade que um arco de 250º, que pertence ao 3º quadrante na primeira volta positiva.

Arcos Côngruos

Dois ou mais arcos são congruente quando possuem a mesma extremidade. Contudo não podemos garantir que eles possuam o mesmo comprimento, pois eles podem possuir um número inteiro de voltas completas diferentes.

Nesse caso devemos aplicar uma definição geral para representar arcos e todos os seus côngruos:

$$\boxed{\alpha + 360^\circ . k \text{ (em graus) ou } \alpha + 2\pi . k \text{ (em radianos)}}$$

Onde ***α*** é a medida do arco côngruo da 1º volta positiva e K Є Z.

Exercícios resolvidos:

1) Determinar um arco côngruo ao arco

a) 30º

2 representa o número de voltas completas dadas na circunferência.

$\alpha + 360º . K \longrightarrow 30º + 360º . 2 = 750º$

- *Nesse caso pode-se dizer que o arco de 30º é côngruo com o arco de 750º*

3 voltas completas

b) $\frac{\pi}{3}$ rad

$\alpha + 2\pi . K \longrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi . 3 = \frac{7\pi}{3}$ rad

- *Nesse caso pode-se dizer que o arco de* $\frac{\pi}{3}$ *é côngruo com o arco de* $\frac{7\pi}{3}$.

Agora é com você!

Exercícios:
Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos arcos abaixo:

a) 1
5º

b) 1
42º

c) 1
05º

e) $\frac{9\pi}{2}$ rad

f) $\frac{11\pi}{18}$ rad

g) $\frac{5\pi}{4}$ rad

h) - 740º

i) -100º

j) -300º

k) $-\frac{\pi}{6}$ rad

l) $-\frac{3\pi}{5}$ rad

2) Identifique se os arcos abaixo são côngruos:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{25\pi}{6}$ rad

- ***Sim ( )***
- ***Não ( )***

b) $\frac{-\pi}{3}$ rad e $-\frac{13\pi}{3}$ rad

- ***Sim ( )***
- ***Não ( )***

c) $\frac{\pi}{5}$ rad e $\frac{32\pi}{6}$ rad

- ***Sim ( )***
- ***Não ( )***

Para melhor entendimento e fixação resolver exercícios do livro.

ATIVIDADE III

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

DURAÇÃO PREVISTA: 2 aulas

ASSUNTO: Função Seno

OBJETIVOS: Compreender a função seno no ciclo trigonométrico.

PRÉ-REQUISITOS: Conhecer o ciclo trigonométrico.

MATERIAL NECESSÁRIO: Sala de vídeo, cartolina para confecção do ciclo trigonométrico,

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
.

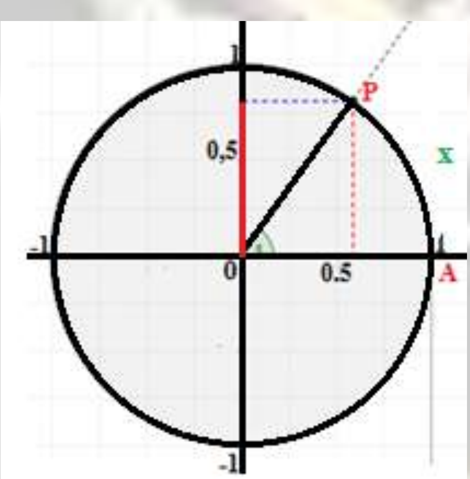
DESCRITORES ASSOCIADOS: H12 Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).

Função seno

Consideramos um arco **AP**, cuja medida é o número real *x*, denominamos *seno* do arco **AP** o valor da ordenada do ponto **P.**

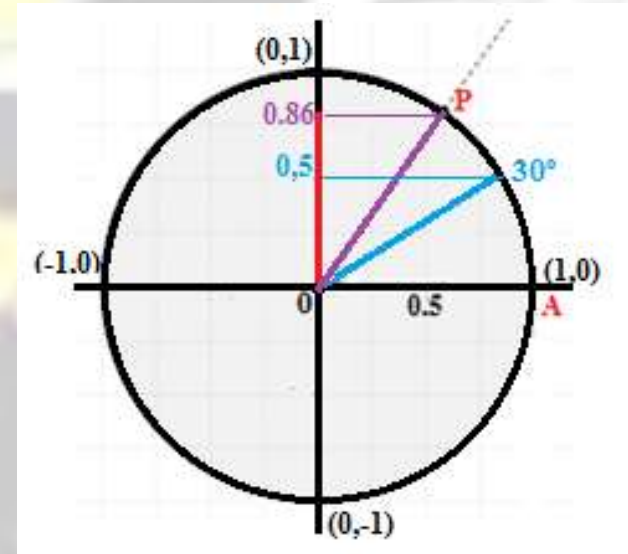
y = sen x

Vejamos no ciclo ao lado:



Exemplo:
Veja no ciclo trigonométrico:

- **O seno de 30º é ½**
- **O seno de 60º é √3/2 ou aproximadamente 0,86.**



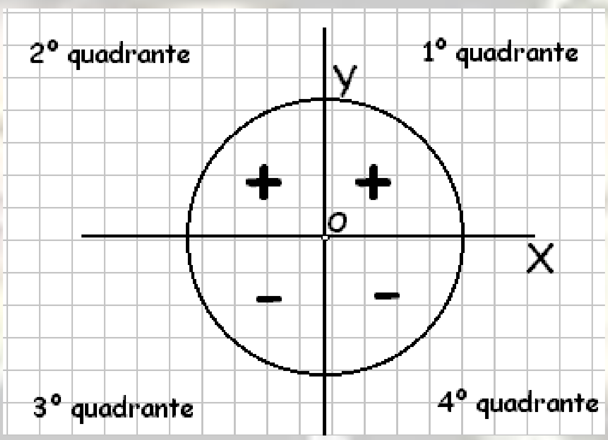
Reforçar que a função seno "ocupara" o lugar do y no plano cartesiano, ou seja, o seno terá o segundo valor do par ordenado nas extremidades do ciclo. Exemplo:

- *sen 90º = 1*
- *sen 180º = 0.*
- *sen 270º = -1*
- *sen 0º ou 360º = 0*

Sabendo que o raio do ciclo trigonométrico é unitário (como foi visto na atividade II), podemos determinar o maior ou menor valor do seno?

Resposta: *sim. Como o raio é unitário temos que, a função seno terá um valor entre -1 e 1. Logo, o maior valor encontrado será 1 e o menor -1.*

Sinais da função seno



Sinais				
Quadrantes	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**
Seno	+	+	-	-

A fim de aprimorar entendimento do aluno assitir ao vídeo "Aula sobre Função" no site:

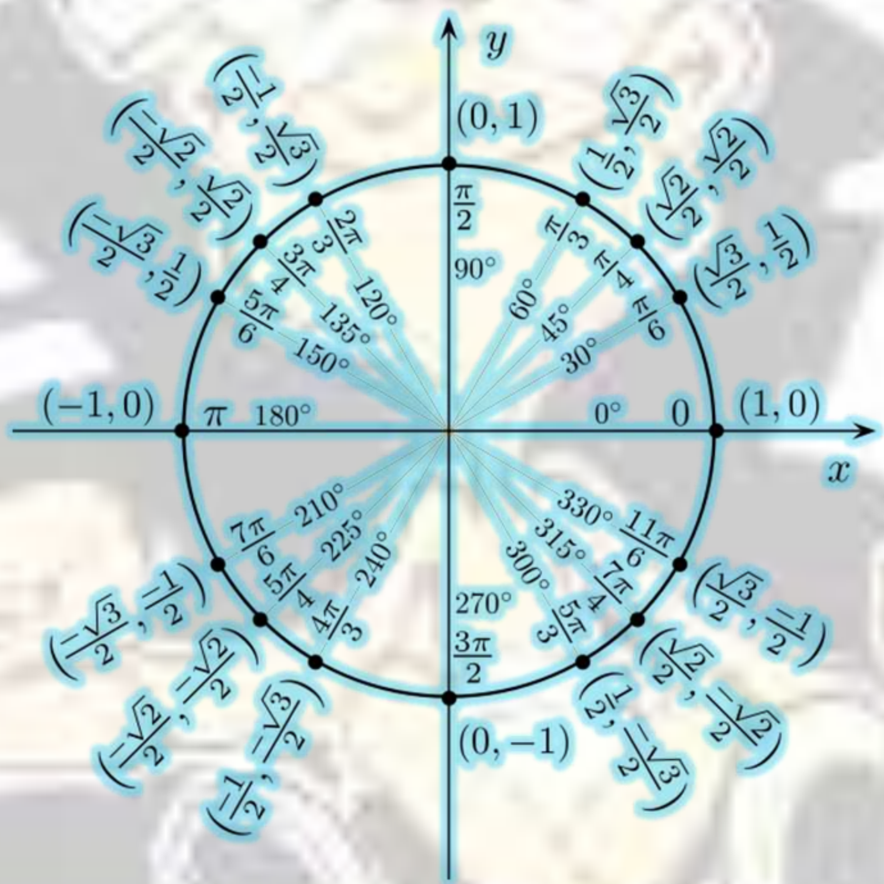
http://www.youtube.com/watch?v=z7X9PuY8Ekg&feature=related

http://www.textoonline.com/assistir-

Atividade extra: *Confecção de um círculo trigonométrico. Podendo ser feito em sala com o auxílio do professor.*

A turma será dividida em grupos e essa atividade será pontuada. O intuito é que o aluno vá se familiarizando com os arcos. Esses trabalhos ficarão expostos na sala para possíveis consultas.

Exemplo:



http://matimage.blogspot.com

Exercícios:

1) Calcule:

a) sen 30º

Exemplo: sen 30º= ½

(Utilizar o ciclo trigonométrico)

b) $sen\ 45º=$

c) $sen\ 210º=$

d) $sen\ 30º$

e) $sen\ \frac{9\pi}{6}\ rad$

f) $sen\ \pi\ rad$

g) $sen\ 2\pi\ rad$

h) $sen\ \frac{3\pi}{2}\ rad$

2) Simplifique as expressões abaixo:

a) y = sen (-90º) + 2. sen 810º

Exemplo:

y = sen (-90)+ 2. sen 90º

y = -1 + 1

y = 0

810º	450º
-360º	-360º
450º	090º

Temos que, 810º e 90º são côngruos, como sen 90º = 1 então, sen 810º = 1.

b) $y = \frac{2.\ sen\ \pi + 3.\ sen\ 2\pi}{3}$

c) $y = \frac{3.\ sen\ \pi/3 + 5\ .\ sen\ 5\pi/6}{sen\ \pi}$

3) Calcule o valor da soma das raízes para;

a) $sen\ x = 0$

AVALIAÇÃO

- Avaliação deve ser continua durante todo o processo de aplicação do plano de trabalho.

- Os exercícios no decorrer do plano de trabalho (páginas 07, 08, 13, 14, 18) devem ser pontuados.

- A atividade da página 17 será uma forma de avaliação e será pontuada.

- Aplicação de avaliação escrita individual a fim de avaliar o desenvolvimento lógico do aluno para resolver questões que envolvam trigonometria no triangulo retângulo e funções trigonométricas. (100 minutos).

BIBLIOGRAFIA

- BARROSO, Juliane Matsuba. Volume 1: Conexões com a Matemática: Ensino médio. Editora Moderna, São Paulo, 2010-1º edição.

- Matrizes de Referência para Avaliação Diagnóstica do Saerjinho em Matemática – oferecida pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro.

- IEZZI, Gelson, 2010_Matemática ciências e aplicações 1^0 ano ensino médio/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenzanzajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. 6º edição São Paulo_2010: ed. Saraiva.

- ZOLD, Harold, CORREA, Sérgio, 2002_Novo Manual Nova Cultural Matemática-Edição integral São Paulo, 2002: ed. Nova Cultural.

- Endereços eletrônicos acessados no dia 25/11/2012.

  Os exercícios *a* e *b* das páginas ***07*** e ***08*** foram copiados do site:
  http://www.colegiocatanduvas.com.br/desgeo/trigonometira/

  e os exercícios *c* e *d* da página ***08*** foram copiados do site:
  http://matimage.blogspot.com.br/search/label/trigonometria#axzz2ECQnCXpX

- Outros sites acessados no dia 25/11/2012

  http://www.somatematica.com.br/emedio3.php

  http://www.brasilescola.com/matematica/circunferencia-trigonometrica.htm

  http://matimage.blogspot.com