Formação Continuada em Matemática

Matemática 3º ano – 4º Bimestre

Plano de Trabalho

Polinômios e Equações Algébricas

Tarefa 1

Cursista: Alessandra Baldanza Raymundo Manhanini

Tutora: Paulo Roberto Castor Maciel

Sumário

Introdução

Curiosamente, as leis físicas que regem o mundo natural são representadas por relações matemáticas. Em alguns casos, como por exemplo, a cinemática (movimento dos corpos), a aplicação das leis de Newton a um dado sistema quase sempre leva a equações polinomiais que descrevem a velocidade e a posição de algum corpo em qualquer instante de tempo. Assim, sabendo resolver polinômios podem-se achar as soluções de movimento para um sem-fim de sistemas em ciências naturais.

O objetivo deste trabalho é criar e propor uma série de atividades, para que os alunos entrem em contato com polinômios da maneira como eles surgiram na História, e também para que operem com esses números. Existe também uma preocupação no sentido de desenvolver uma instrução mais compreensível, com base nas sequências didáticas, que motive o aluno a interagir com o conteúdo. Vale salientar que o **objetivo geral** será verificar quais os possíveis benefícios que poderemos obter com a mudança de metodologia do ensino de polinômios mediante a introdução de atividades direcionadas para serem desenvolvidas pelo aluno na sala de aula.

Ao ensinar álgebra, tento apresentar a matéria como relevante e útil, mas não creio que seja necessário manter sempre as considerações de "relevância" ligadas ao mundo real. A maioria dos meus alunos não continuará estudando Matemática e tento ensinar-lhes que a álgebra é um instrumento que se usa em Matemática superior e é uma linguagem comum e um meio de comunicação. As aplicações ao mundo real são importantes, mas também é bom que os alunos vejam como se usa a álgebra para o bem da Matemática. A aritmética dos polinômios é uma boa área para implementar essa filosofia. A manipulação de expressões polinomiais é uma técnica essencial; no entanto, como qualquer habilidade que exige prática, pode tornar-se repetitiva e monótona.

Alguns “fatos surpreendentes” permitem ao aluno “descobrir” e então demonstrar esses fatos, usando a aritmética dos polinômios. Alguns dos fatos envolvem “truques” para cálculo mental rápido, que podem ser explicados, usando uma representação polinomial simples.

Para a totalização do plano de trabalho serão necessários dez tempos de cinquenta minutos, para a realização de todas as atividades propostas e dois tempos de cinquenta minutos para a avaliação do conteúdo ensinado.

Desenvolvimento

O professor no decorrer da aula deve trabalhar com os conceitos envolvidos no estudo dos Polinômios e Equações Algébricas, com atividades simples e que irão utilizar materiais manipuláveis, ou seja, usará jogos para fixar os conceitos estudados. ***Em toda a parte teórica do plano de trabalho a metodologia adotada será: apresentação ao aluno através do notebook e data show, com slides em Power point.***

Deverá ser realizado inicialmente, um debate e elaborado um relatório com os alunos sobre as aplicações dos polinômios de acordo com a pesquisa manuscrita solicitada antes da introdução do assunto a ser estudado. A intenção será evitar as famosas perguntas: para que servem os polinômios? Aonde irei aplicar isso?

Após esse debate coloque os fatos surpreendestes e desafie o aluno:

Fato Surpreendente 1

Se dois números de dois algarismos têm iguais os algarismos das dezenas, e se os algarismos das unidades somam 10, pode-se calcular seu produto instantaneamente.

Se os alunos me testam, com 77×73, por exemplo, respondo instantaneamente 5621. Após mais um ou dois exemplos, revelo meu "truque": multiplica-se o algarismo das dezenas, 7, pelo seu sucessor, 8, achando 56, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 56 o produto dos algarismos das unidades, 7×3 ou 21, obtendo-se 5621. Podemos aumentar a confiança no processo, aplicando a vários outros casos, mas muitos exemplos não constituem uma demonstração. Porém, se usarmos binômios para representar os números a serem multiplicados, podemos dar uma demonstração que independe dos exemplos escolhidos. Represente por **a** o algarismo das dezenas dos dois números considerados e por **b** o algarismo das unidades do primeiro número. Então o algarismo das unidades do segundo número será $10 - b$.

Logo, $10a + b$ é o primeiro número e $10a + (10 - b)$, o segundo número. Seu produto é: $\mathbf{(10a + b) \times (10a + 10 - b)} = \ldots = \mathbf{100a\,(a + 1) + b\,(10 - b)}$.

Fato Surpreendente 2

Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado sempre será um quadrado perfeito.

Alguns exemplos levarão os alunos a suspeitar que essa afirmação é sempre verdadeira. Poderemos anotar nossas observações no quadro negro assim:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$,

$97 \times 98 \times 99 \times 100 + 1 = 94109401 = 9701^2$.

Para obter uma prova desse fato, represente os inteiros consecutivos por:

n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$.

Então $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$ (1)

Temos, agora, dois procedimentos possíveis. Alguns alunos notarão que o quadrado perfeito, nos nossos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da sequencia (é também o quadrado de 1 menos o produto do segundo pelo terceiro termo da sequencia). Poderemos observar, por exemplo, que

$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2 = (1 + 4 \times 7)^2$.

Expressando em polinômios, escrevemos:

$[1 + n(n+3)]^2 = n^4 + 6n^2 + 11n^2 + 6n + 1.$ (2)

Isso, além de confirmar que (1) é um quadrado perfeito, também nos diz de que número é o quadrado perfeito. Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (1) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e ver que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria, para um a conveniente, a forma:

$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)\, n^2 + 2an + 1$ (3)

Igualando os coeficientes em (1) e (3), temos:

$2a = 6$ e $2 + a^2 = 11$, ou seja, $a = 3$.

Então, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

Fato Surpreendente 3

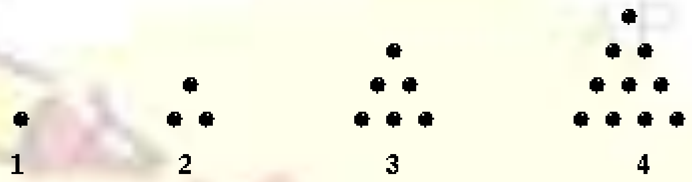
O quociente da divisão por 8 de um produto de quatro inteiros positivos consecutivos é um número triangular.

Definimos número triangular como sendo um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$ para **n** um natural positivo.

Logo, esses números são:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28... fazendo n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

A razão do nome triangular é explicada pela figura:



Testamos o resultado no exemplo:

(3 × 4 × 5 × 6) ÷ 8 = 45 que é o número triangular para n = 9.

Para a prova do resultado, escrevemos o produto de quatro inteiros consecutivos, dividido por 8, como:

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8} = \frac{m(m+3)}{2} \times \frac{(m+1)(m+2)}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{m^2+3m}{2} \times \frac{m^2+3m+2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{m^2+3m}{2} \times \left[\frac{m^2+3m}{2}+1\right] \times \frac{1}{2}.$$

Logo, temos um número triangular para n = $\frac{m^2+3m}{2}$, pois esse número é um inteiro positivo; verificar isso é um exercício interessante e foi proposto aos alunos.

<u>EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar os exercícios da folha para verificação dos fatos surpreendentes.</u>

A partir daí, introduza o conteúdo:

Polinômios

- **Estudando seus conceitos e propriedades.**

Os polinômios, **a *priori***, formam um plano conceitual importante na álgebra, entretanto possuem também uma relevante importância na geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos.

A definição de polinômio abrange diversas áreas, pois podemos ter polinômios com apenas um termo na expressão algébrica, como por exemplo: 2x, y, 4z, 2, 5, etc. Mas podemos possuir polinômios com uma infinidade de termos. Por exemplo:

$$P(x)=a_n\, x^n+a_{(n-1)}\, x^{(n-1)}+...+a_2\, x^2+a_1\, x+a_0$$

Como podemos notar, polinômios são compostos pelas várias expressões algébricas, desde aquelas que envolvem apenas números, até as que apresentam diversas letras, potências, coeficientes, entre outros elementos dos polinômios. Os polinômios se encontram em um âmbito da matemática denominado **Álgebra**, contudo a álgebra correlaciona o uso de letras, representativas de um número qualquer, com operações aritméticas. Portanto, podemos, assim, efetuar as operações aritméticas nos polinômios, que são: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação.

- **Valor numérico de um polinômio**

Observando um polinômio qualquer $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$, para acharmos o seu valor numérico, temos que ter um valor para a incógnita x. Então, se dissermos que $x = 2$ o valor que encontrarmos para $P(2)$ quando substituirmos x por 2 será o valor numérico do polinômio.

$$P(2) = 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 + 2$$

$$P(2) = 5 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 4 - 2 + 2$$

$$P(2) = 80 - 24 + 4$$

$$P(2) = 56 + 4 \Longrightarrow P(2) = 60$$

Concluímos que o valor numérico do polinômio $P(x) = 5x^4 – 3x^3 + x^2 – x + 2$, quando $x = 2$ será **P(2) = 60**.

* **Raiz ou zero do polinômio**

Se pegarmos um polinômio qualquer $P(x) = - 2x^3 + 5x^2 – x + 1 = 0$, a raiz dele será um número qualquer b se, somente se, o valor numérico do polinômio for zero quando $x = b$.

Exemplo:

$P(x) = x^2 - 1$, para calcularmos o zero da função, devemos colocar $P(x) = 0$, então:
$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = + 1$ ou $- 1$

Concluímos que -1 e +1 é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 1$.

• **Grau de um polinômio**

Um polinômio é formado por vários monômios separados por operações, então o grau de um polinômio corresponde ao monômio de maior grau. O único polinômio que não possui grau é o polinômio nulo $P(x) = 0$, por exemplo:

• $P(x) = x^3 - x^2 + 2x -3$ → temos 3 monômios que possuem grau, o que tem maior grau é x^3, então o polinômio tem o mesmo grau que ele.

$P(x) = x^3 - x^2 + 2x -3$ é do 3º grau.

• $P(x) = 5x^0 = 5$ → grau zero.

Operações com Polinômios:

- **Adição e Subtração de Polinômios**

O procedimento utilizado na adição e subtração de polinômios envolve técnicas de redução de **termos semelhantes**, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes. Observe os exemplos a seguir:

a) Adição

Exemplo 1: Adicionar $x^2 – 3x – 1$ com $–3x^2 + 8x – 6$.

$(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6)$ → eliminar o segundo parênteses através do jogo de sinal.

$+(–3x^2) = –3x^2$
$+(+8x) = +8x$
$+(–6) = –6$

$x^2 – 3x – 1 –3x^2 + 8x – 6$ → reduzir os termos semelhantes.

$x^2 – 3x^2 – 3x + 8x – 1 – 6$

$–2x^2 + 5x – 7$

Portanto: $\boxed{(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6) = –2x^2 + 5x – 7}$

Exemplo 2: Adicionando $4x^2 – 10x – 5$ e $6x + 12$, teremos:

$(4x^2 – 10x – 5) + (6x + 12)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.

$4x^2 – 10x – 5 + 6x + 12$ → reduzir os termos semelhantes.

$4x^2 – 10x + 6x – 5 + 12$

$4x^2 – 4x + 7$

Portanto: $(4x^2 - 10x - 5) + (6x + 12) = 4x^2 - 4x + 7$

b) <u>Subtração</u>

Exemplo 1: Subtraindo $-3x^2 + 10x - 6$ de $5x^2 - 9x - 8$.

$(5x^2 - 9x - 8) - (-3x^2 + 10x - 6)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.

$-(-3x^2) = +3x^2$
$-(+10x) = -10x$
$-(-6) = +6$

$5x^2 - 9x - 8 + 3x^2 - 10x + 6$ → reduzir os termos semelhantes.

$5x^2 + 3x^2 - 9x - 10x - 8 + 6$

$8x^2 - 19x - 2$

Portanto: $\boxed{(5x^2 - 9x - 8) - (-3x^2 + 10x - 6) = 8x^2 - 19x - 2}$

Exemplo 2: Se subtrairmos $2x^3 - 5x^2 - x + 21$ e $2x^3 + x^2 - 2x + 5$, teremos:

$(2x^3 - 5x^2 - x + 21) - (2x^3 + x^2 - 2x + 5)$ → eliminando os parênteses através do jogo de sinais.

$2x^3 - 5x^2 - x + 21 - 2x^3 - x^2 + 2x - 5$ → redução de termos semelhantes.

$2x^3 - 2x^3 - 5x^2 - x^2 - x + 2x + 21 - 5$

$0x^3 - 6x^2 + x + 16$

$-6x^2 + x + 16$

Portanto: $\boxed{(2x^3 - 5x^2 - x + 21) - (2x^3 + x^2 - 2x + 5) = -6x^2 + x + 16}$

Exemplo 3: Considerando os polinômios $A = 6x^3 + 5x^2 - 8x + 15$, $B = 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10$ e $C = x^3 + 7x^2 + 9x + 20$. Calcule:

a) A + B + C

$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) + (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) + (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$
$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 + 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10 + x^3 + 7x^2 + 9x + 20$
$6x^3 + 2x^3 + x^3 + 5x^2 - 6x^2 + 7x^2 - 8x - 9x + 9x + 15 + 10 + 20$
$9x^3 + 6x^2 - 8x + 45$

$\boxed{A + B + C = 9x^3 + 6x^2 - 8x + 45}$

b) A – B – C

$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) - (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) - (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$
$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 - 2x^3 + 6x^2 + 9x - 10 - x^3 - 7x^2 - 9x - 20$
$6x^3 - 2x^3 - x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 7x^2 - 8x + 9x - 9x + 15 - 10 - 20$
$6x^3 - 3x^3 + 11x^2 - 7x^2 - 17x + 9x + 15 - 30$
$3x^3 + 4x^2 - 8x - 15$

$\boxed{A - B - C = 3x^3 + 4x^2 - 8x - 15}$

Atividade 1

<u>Jogo do Alvo</u>

<u>Habilidades relacionadas:</u>
Efetuar operações com polinômios
Calcular o valor numérico de um polinômio

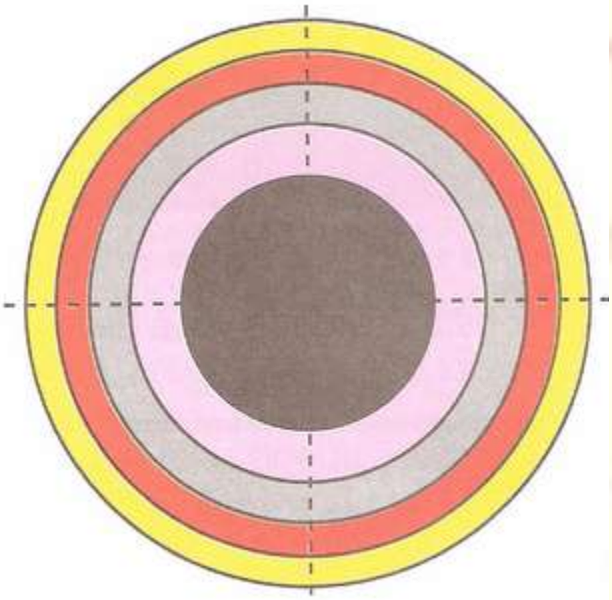
<u>Pré-requisitos:</u>
O aluno deverá saber adicionar e subtrair os números reais, conhecer as regras de sinais e saber descobrir o mínimo múltiplo comum.

<u>Material necessário:</u>
Alvo, grãos de milho e feijão

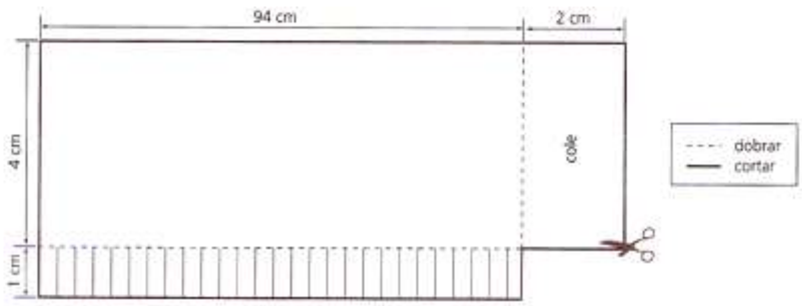
- **Construção do alvo**

Inicialmente decalque quatro vezes a figura. (raio do círculo 15 cm)

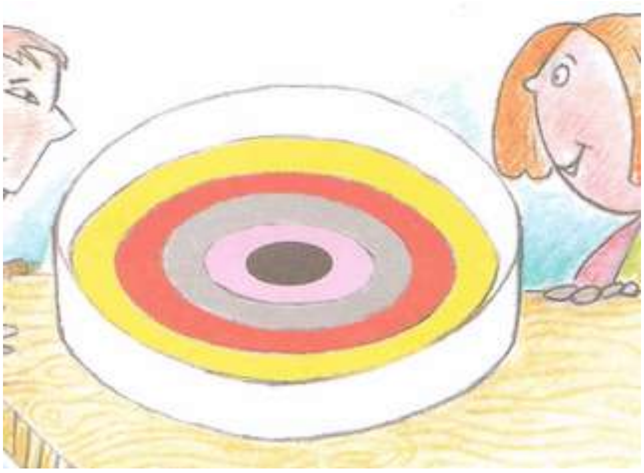
Cole-as numa cartolina ou papelão resistente para servir de base. Pinte o alvo com as cores indicadas.



Para fazer a faixa lateral, trace uma faixa na cartolina com as medidas indicadas no esquema. Corte o contorno, dobre a aba e picote-a como indicado. Cole as extremidades da faixa lateral e, em seguida, fixe-a ao redor do alvo.



Veja como o seu alvo vai ficar depois de pronto.



<u>Disposição dos jogadores:</u>

Em grupos de 3 a 5 alunos, mas as jogadas serão individuais.

<u>Recursos didáticos:</u>

Slides no Power point preparado pelo professor e data show.

<u>Objetivo:</u>

Proporcionar ao aluno um contato inicial com a Álgebra, por meio do trabalho com Monômios e Polinômios. Num primeiro momento, sugiro que se atribua números inteiros e de pequeno valor (zero ou próximo de zero) às incógnitas e que, gradativamente, a dificuldade do cálculo numérico seja aumentada.

<u>Desenvolvimento:</u>

Regras:
1ª) Cada aluno, na sua vez, joga 12 feijões no alvo. O jogador deve anotar cuidadosamente quantos feijões caíram em cada faixa, associando a quantidade de feijões com a cor da faixa. Em seguida, escreve uma adição para registrar esse fato e confere se o total de feijões anotado coincide com a quantidade de feijões jogada. Os jogadores devem jogar cinco rodadas, sempre fazendo anotações.
Ex.: 1 na faixa preta
3 na faixa rosa
5 na cinza
0 na vermelha
3 na amarela

2ª) Para simplificar a notação, é conveniente escolher uma única letra para representar cada cor e reescrever os resultados obtidos nas cinco rodadas, organizando-os como no exemplo abaixo. A utilização desse código facilita o registro.
Exemplo de ficha para colocar os resultados obtidos:
1ª Jogada:
2ª Jogada:
3ªJogada:
4ª Jogada:
5ª Jogada:
Total:

(pode haver divergência na escolha das letras, mas o resultado deve ser parecido com 1P + 3R + 5C + 0V + 3A).

3ª) Para facilitar o cálculo dos pontos, o jogador deve adicionar a quantidade de feijões que caiu em cada cor.

4ª) Ao final das cinco rodadas, cada jogador calcula o total de seus pontos, de acordo com os valores que o professor estipular para as cores.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO:

1 – Utilizar a lista de exercícios propostos para a fixação do conteúdo.

2 – Resolver os exercícios do livro didático para fixação do conteúdo.

Continuando os trabalhos com as operações de polinômios, apresentamos a multiplicação e a divisão de polinômios.

- **Multiplicação:**

a) Multiplicação de polinômio por monômio

Para entendermos melhor, observe o exemplo:

$(3x^2) . (5x^3 + 8x^2 – x)$ → basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação ou seja, multiplicar o monômio $3x^2$ por cada termo do polinômio dado e o resultado obtido será igual a:

$15x^5 + 24x^4 – 3x^3$

b) Multiplicação de polinômio por polinômio

Para lembrar:

→ **Para multiplicarmos dois polinômios quaisquer, devemos aplicar repetidamente a propriedade distributiva dos números reais**.

Veja o exemplo:

$(x – 1) . (x^2 + 2x - 6)$

$x^2 . (x – 1) + 2x . (x – 1) – 6 .(x – 1)$

$(x^3 – x^2) + (2x^2 – 2x) – (6x – 6)$

$x^3 – x^2 + 2x^2 – 2x – 6x + 6$ → reduzindo os termos semelhantes.

$\boxed{x^3 + x^2 – 8x + 6}$

Portanto, nas multiplicações entre monômios e polinômios aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação e reduzimos os termos semelhantes

- **<u>Divisão de polinômios:</u>**

Polinômio é uma expressão algébrica composta por dois ou mais monômios. Na divisão de polinômios, utilizamos duas regras matemáticas fundamentais: realizar a divisão entre os coeficientes numéricos e divisão de potências de mesma base (conservar a base e subtrair os expoentes).
Quando trabalhamos com divisão, utilizamos também a multiplicação no processo. Observe o seguinte esquema:

a) **<u>Método das Chaves:</u>**

$$\begin{array}{l|l} \textit{dividendo} & \textit{divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{quociente} * \textit{divisor} + \textit{resto} = \textit{dividendo}$$

Vamos dividir um polinômio por um monômio, com o intuito de entendermos o processo operatório. Observe:

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r|l} 12x^3 + 4x^2 - 8x & 4x \\ \cline{2-2} -12x^3 \qquad\qquad & 3x^2 + x - 2 \\ \cline{1-1} 0x + 4x^2 \qquad & \\ -4x^2 \qquad & \\ \cline{1-1} 0x \;\; -8x & \\ +8x & \\ \cline{1-1} 0 \quad & \end{array}$$

Caso queira verificar se a divisão está correta, basta multiplicar o quociente pelo divisor, com vistas a obter o dividendo como resultado.

Verificando → quociente . divisor + resto = dividendo
$4x \, . \, (3x^2 + x - 2) + 0$
$12x^3 + 4x^2 - 8x$

Caso isso ocorra, a divisão está correta. No exemplo a seguir, iremos dividir polinômio por polinômio. Veja:

Exemplo 2:

$$
\begin{array}{r|l}
10x^2 - 43x + 40 & 2x - 5 \\ \cline{2-2}
-10x^2 + 25x & 5x - 9 \\ \cline{1-1}
0x - 18x + 40 & \\
18x - 45 & \\ \cline{1-1}
-5 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente . divisor + resto = dividendo

(2x – 5) . (5x – 9) + (–5)
$10x^2 - 18x - 25x + 45 + (-5)$
$10x^2 - 43x + 45 - 5$
$10x^2 - 43x + 40$

Observe o exemplo de número 3:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2}
-6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1}
0x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 & \\
-2x^3 + 4x^2 - 5x & \\ \cline{1-1}
0x^3 - 2x^2 + 4x - 5 & \\
2x^2 - 4x + 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente . divisor + resto = dividendo

$(3x^2 + x - 1) . (2x^2 - 4x + 5) + 0$
$6x4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 5$
$6x4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$

Exemplo 4:

$$
\begin{array}{r|l}
12x^3 - 19x^2 + 15x - 3 & 3x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
-12x^3 + 4x^2 - 8x & 4x - 5 \\
\cline{1-1}
0x^3 - 15x^2 + 7x - 3 & \\
+15x^2 - 5x + 10 & \\
\cline{1-1}
2x + 7 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente . divisor + resto = dividendo

$(4x - 5) . (3x^2 - x + 2) + (2x + 7)$
$12x^3 - 4x^2 + 8x - 15x^2 + 5x - 10 + (2x + 7)$
$12x^3 - 19x^2 + 13x - 10 + 2x + 7$
$12x^3 - 19x^2 + 15x - 3$

b) <u>Divisão de Polinômios utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini</u>

Compreendendo um dispositivo que auxilia na divisão de polinômios: o dispositivo de Briot-Ruffini. Esse dispositivo utiliza uma raiz do polinômio e seus coeficientes para calcular a divisão do polinômio pela sua raiz.

Esse algoritmo é utilizado para dividirmos polinômios por um binômio do tipo (x - a). Esse dispositivo usará apenas os coeficientes do polinômio e o termo constante (a).

Chamemos de p(x) o polinômio a ser dividido (dividendo); e h(x) o divisor no qual h(x) =x - a. Com isso, a estrutura do dispositivo é a seguinte:

Termo constante do divisor com sinal trocado = a	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo
	Coeficientes do quociente	Resto

Para melhor compreendermos como este dispositivo funciona, utilizá-lo-emos em um exemplo, e explicaremos passo a passo seu processo.

Exemplo: Efetue a divisão de p(x) por h(x), na qual:

$p(x) = x^2 + 4x + 3 \quad e \quad h(x) = x + 1$

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplique esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo p(x).

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	
	1×(-1)=-1	3	

Repita o processo agora para o novo elemento, multiplique esse número pelo divisor e some-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	-3+3=0
	1×(-1)=-1	3	0
		3×(-1)=-3	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$q(x) = 1x + 3$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x).q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1).(x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$$
$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é verdadeira.

Para lembrar:

O dispositivo de Briot-Ruffini nos ajuda a achar os coeficientes do quociente e do resto quando fazemos a divisão de um polinômio por **x – a**.

Os binômios são do seguinte tipo, por exemplo:

x – 2 onde **a = 2**
x + 3 = x – (– 3) onde **a = – 3**
x – 1/3 onde **a = 1/3**

Teorema do Resto:

- **Teorema de D'Alembert**

O teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do teorema do resto, que são voltados para a divisão de polinômio por binômio do tipo x – a. O teorema do resto diz que um polinômio G(x) dividido por um binômio x – a terá resto R igual a P(a), para x = a. O matemático francês D'Alembert provou, levando em consideração o teorema citado acima, que um polinômio qualquer Q(x) será divisível por x – a, ou seja, o resto da divisão será igual à zero (R = 0) se P(a) = 0.
Esse teorema facilitou o cálculo da divisão de polinômio por binômio (x –a), dessa forma não sendo preciso resolver toda a divisão para saber se o resto é igual ou diferente de zero.

Exemplo 1
Calcule o resto da divisão $(x^2 + 3x - 10) : (x - 3)$.

Como diz o Teorema de D'Alembert, o resto (R) dessa divisão será igual a:

$P(3) = R$
$3^2 + 3 * 3 - 10 = R$
$9 + 9 - 10 = R$
$18 - 10 = R$
$R = 8$
Portanto, o resto dessa divisão será 8.

Exemplo 2
Verifique se $x^5 - 2x^4 + x^3 + x - 2$ é divisível por $x - 1$.

Segundo D'Alembert, um polinômio é divisível por um binômio se P(a) = 0.

$P(1) = (1)^5 - 2*(1)^4 + (1)^3 + (1) - 2$
$P(1) = 1 - 2 + 1 + 1 - 2$
$P(1) = 3 - 4$
$P(1) = - 1$

Como P(1) é diferente de zero, o polinômio não será divisível pelo binômio x – 1.

Exemplo 3
Calcule o valor de m de modo que o resto da divisão do polinômio
$P(x) = x^4 - mx^3 + 5x^2 + x - 3$ por $x - 2$ seja 6.

Temos que, $R = P(x) \rightarrow R = P(2) \rightarrow P(2) = 6$

$P(2) = 2^4 - m*2^3 + 5*2^2 + 2 - 3$
$2^4 - m*2^3 + 5*2^2 + 2 - 3 = 6$
$16 - 8m + 20 + 2 - 3 = 6$
$-8m = 6 - 38 + 3$
$-8m = 9 - 38$
$-8m = -29$
$m = \frac{29}{8}$

Exemplo 4
Calcule o resto da divisão do polinômio $3x^3 + x^2 - 6x + 7$ por $2x + 1$.

$R = P(x) \rightarrow R = P(-1/2)$

$R = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6.\left(-\frac{1}{2}\right) + 7$

$R = 3 . \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + 3 + 7$

$R = \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + 10$ (mmc)

$R = \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{8}\right) + \left(\frac{80}{8}\right)$

$R = \frac{79}{8}$

ATIVIDADE 2

Dados da Aula:

O que o aluno poderá aprender com esta aula:
Realizar operações entre polinômios

Duração das atividades:
2 aulas de 50 minutos

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno:

Operações algébricas

Estratégias e recursos da aula:

Atividade 1
O professor apresenta uma situação problema aos seus alunos, por exemplo:

(Unesp) a expressão **V(x) = x.(16-2x).(24-2x)** representa o volume, em cm3, de uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo-reto, em que x é a altura e os lados da base são 16 – 2x e 42 – 2x.

a) Se nenhuma das arestas da caixa pode ser menor que 1 cm, determine os valores possíveis da variável x.

b)Quando x = 5 cm, o volume da caixa é 420 cm3. Investigue se existem outros valores de x para os quais o volume é 420 cm3. Em caso afirmativo, dê esses valores.

As operações com polinômios estão descritas no livro didático e nos slides apresentado pelo professor, mas poderá ser apresentado aos alunos os vídeos abaixo, de acordo com a operação:

- Adição e subtração,
http://www.youtube.com/watch?v=6JWrNiBncl8&feature=related
- Multiplicação,
http://www.youtube.com/watch?v=p76yDrOwPls&feature=related

• Divisão:

* Método das chaves,
http://www.youtube.com/watch?v=708UF74gLWo&feature=related
* Teorema D'Alembert e Teorema do Resto,
http://www.youtube.com/watch?v=n_Ai-DdGaCQ&NR=1

* Briot-Ruffini, http://www.youtube.com/watch?v=U-_3OwXIojM&NR=1

O professor deverá ir questionando os alunos sobre o entendimento das operações. Caso necessite, apresente novamente o vídeo ou tire as dúvidas apresentadas pelos alunos.

Atividade 2

Lista de exercícios elaborada pelo professor para que seus alunos possam praticar.

Atividade 3

Professor utilize também uma atividade lúdica para consolidar os conhecimentos sobre operações com polinômios. Para isto, na página 26 do documento disponível em http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/845.pdf, existe a descrição do "jogo de álgebra".

Avaliação

A avaliação poderá ser da seguinte forma:

• Atividades em sala.

• Listas de exercícios envolvendo aplicações do assunto no cotidiano.

• Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.

• Competição entre grupos, de no máximo quatro alunos, onde cada grupo apresenta um problema outro caso consiga resolvê-lo, continua na competição, caso erre, será eliminado.

Equações Polinomiais

Equação polinomial ou algébrica é toda equação da forma p(x) = 0, em que p(x) é um polinômio:
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ de grau n, com $n \geq 1$.

Veja alguns exemplos:

1 - $x^4 + 9x^2 - 10x + 3 = 0$
2 - $10x^6 - 2x^5 + 6x^4 + 12x^3 - x^2 + x + 7 = 0$
3 - $x^8 - x^6 - 6x + 2 = 0$
4 - $x^{10} - 6x^2 + 9 = 0$

As raízes de uma equação polinomial constituem o **conjunto solução da equação**. Para as equações em que o grau é 1 ou 2, o método de resolução é simples e prático. Nos casos em que o grau dos polinômios é 3 ou 4, existem expressões para a obtenção da solução.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação polinomial p(x) = 0, de grau n onde $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Exemplo 1
Determine o valor do coeficiente K, sabendo que 2 é a raiz da equação:
$2x^4 + kx^3 - 5x^2 + x - 15 = 0$

Se 2 é raiz da equação, então temos:

$2(2)^4 + k(2)^3 - 5(2)^2 + 2 - 15 = 0$
$2*16 + k*8 - 5*4 + 2 - 15 = 0$
$32 + 8k - 20 + 2 - 15 = 0$
$8k + 34 - 35 = 0$
$8k - 1 = 0$
$8k = 1$
$k = 1/8$
Temos que o valor do coeficiente k é 1/8.

Exemplo 2

Determine o valor de m, sabendo que –3 é raiz da equação: $mx^3 + (m + 2)x^2 – 3x – m – 8 = 0$.

Temos que:

$m(–3)^3 + (m + 2)(–3)^2 – 3(–3) – m – 8 = 0$
$m(–27) + (m + 2)(9) + 9 – m – 8 = 0$
$–27m + 9m + 18 + 9 – m – 8 = 0$
$–27m + 9m – m = 8 – 18 – 9$
$– 19m = –19$
$m = 1$

O valor de m é 1.

Teorema da Decomposição

Todo o polinômio de grau n tem exatamente n raízes reais e complexas.

Demonstração
Pelo teorema fundamental, P(x) tem pelo menos uma raiz. Seja ela r_1.
Logo:

$$\mathbf{P(x) = (x - r_1) . Q(x)}$$

Q(x) é um novo polinômio de grau n-1, que possui, também, pelo menos uma raiz. Seja ela r_2.
Logo:

$$Q(x) = (x - r_2) . Q_1(x)$$

Fazendo o mesmo procedimento com $q_1(x)$ e continuando até a n-ésima expressão temos $Q_{n-1}(x) = (x - r_n) . Q_n(x)$ em Q_n o grau do polinômio será zero e Q_n será igual a uma constante que chamamos de a_n
Substituindo todas as equações obtidas na decomposição de P(x), teremos:

$$\mathbf{P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2). ... (x - r_n)}$$

Exemplo:
Compor o polinômio, sabendo que suas raízes são 1, 2 e 4. Como existem 3 raízes, n=3, então o polinômio é da forma:

$$P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3)$$

Fazendo $a_n = 1$, temos que:
$P(x) = 1. (x - 1).(x - 2).(x - 4)$
$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

Multiplicidade de uma raiz

Quando ao decompusermos P(x) uma mesma raiz ocorre mais de uma vez a denominamos de raiz múltipla de P(x).

Exemplo:

$$\text{Se } P(x) = (x - 1)^2.(x - 3)$$

Dizemos nesse caso que das 3 raízes de P(x), ***a raiz 1 tem multiplicidade 2*** enquanto que 3 é uma raiz simples

Teorema das raízes complexas

Se uma equação P(x) = 0, de coeficientes reais, apresentar uma raiz complexa (a + bi), podemos afirmar que o seu conjugado (a - bi) também será raiz de P(x), e com a mesma multiplicidade.

<u>Consequência</u>
Num polinômio P(x) com coeficientes reais e grau ímpar há, no mínimo, uma raiz real

Exemplo:

Calcular as raízes da equação:
$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = 0$,
sabendo que (2 + i) é uma das raízes

Se (2 + i) é uma das raízes, o seu conjugado (2 - i) também é raiz da equação.

Usando a forma:

$$P(x) = (x - r_1).(x - r_2).Q(x) = 0$$

temos que:
$P(x) = [x - (2+i)].[x - (2-i)].Q(x) = 0$
$P(x) = [(x-2) + i]. [(x-2) - i].Q(x) = 0$
$P(x) = [(x-2)^2 - i^2].Q(x) = 0$
$P(x) = [(x^2 - 4x +4) - (-1)].Q(x) = 0$
$P(x) = (x^2 - 4x + 5).Q(x) = 0$

Como o polinômio dado é de grau n=4 e sabemos, agora, que é divisível por $x^2 - 4x + 5$ restam duas raízes a se descobrir. Essas raízes produzem um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$.

Assim, podemos dizer que:

$$x^4 - x^3 -5x^2 + 7x + 10 = (x^2 - 4x + 5). (ax^2 + bx + c)$$

ou ainda que:

$$x^4 - x^3 -5x^2 + 7x + 10 =ax^4 + (b - 4a)x^3 + (c - 4b + 5a)x^2 + (-4c + 5b)x + 5c$$

Igualando os termos correspondentes temos que
$a = 1$
$b - 4a = -1$, logo $b=3$
$c - 4b + 5a = -5$, logo $c =2$

Logo $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

Fazendo $Q(x) = 0$, temos que $x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Assim, as raízes da equação são S = {-2, -1, 2+i, 2-i}

<u>EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático para a fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação dos enunciados e do raciocínio lógico.</u>

Relações de Girard

Albert Girard (1590 – 1633) foi um matemático belga que estabeleceu relações de soma e produto entre as raízes de uma equação do 2º grau. Por volta do século XVII, inúmeros matemáticos ocidentais desenvolveram estudos no intuito de estabelecer relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação quadrática. O grande obstáculo era a presença de números negativos como resultado das raízes, o que não era aceito entre os estudiosos. Foi Girard que desenvolveu um método capaz de determinar as relações com a utilização de números negativos.

Vamos observar as demonstrações a seguir, responsáveis pelas expressões da soma e do produto das raízes de uma equação do 2º grau.
Temos que uma equação do 2º grau possui a seguinte forma: ***$ax^2 + bx + x = 0$***.
Nessa expressão, temos que os coeficientes ***a, b*** e ***c*** são números reais, com ***$a \neq 0$***. As raízes de uma equação do 2º grau, de acordo com a expressão resolutiva são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma entre as raízes

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-b - b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-2b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{a}$$

Produto entre as raízes

$$\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) * \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \frac{-4ac}{4a^2} \Rightarrow -\frac{c}{a}$$

Exemplo 1
Vamos determinar a soma das raízes da seguinte equação do 2º grau:
$x^2 - 8x + 15 = 0$.

<u>Soma</u>

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

<u>Produto</u>

$$-\frac{c}{a} = -\frac{15}{1} = -15$$

As relações de Girard não servem somente para determinarmos a soma e o produto de raízes. Elas são ferramentas utilizadas para compor equações do 2º grau. As equações são representadas por: ***$x^2 - Sx + P = 0$***, onde S (soma) e P (produto).

Exemplo 2

Determine a equação do 2º grau que possui como raízes os números 2 e – 5.

<u>Soma</u>
$S = x_1 + x_2 \rightarrow 2 + (-5) \rightarrow 2 - 5 \rightarrow -3$

<u>Produto</u>
$P = x_1 * x_2 \rightarrow 2 * (-5) \rightarrow -10$

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - (-3)x + (-10)$

$x^2 + 3x - 10 = 0$ $\Longrightarrow$ essa é a equação procurada **$x^2 + 3x - 10 = 0$**

As fundamentações de Girard são responsáveis pela relação entre os coeficientes de uma equação algébrica e suas raies. Na equação do 2º grau, as relações são obtidas por meio das fórmulas da soma e do produto $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, respectivamente.

As equações de 3º grau possuem como lei de formação a equação algébrica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \quad 0$ e raízes x_1, x_2, x_3. A decomposição dessa equação permite à determinação de expressões matemáticas capazes de relacionas as raízes da equação. Observe pelo exemplo:

Exemplo 1:
(UFSC) As dimensões, em metros, de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $x^3-14x^2+56x-64$. Determine, em metros cúbicos, o volume desse paralelepípedo.

Resolução:
As Relações de Girard são relações entre coeficientes e raízes de equações, tornando muito simples algumas associações, observe as relações:

<u>Equação 3º Grau: $ax^3+bx^2+cx+d=0$</u>

Soma das raízes $(x_1+x_2+x_2) = \frac{-b}{a}$

Produto das raízes $(x_1.x_2.x_3) = \frac{-d}{a}$

$x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3 = \frac{c}{a}$

<u>Equação do 4º Grau: $ax^4 +bx^3+cx^2+dx+e=0$</u>

Soma das raízes $(x_1+x_2+x_3+x_4) = \frac{-b}{a}$

Produto das raízes $(x_1.x_2.x_3.x_4) = \frac{e}{a}$

$x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3+x_1.x_4+x_2.x_4+x_3.x_4 = \frac{c}{a}$

$x_1.x_2.x_3+x_1.x_2.x_4+x_1.x_3.x_4+x_2.x_3.x_4 = \frac{-d}{a}$

Na questão, como pede ***o volume do paralelepípedo***, basta você ter **o produto das raízes,** já que o volume no paralelepípedo é a multiplicação das três medidas, dadas pela equação. Então:

Produto das raízes = $\frac{-d}{a}$

Na equação do sólido $x^3-14x^2+56x-64$:

Produto das raízes = $\frac{-(-64)}{1}$

Produto das raízes = 64

Logo o volume do paralelepípedo = $64m^3$

Observe como Girard facilita sua vida.

Exemplo 2:

(UFSC) A soma das raízes da equação $4x^3 - 20x^2 + 23x - 7 = 0$ é:

Soma das raízes = $\frac{-b}{a}$

Soma das raízes = $\frac{-(-20)}{4}$

Soma das raízes = $\frac{20}{4}$

Soma das raízes = 5

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático para a fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação dos enunciados e do raciocínio lógico.

Avaliação

Com as atividades realizadas será possível avaliar o conhecimento dos alunos em relação:

- Identificar e determinar o grau de um polinômio,
- Calcular o valor numérico de um polinômio,
- Efetuar operações com polinômios,
- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas,
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffni na divisão de polinômios,
- Resolver equações polinomiais utilizando o Teorema fundamental da Álgebra,
- Utilizar as relações de Girard. .

Também será igualmente avaliado o nível de participação, o interesse pelo assunto, o comportamento do aluno durante execução das atividades e o seu entrosamento com seus colegas.

Existe a necessidade primordial de definir os papéis nessas atividades: ao professor caberá a estimulação do aluno para experimentar o novo (roteiros de ação), propondo caminhos e estratégias para que os objetivos educacionais sejam alcançados. Já os alunos, deverão assumir o papel central, participando ativamente de todas as etapas desse plano de trabalho. Os alunos deverão registrar todos os resultados de suas experimentações e observações em todas as etapas desse plano, com o objetivo de alcançar totalmente o aprendizado do tema abordado.

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu da competência relacionada ao tema estudado. O professor poderá avaliar a reflexão e o argumento critico usado pelos alunos

Acontecerá a aplicação de avaliação escrita individual, com questões contextualizadas, para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano envolvendo os números complexos e os outros tópicos estudados anteriormente.

E apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema apesar de o mesmo não constar no SAERJ.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

O plano de curso está sendo utilizado nas séries 3001 e 3002, no ano letivo em curso (2012), os resultados alcançados estão sendo relativamente bons, acredito que, foi porque, além de o número de aulas ter reduzido esse ano, o interesse maior estava voltado para o ENEM e também porque em minha cidade existem faculdades que trabalham com turmas especiais, turmas essas compostas de alunos que estão ainda cursando o 3º ano mas fizeram vestibular e foram aprovados. É certo que os resultados obtidos seriam melhores se grande parte dos alunos estivessem comprometidos, pois eles se apresentam extremamente desinteressados. Como comentei no fórum, acredito que a participação seria muito melhor se o assunto em questão fosse ministrado nos primeiros bimestres do ano.

Infelizmente, não pude utilizar de nenhum roteiro de ação que envolve o uso de computador porque apenas 6 computadores estão disponíveis para os alunos em nossa sala de informática, o que dificulta trabalhos desse tipo, e também nossa sala de informática é utilizada pelo professor de Projeto Autonomia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MATEMATICA PAIVA, 3º Ano/Manoel PAIVA – 1ª Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

MATEMATICA DANTE, Volume Único/Luiz Roberto DANTE – 1ª Edição – São Paulo: Editora Ática, 2008.

MATEMÁTICA CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA, 3º Ano/Jackson RIBEIRO – 1ª Edição – São Paulo/2011.

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, 3º Ano/Gelson IEZZI, Osvaldo DOLCE, David DEGENSZAJN, Roberto PÉRIGO, Nilze de ALMEIDA – 6ª Edição – São Paulo/2010.

Endereços Eletrônicos:

- http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/02/as-relacoes-de-girard.html
- http://www.matematicaemexercicios.com/2010/12/equacoes-algebricas-3-relacoes-de.html
- http://www.brasilescola.com/matematica/polinomios.htm
- http://www.matematicadidatica.com.br/Polinomios.aspx
- http://www.algosobre.com.br/matematica/polinomios-e-equacoes-algebricas.html
- http://www.youtube.com/watch?v=Cq-weFujbf4&feature=related.
- http://calculu.sites.uol.com.br/Exercicios/Polioperacoes/polioperacoes.htm
- http://www.scribd.com/doc/3671592/Matematica-PreVestibular-Impacto-Funcoes-Funcao-Polinomial

Pontos positivos:

O uso de instrumentos didáticos, fatos surpreendentes e jogos como estratégia de ensino-aprendizagem na sala de aula realmente é recurso pedagógico que apresenta bons resultados, pois criamos situações que permitem ao aluno desenvolver suas próprias maneiras de resolução de problemas, que estimulam a sua criatividade e sobretudo a sua participação ativa no processo. (a participação ativa do aluno sobre o seu aprendizado estimula o raciocínio lógico, o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas).

Consegui o envolvimento e desenvolver e aprimorar as habilidades que compõem o raciocínio lógico e tive a oportunidade de criar um ambiente na sala de aula em que a comunicação foi excelente, tivemos muitos momentos de interação (eu e os alunos), trocamos experiências e claro, aconteceram também discussões.

Percebi que com os jogos, o aluno aprende a se relacionar consigo mesmo, com seus colegas e, porque não dizer, com o mundo. Ainda acho que deva haver o planejamento do uso de jogos em atividades pedagógicas, para certamente, encantar e favorecer o entendimento das propriedades matemáticas envolvidas. Esse planejamento serve à estruturação e o desenvolvimento do pensamento do aluno, e na conduta diante dos desafios que um jogo impõe se trabalha a formação básica da sua cidadania.

Com o auxilio dos jogos, tive a satisfação de ver o comprometimento de meus alunos, a participação efetiva e, sobretudo a alegria de aprender brincando. Vou continuar utilizando, sempre que possível jogos para auxiliar no ensino de alguns conteúdos matemáticos. (estou me aventurando na criação de alguns, falta experimentar).

Pontos Negativos:

Por incrível que possa parecer, meus problemas mais uma vez, não foram quanto à utilização efetiva dos jogos, o primeiro problema ocorrido foi durante a confecção dos mesmos e a resistência oferecida pelo professor de outras áreas, (o medo do “novo” é inevitável).

O problema da separação dos grupos ainda aconteceu (alguns alunos ainda não interagem plenamente com seus colegas de sala). E de novo, eu tentei contornar a situação dizendo-lhes que estávamos ali, para além de nos socializarmos, para a troca de experiências, para o trabalho das emoções, para que pudéssemos nos descobrir (e redescobrir) como indivíduo, entre muitas outras finalidades.

Alterações:

Na realidade, não fiz alteração no meu plano de trabalho Creio que para a efetiva utilização do mesmo, vou pedir aos alunos que levem seus notebooks para a sala de aula, assim poderemos realizar as atividades propostas pelo curso sem entraves (a nossa sala de informática é ocupada pelos alunos do Projeto Autonomia e temos poucos pcs em funcionamento) e vou deixar livre a formação dos grupos. Apesar de alguns entraves, os objetivos esperados por mim foram alcançados.

Impressão dos alunos:
Percebi que nas situações em que adotei os jogos, a motivação foi grande, notei que os alunos apresentaram um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Com os jogos mais uma vez, potencializei a apreensão dos conceitos matemáticos e me certifiquei que os alunos foram estimulados e se envolveram com as atividades. Trabalhar com outras áreas, fez com que meu aluno enxergasse a Matemática como uma aliada.

Questionamentos aconteceram muitos. Mas de certa forma, foram interessantes: meu aluno **Rômulo d**isse: **Alessandra*, você utilizando esses jogos está prendendo a nossa atenção e ao mesmo tempo estamos fixando todo o conteúdo....Trabalhar Matemática com Geografia e Artes, nos fez perceber que estamos "matematicando" a todo instante. É uma pena que só começamos a trabalhar assim esse ano e em agosto, se isso tivesse sido feito desde o início de nossa vida escolar, estaríamos com a Matemática na ponta da língua. Gosto disso..."***

Já o ***Osório***, *disse: "**fazer Matemática dessa forma é interessante e muito bom...porque você só apareceu em nossas vidas esse ano Alessandra? Percebi que a sua maior preocupação é mostrar pra nós o quanto a Matemática está ligada em nossa vida e como ela é bonita. Vou me lembrar sempre disso..."***

Gostaria de destacar o comentário de minha aluna ***Luiza: "Alessandra, quando você chegou no início do ano, não gostei de você, primeiro porque pensei que quem fosse dar aula para mim fosse meu pai, depois porque seus alunos anteriores diziam que você foi a melhor professora de Matemática que eles tiveram. Com o tempo você me conquistou, primeiro por gostar de ler (cada livro que eu estava lendo, você sabia falar dele e também porque vi que você leu alguns que eu indiquei) e depois por nos mostrar que a Matemática é simples, prática e que para aprendê-la é preciso treinamento... Você é dez!***

Eu estou extremamente feliz, pois estou consegui mostrar a beleza da Matemática para o meu aluno e a aprendizagem matemática ocorre de modo significativo quando o aluno se depara com situações que exijam investigação, reflexão e empenho, levando- o a construir e desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos.