

FORMAÇÃO CONTINUADA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

Professor: MARCOS DA SILVA RIBEIRO
Série: 3º ANO – ENSINO MÉDIO

AVALIAÇÃO DA EXECUÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1
POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

PONTOS POSITIVOS

Com a execução do meu Plano de Trabalho sobre Polinômios e Equações Algébricas de forma organizada por atividades, pude visualizar e apresentar todo conteúdo de forma detalhada, cronometrada e revisada, de forma que tal metodologia facilitou minha didática de aula e auxiliou aos alunos no quesito compreensão. As ações, sequências, formas de fixação, recursos, organização, habilidades, competências e metodologias utilizadas no desenvolvimento de todas as atividades planejadas e executadas no Plano de Aula, fizeram com que o ensino aprendido ficasse com uma forma mais transparente e mais próxima do real. As pesquisas realizadas sobre o assunto, através da história dos polinômios e suas aplicações, permitiram uma melhor aceitação do conteúdo, um maior interesse e uma melhor visualização na questão contextualização de problemas. A ênfase em situações-problemas baseadas no cotidiano permitiram uma melhor compreensão do assunto.

PONTOS NEGATIVOS

No meu ponto de vista, os pontos negativos do Plano de Trabalho foram: Além do tamanho proposto, a questão de que nem todos os alunos tem acesso a internet em suas residências e que na escola não temos máquinas suficientes e disponíveis para que façamos um trabalho individualizado. Acarreta com isso uma maior dispersão por parte de alguns alunos que se aproveitam para não realizar as tarefas propostas. Com relação ao conteúdo propriamente dito, infelizmente muitos alunos trazem consigo a deficiência básica no desenvolvimento de cálculos simples envolvendo operações. Isso atrapalha e muito no andamento da matéria.

ALTERAÇÕES

Sobre meu Plano de Trabalho vejo necessidade de alterações somente na questão de quantidade de conteúdo (ta muito extenso) e inserção dos pré-requisitos. Poderia talvez ao invés da efetivação individual no laboratório de informática nos quesitos pesquisa, aplicações e conteúdos, utilizar mais o data-show (ou vídeo) como forma coletiva da introdução e apresentação. No demais o mesmo foi muito bem recepcionado por parte dos alunos e que as dificuldades encontradas não são inerentes ao que foi apresentado e sim a uma questão logística e de base fundamental.

IMPRESSÕES DOS ALUNOS

Os alunos tiveram uma outra impressão após a execução do Plano de Trabalho, haja visto que não tinham a noção de “Polinômios e Equações Algébricas”, suas aplicações, fundamentos e desenvolvimento operacional. Havia muitas dificuldades que após todo processo das atividades executadas no Plano de Trabalho , considero como uma vitória do processo aprendizagem contextual.

INTRODUÇÃO

Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitam depois a resolução do problema, por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas.

O objetivo deste plano de trabalho é permitir que os alunos percebam, através de temas contextualizados, a utilização e a importância das Expressões Polinomiais e Equações Algébricas, além de aplicar o conhecimento adquirido na resolução de problemas. Transmitir o conhecimento sobre os conteúdos curriculares conforme: “campo algébrico simbólico dos polinômios e equações algébricas, identificação do grau, do valor numérico, dos teoremas, relações e dispositivos além da representação gráfica”, fazendo com que os alunos adquiram um conhecimento de representatividade através de atividades diferenciadas e exercícios práticos. Além disso, este plano apresenta todos os demais conteúdos e fundamentos de Polinômios e Equações Algébricas para uma aplicação real.

Há uma dificuldade do aluno em visualizar, interpretar enunciados, raciocinar e demonstrar interesse. Por esses motivos é fundamental apresentar aos alunos as áreas de atuação onde poderão aplicar o conhecimento do conteúdo ministrado, além da utilização vista por seu próprio cotidiano. É fundamental atrair o interesse do aluno, contando um pouco da história dos Polinômios e das Equações Algébricas, identificando aplicabilidades, gerando gráficos, utilizando recursos tecnológicos disponíveis e fundamentando o assunto com questões problemas oriundas de sistemas de avaliação.

Todo assunto aqui especificado será baseado em sites referenciados, livro didático imposto pela Escola com devida aprovação dos educadores responsáveis e direcionado ao conteúdo programático do Currículo Mínimo/Ensino Médio- 3º ano

Plano de Trabalho determinado para três semanas, com quatro tempos semanais e cinquenta minutos cada um. Será ministrado nesse período o conteúdo exposto, pesquisa e avaliação.

DESENVOLVIMENTO

1ª Atividade

ACÕES E SEQUENCIAS: Aprender um pouco da História dos Polinômios e Equações Algébricas, alguns conceitos, definições e representações.

FORMAS DE FIXAÇÃO: Leitura , visualização de vídeo e pesquisa

RECURSOS: Livro didático (Matemática - Dante) , Pesquisa via internet (Sala de Informática) e Vídeo (Polinômios e Expressões – volume 1-SBJ) - sala de projeção)

DIMINUIRÁ PARTE DO CONTEÚDO E DO TEMPO PARA A HISTÓRIA PROPOSTA E DARIA MAIOR ÊNFASE EM PASSAR VÍDEOS SOBRE O ASSUNTO (FORMA COLETIVA A EVITAR A DISPERSÃO DE ALGUNS ALUNOS POR FALTA DE MAQUINAS PARA TODOS – ESTENDERIA A PESQUISA PARA CASA)

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

ORGANIZAÇÃO: Em dupla ou trio

HABILIDADES E COMPETÊNCIAS: Fazer com que os alunos entendam um pouco da história dos Polinômios e Equações Algébricas e que identifiquem algumas aplicações. Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real e em outras áreas do conhecimento. Visualizar a importância do tema que será ministrado.

METODOLOGIA: Fazer leitura e pesquisa através de livros e computadores com acesso a internet **(VIDEO OU DATA-SHOW)**

História e estudo dos Polinômios e Equações Algébricas

Observação: Quase sempre os alunos perguntam “pra quê aprender isso professor ?” ou afirmam “nunca irei usar isso professor !”. Antes dessas perguntas ou indagações, podemos apresentar um pouco da história do tema que está sendo estudado e pedir que pesquisem algumas áreas que utilizam os conhecimentos que estão adquirindo

Abordar o conteúdo de polinômios implica em tratar de sua definição, história, ensino, além de novos tópicos. Eventos retratados envolvendo situações intrigantes e inesperadas. Como a história de dois matemáticos, que realizaram imensa contribuição aos estudos em Matemática. Por fim, verificam-se novas ou possíveis realizações envolvendo polinômios.

“A história dos polinômios coincide com a história da matemática. Ambas sem data de nascimento ou “cidade” natal. O pensamento matemático é desenvolvido pelo ser humano desde a época primitiva. Pode-se pensar nele presente há 50.000 anos, quando o homem dava forma aos barcos que o levaram à Austrália e planejava as quantidades de recursos a serem transportados durante a viagem. Ou mesmo há 2.000.000 de anos quando o *homo-hábilis* quebrava pedras para dar-lhe formas úteis.

Os polinômios são expressões algébricas cuja forma canônica é: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ (n natural, e $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $0 \leq i \leq n$), também definido como função racional inteira da variável. O maior expoente (n) da incógnita de uma expressão algébrica em sua forma canônica é dito grau do polinômio. Equações envolvendo expoentes negativos ou fracionários não são polinômios, portanto não faz sentido algum falar em grau, já que essa noção está diretamente ligada à de polinômios. Outra definição para polinômios de coeficientes reais remete a seqüências: o conjunto dos polinômios de coeficientes reais, denotado por P , é um conjunto de seqüências quase nulas¹, no qual estão definidas a adição, multiplicação e igualdade.

No decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de grandes matemáticos como Nicoló Fontana (Tartáglia), Ludovico Ferrari, Isaac Newton dentre muitos outros. Parte muito interessante dessa história envolve as equações polinomiais de 4º grau

Antigamente era comum disputas entre os matemáticos da época, nas quais se trocavam desafios. Numa dessas ocasiões um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu Gregori Cardano (grande “escritor” de matemática da época) a uma questão que envolvia a Equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$

Devido a registro muito antigos, os chamados papiros, sabemos que as equações algébricas existem há aproximadamente 4000 anos. Foram várias as maneiras utilizadas pelos egípcios para resolver tais equações. Mas foi a partir dos axiomas enunciados na obra Os Elementos de Euclides que se chegou ao método de resolução da equação do 1º grau utilizado até hoje. A obra de Euclides influenciou toda a produção científica posterior a ela e é o livro-texto mais antigo e que continua em vigor até os dias atuais. Os axiomas enunciados por Euclides no início dos Elementos e em que está fundamentada a resolução das equações são:

- i) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si ($a = c$ e $b = c \Rightarrow a = b$).
- ii) Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais ($a = b \Rightarrow a \pm c = b \pm c$).

iii) A parte é menor que o todo ($1 < 1 \forall m \in \mathbb{N}^* m$).

Além destes usamos também um outro axioma que não foi enunciado diretamente por Euclides, mas que facilmente aceitamos sua veracidade:

iv) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais ($a = b \Rightarrow ac = bc$).

Uma vez encontrada a maneira de resolver as equações do 1º grau, um grande passo foi dado, pois como veremos mais adiante, os métodos utilizados para resolver as equações de 2º e 4º graus foram obtidos na tentativa de se reduzir o grau da equação de modo a deixá-la solúvel pelo método já encontrado.

A História da Álgebra começa na Antiguidade, considerada como um sistema para resolver problemas matemáticos que envolvam números desconhecidos. Os problemas algébricos mais antigos hoje conhecidos datam do século XVII a.C. Estão registrados em um papiro descoberto em 1858 na cidade de Luxor, no Egito, por um antiquário escocês chamado Henry Rhind. Seus enunciados têm a seguinte forma: "Ah, seu inteiro, seu sétimo, fazem 19". Em álgebra moderna, a expressão pode ser traduzida por: $x + \frac{x}{7} = 19$. O número desconhecido, ou incógnita, é representado por um símbolo, neste caso o x , manipulado até seu valor ser determinado. O intervalo de tempo transcorrido entre a escrita do Papiro de Rhind e a elaboração desta forma de apresentar as equações algébricas ($x + \frac{x}{7} = 19$) é de 34 séculos.

Ninguém sabe exatamente quando nasceu ou morreu Diofante. Sabe-se apenas que viveu por 84 anos. Ao menos, este é o resultado do enigma elaborado por um de seus discípulos para descrever a vida do mestre: "A juventude de Diofante durou de sua vida; depois de mais , nasceu-lhe a barba. Ao fim de mais de sua vida, Diofante casou-se. Cinco anos depois teve um filho. O filho viveu exatamente metade do que viveu o pai, e Diofante morreu quatro anos depois da morte de seu filho. Tudo isso somado é o número de anos que Diofante viveu". O enigma pode ser traduzido por uma equação de primeiro grau onde x é a idade de Diofante: $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{12} + 4$ então , o resultado é 84


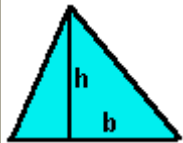
Atividade: Passar um vídeo sobre a historia , introdução e aplicação dos Polinômios e Equações Algébricas (com duração de 30 min) , depois leva-los para sala de informática e solicitar que façam uma pesquisa sobre o assunto, em dupla ou trio, dependendo da quantidades de alunos/máquina.

Observação: Pedir aos alunos que façam um relatório do conhecimento adquirido em relação aos conceitos sobre polinômios, identificação do grau, valor numérico, efetuar operações e demais termos vistos durante apresentação e pesquisa.

Algumas Aplicações dos Polinômios e Equações Algébricas

A Matemática possui muitas ferramentas que tem contribuído significativamente no desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento científico como, por exemplo, na Economia, na Biologia e na Física. Essas ferramentas como, por exemplo, fórmulas, gráficos e tabelas são muitos importantes nestas áreas por facilitarem a compreensão dos fenômenos em estudo. Os polinômios e as equações polinomiais, assunto abordado nesta pesquisa, possui muitas aplicações, tanto na própria Matemática e no cotidiano quanto nas áreas da Economia, Física, Administração, Engenharia e computação.

As expressões algébricas são encontradas muitas vezes em fórmulas matemáticas. Por exemplo, no cálculo de áreas de retângulos, triângulos e outras figuras planas.

Expressão algébrica	Objeto matemático	Figura
$A = b \times h$	Área do retângulo	
$A = b \times h / 2$	Área do triângulo	

Em matemática, funções polinomiais, polinômios ou polinômios é uma classe importante de funções simples e infinitamente diferenciáveis. Devido à natureza da sua estrutura, os polinômios são muito simples de se avaliar e por consequência são usados extensivamente em análise numérica. Determinar as raízes de polinômios, ou "resolver equações algébricas", é um dos problemas mais antigos da matemática. Alguns polinômios, tais como: $f(x) = x^2 + 1$ não possuem raízes dentro do conjunto dos números reais. Se, no entanto, o conjunto de candidatos possíveis for expandido ao conjunto dos números imaginários, ou seja, se se passar a tomar em conta o conjunto dos números complexos, então todo o polinômio (não-constante) possui pelo menos uma raiz (teorema fundamental da álgebra). Existe uma diferença entre a aproximação de raízes e a determinação de fórmulas concretas que as definem. Fórmulas para a determinação de raízes de polinômios de grau até ao 4º são conhecidas desde o século XVI (equação quadrática, Gerolamo Cardano, Niccolo Fontana Tartaglia). Mas fórmulas para o 5º grau têm vindo a escapar aos investigadores já há algum tempo. Em 1824, Niels Henrik Abel provou que não pode haver uma fórmula geral (envolvendo apenas as operações aritméticas e radicais) para a determinação de raízes de polinômios de grau igual ou superior ao 5º em termos de coeficientes (ver teorema de Abel-Ruffini). Este resultado marcou o início da teoria de Galois, onde se aplica a um estudo detalhado das relações entre raízes de polinômios.

Logística, não se espera que sejamos peritos em matemática, mas é necessário conhecimento a respeito dos conceitos matemáticos. Desenvolver competências como o raciocínio lógico-matemático. Ela é tão importante na vida acadêmica quanto em diversos momentos do cotidiano, tornando-se inerente ao raciocínio, à análise e ao controle de situações. Na administração, a matemática é útil em diversas situações: na elaboração de um planejamento, no controle do fluxo de mercadorias, proporciona também soluções de problemas empresariais, seja na área de recursos humanos, de produção, de comercialização, de finanças ou na própria área de administração geral.

Atividade: Pedir aos alunos que realizem uma atividade de pesquisa pela internet, buscando outras histórias, novos conceitos e novas aplicações.

2ª Atividade

ACÕES E SEQUÊNCIAS: Definir polinômios, Identificar e determinar o grau de um polinômio, Calcular o valor numérico de um polinômio e Resolver problemas, contextualizados ou não, que envolvam operações com polinômios

INSERIR PRÉ-REQUISITOS: Os algoritmos de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios com números inteiros. Propriedades operatórias com polinômios

FORMAS DE FIXAÇÃO: Resolução de Problemas

RECURSOS: Quadro branco, Livro didático (Matemática- Dante)

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

ORGANIZAÇÃO: Individual

HABILIDADES E COMPETÊNCIAS: Estimular o aluno a aplicar seus conhecimentos adquiridos ao longo do processo ensino/aprendizagem, para resolver problemas correlacionados ao conteúdo, entender as definições e representatividade para formular expressões que permitam através de uma equação, a resolução de problemas.

METODOLOGIA: Leitura, exercícios e demonstrações

Polinômios e Equações Algébricas

Os polinômios, *a priori*, formam um plano conceitual importante na álgebra, entretanto possuem também uma relevante importância na geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos.

A definição de polinômio abrange diversas áreas, pois podemos ter polinômios com apenas um termo na expressão algébrica, como por exemplo: $2x$, y , $4z$, 2 , 5 , etc. Mas podemos possuir polinômios com uma infinidade de termos. Por exemplo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Como podemos notar, polinômios são compostos pelas várias expressões algébricas, desde aquelas que envolvem apenas números, até as que apresentam diversas letras, potências, coeficientes, entre outros elementos dos polinômios.

Os polinômios se encontram em um âmbito da matemática denominado **álgebra**, contudo a álgebra correlaciona o uso de letras, representativas de um número qualquer, com operações aritméticas. Portanto, podemos, assim, efetuar as operações aritméticas nos polinômios, que são: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação.

Número de termos		Designação do polinômio
Um termo	Ex. $-x/2$	Monómio
Dois termos	Ex. $2x + 1/2$	Binómio
Três termos	Ex. $x^2 + x + 1$	Trinómio

Grau de um Polinômio

Um polinômio é formado por vários monômios separados por operações, então o grau de um polinômio corresponde ao monômio de maior grau. O único polinômio que não possui grau é o polinômio nulo $P(x) = 0$, por exemplo:

- $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 \rightarrow$ temos 3 monômios que possuem grau, o que tem maior grau é x^3 , então o polinômio tem o mesmo grau que ele
- $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ é do 3º grau.
- $P(x) = 5x^0 = 5 \rightarrow$ grau zero

O polinômio $-5x^4 + 14x^5y^2 - 7x^3y^2$ é do grau 7, pois o seu termo de maior grau é o segundo, que é do grau 7.

O polinômio $4a^2b^3 + 5a^5$ é do grau 5, pois ambos os termos do polinômio são deste grau.

Grau de um Polinômio em Relação a uma Certa Incógnita

Em relação à variável x o polinômio $-5x^4 + 14x^5y^2 - 7x^3y^2$ é do grau 5, pois o termo de maior grau nesta variável é do grau 5, que é o segundo termo.

Analisando o mesmo polinômio em relação à variável y , ele é do grau 2, já que tanto no segundo, quanto no terceiro termo o grau nesta variável é dois.

O polinômio $4a^2b^3 + 5a^5$ é do grau 5 na variável a e do grau 3 em relação à variável b .

Observação 1: Nesse momento é importante frisar que a ordem dos termos pode estar invertida.

Observação 2: Também podemos frisar casos que “não são considerados polinômios” :

- Expoente da variável x não pode ser negativa;

- Variável x não pode aparecer no denominador;

- Variável x não pode ser fracionário

- Variável x não pode aparecer sob radical

IMPORTANTE Fazer Exercícios Complementares

Valor Numérico de um Polinômio

Considerando o polinômio $P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$ chamamos de valor numérico de P para $x = \alpha$ o número:

$$P(\alpha) = a_0 \cdot \alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + a_2 \cdot \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \alpha + a_n$$

Portanto, o valor numérico de $P(\alpha)$ é a imagem de α por P .

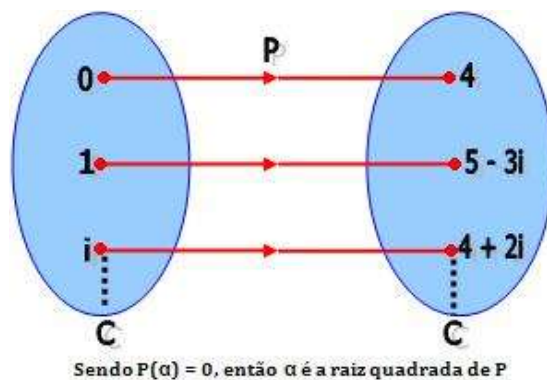
Exemplo:

$$P(x) = x^3 - 3ix^2 + 4$$

$$P(0) = 0^3 - 3i \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$P(1) = 1^3 - 3i \cdot 1^2 + 4 = 5 - 3i$$

$$P(i) = i^3 - 3i \cdot i^2 + 4 = 4 + 2i$$



Se observarmos um polinômio qualquer $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$, para acharmos o seu valor numérico que é o valor de $P(x)$, temos que ter um valor para a incógnita x . Então, se dissermos que $x = 2$ o valor que encontrarmos para $P(2)$ quando substituirmos x por 2 será o valor numérico do polinômio.

$$P(2) = 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 + 2$$

$$P(2) = 5 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 4 - 2 + 2$$

$$P(2) = 80 - 24 + 4$$

$$P(2) = 56 + 4$$

$$P(2) = 60$$

Concluimos que o valor numérico do polinômio $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$, quando $x = 2$ será **$P(2) = 60$** .

Dado um polinômio $p(x)$, temos que seu valor numérico é tal que $x = a$ é um valor que se obtém substituindo x por a , onde a pertence ao conjunto dos números reais. Dessa forma, concluimos que o valor numérico de $p(a)$ corresponde a $p(x)$ onde $x = a$. Por exemplo, dado o polinômio $p(x) = 4x^2 - 9x$ temos que seu valor numérico para $x = 2$ é calculado da seguinte maneira:

$$p(x) = 4x^2 - 9x$$

$$p(2) = 4 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2$$

$$p(2) = 4 \cdot 4 - 18$$

$$p(2) = 16 - 18$$

$$p(2) = -2$$

Exemplo 1

Dado o polinômio $p(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$, determine o valor numérico de $p(3)$.

$$p(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 10$$

$$p(3) = 4 \cdot 27 - 9 \cdot 9 + 24 - 10$$

$$p(3) = 108 - 81 + 24 - 10$$

$$p(3) = 41$$

O valor de $p(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 10$ para $p(3)$ é 41.

Exemplo 2

Determine o valor numérico de $p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 10x - 6$, para $x = 2$.

$$p(2) = 5 * 2^4 - 2 * 2^3 + 3 * 2^2 + 10 * 2 - 6$$

$$p(2) = 5 * 16 - 2 * 8 + 3 * 4 + 20 - 6$$

$$p(2) = 80 - 16 + 12 + 20 - 6$$

$$p(2) = 90$$

De acordo com o polinômio fornecido temos que $p(2) = 90$.

Raiz ou zero do polinômio

Se pegarmos um polinômio qualquer $P(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$, a raiz dele será um número qualquer b se, somente se, o valor numérico do polinômio for zero quando $x = b$.

Exemplo:

$P(x) = x^2 - 1$, para calcularmos o zero da função, devemos colocar $P(x) = 0$, então:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = +1 \text{ ou } -1$$

Concluimos que -1 e $+1$ é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 1$.

Se, ao calcularmos o valor numérico de um polinômio determinarmos $p(a) = 0$, temos que esse número dado por a corresponde à raiz do polinômio $p(x)$. Observe o polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 8$ quando aplicamos $p(2) = 0$.

$$p(2) = 2^2 - 6 * 2 + 8$$

$$p(2) = 4 - 12 + 8$$

$$p(2) = 12 - 12$$

$$p(2) = 0$$

Dessa forma, percebemos que o número 2 é raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 8$, pois temos que $p(2) = 0$.

IMPORTANTE Fazer Exercícios Complementares

Igualdade de Polinômios



A matemática é repleta de comparações – feitas por meio do sinal de igualdade – que denotam se dois objetos matemáticos são ou não iguais.

Sendo assim, no estudo dos polinômios, temos uma condição para que dois polinômios sejam iguais. Para que isso ocorra, temos que obter valores numéricos iguais para qualquer valor de **a**. Ou seja:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(a) = q(a) \text{ (para qualquer valor de } a\text{)}$$

Desta igualdade podemos obter uma informação:

$$p(x) - q(x) = 0 \text{ (Caso sejam polinômios semelhantes)}$$

Com isso, podemos afirmar que dois polinômios serão iguais se, e somente se, tiverem coeficientes respectivamente iguais, ou seja, se os coeficientes dos termos de mesmo grau forem todos iguais.

Com esta informação, podemos afirmar também que para dois polinômios serem iguais, devem ser polinômios de mesmo grau.

Exemplo:

Determine os valores de a, b, c, d de modo que os polinômios sejam iguais. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2$.

Temos que: $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 2x^2 + 4x - 2$

Com isso, podemos afirmar que:

$$a=1; b=2; c=4; d=-2$$

Pois, para que os polinômios sejam iguais, devem ser de mesmo grau e devem ter os coeficientes iguais. Como podemos ver, ambos são de terceiro grau: bastou igualarmos os coeficientes referentes a cada grau

Operações com Polinômios

IMPORTANTE Nas situações envolvendo cálculos algébricos, é de extrema importância a aplicação de regras nas operações entre os monômios.

Observação: Nesse momento seria importante lembrar conceitos básicos no que diz respeito às operações básicas entre expressões envolvendo números e letras, lembrar que na multiplicação entre termos com mesma base, deve-se repetir a base e somar os expoentes, entre outras observações.

As situações a serem apresentadas abordarão a adição, a subtração e a multiplicação de polinômios

Adição e Subtração

Considere os polinômios $-2x^2 + 5x - 2$ e $-3x^3 + 2x - 1$. Vamos efetuar a adição e a subtração entre eles.

Adição

$(-2x^2 + 5x - 2) + (-3x^3 + 2x - 1) \rightarrow$ eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal
 $-2x^2 + 5x - 2 - 3x^3 + 2x - 1 \rightarrow$ reduzir os termos semelhantes
 $-2x^2 + 7x - 3x^3 - 3 \rightarrow$ ordenar de forma decrescente de acordo com a potência
 $-3x^3 - 2x^2 + 7x - 3$

Subtração

$(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1) \rightarrow$ eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal
 $-2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1 \rightarrow$ reduzir os termos semelhantes
 $-2x^2 + 3x - 1 + 3x^3 \rightarrow$ ordenar de forma decrescente de acordo com a potência
 $3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

Multiplicação de polinômio por monômio

Para entendermos melhor, observe o exemplo:

$(3x^2) * (5x^3 + 8x^2 - x) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva da multiplicação
 $15x^5 + 24x^4 - 3x^3$

Multiplicação de polinômio por polinômio

Para efetuarmos a multiplicação de polinômio por polinômio também devemos utilizar a propriedade distributiva. Veja o exemplo:

$(x - 1) * (x^2 + 2x - 6)$
 $x^2 * (x - 1) + 2x * (x - 1) - 6 * (x - 1)$

$$(x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) - (6x - 6)$$

$$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 6x + 6 \rightarrow \text{reduzindo os termos semelhantes.}$$

$$x^3 + x^2 - 8x + 6$$

Portanto, nas multiplicações entre monômios e polinômios aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação.

Atividade: O ideal agora seria fazer uma atividade com que os alunos se familiarizem com os termos e operações.

IMPORTANTE Exercícios Complementares, Contextualizados ou não, mas direcionados ao SAERJINHO, SAERJ, ou qualquer vestibular :

Pedir aos alunos que façam a lista de exercícios propostos abaixo:

1 . Determine o valor de a e b no polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, sabendo que 1 é raiz do polinômio e $p(2) = 25$.

2 . (MACK – SP)

Calcule os valores de m, n e l para os quais o polinômio $p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2l)$ é nulo.

3 . (FAAP–SP)

Calcule os valores de a, b e c para que o polinômio $p(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

4 . (FEI–SP)

Determine A, B e C na decomposição

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

5 . (FEI – SP)

Sendo $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes a, b e c, sabendo que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ e $q(1) = 2$.

6 . (MACK – SP)

Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

Atividade para casa : Passar alguns exemplos e pedir aos alunos que realizem os exercícios propostos do capítulo do livro didático

IMPORTANTE: Revemos outros conceitos, abordamos conteúdo proposto pelo currículo mínimo, através de uma situação-problema muito comum dos vestibulares de hoje em dia.

OBS.: Verifique se os alunos conseguirem resolver as questões (debater as dificuldades encontradas)

3ª Atividade

ACÕES E SEQUÊNCIAS: Utilizar o teorema do resto e a Divisão de Polinômios para resolver problemas. Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios

INSERIR PRÉ-REQUISITOS: Os algoritmos de *divisão de polinômios* com números inteiros

FORMAS DE FIXAÇÃO: Leitura e Resolução de Problemas

RECURSOS: Livro didático (Matemática - Dante) e lousa branca

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

ORGANIZAÇÃO: Individual ou em dupla

HABILIDADES E COMPETÊNCIAS: Estimular o aluno a aplicar os conhecimentos adquiridos, relembrar conceitos e definições.

METODOLOGIA: Leitura e aplicação

Divisão de Polinômios

IMPORTANTE: Antes de começar a falar de divisão, é interessante lembrar os termos (divisor, dividendo, quociente e resto) e seus posicionamentos

Observação: lembrar que o divisor multiplicado ao quociente somado ao resto é igual ao dividendo

Polinômio é uma expressão algébrica composta por dois ou mais monômios. Na divisão de polinômios, utilizamos duas regras matemáticas fundamentais: realizar a divisão entre os coeficientes numéricos e divisão de potências de mesma base (conservar a base e subtrair os expoentes). Quando trabalhamos com divisão, utilizamos também a multiplicação no processo. Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array} \Leftrightarrow \text{quociente} * \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Tem algumas **observações a serem feitas**, como:

? ao final da divisão o resto sempre tem que ser menor que o divisor: $R(x) < D(x)$.

? quando o resto for igual a zero, a divisão é considerada exata, ou seja, o dividendo é divisível pelo divisor. $R(x) = 0$.

Observe a divisão de polinômio por polinômio abaixo, vamos partir de um exemplo, cada passo tomado no desenvolvimento da divisão será explicado.

Dada a divisão

$$(12x^3 + 9 - 4x) : (x + 2x^2 + 3)$$

Antes de começar a operação temos que fazer algumas verificações:

? se todos os polinômios estão em ordem conforme as potências de x.

No caso da nossa divisão devemos ordenar, ficando assim:

$$(12x^3 - 4x + 9) : (2x^2 + x + 3)$$

? observar se no polinômio $G(x)$ não está faltando algum termo, se estiver devemos completar.

No polinômio $12x^3 - 4x + 9$ está faltando o termo x^2 , completando ficará assim:
 $12x^3 + 0x^2 - 4x + 9$

Agora podemos iniciar a divisão:

$$12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 \quad \overline{) 2x^2 + x + 3}$$

? G(x) tem 3 termos e D(x) tem 3 termos. Pegamos o 1º termo de G(x) e dividimos pelo 1º termo de D(x): $12x^3 : 2x^2 = 6x$, o resultado **multiplicará** o polinômio $2x^2 + x + 3$ e o resultado dessa multiplicação **subtrairemos** pelo polinômio $12x^3 + 0x^2 - 4x + 9$. Assim teremos:

$$\begin{array}{r} 12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 \quad \overline{) 2x^2 + x + 3} \\ -12x^3 - 6x^2 - 18x \quad 6x \\ \hline -6x^2 - 22x + 9 \end{array}$$

? $R(x) > D(x)$, podemos dar continuidade à divisão, repetindo o mesmo processo anterior. Achando agora o segundo termo de Q(x).

$$\begin{array}{r} 12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 \quad \overline{) 2x^2 + x + 3} \\ -12x^3 - 6x^2 - 18x \quad 6x - 3 \\ \hline -6x^2 - 22x + 9 \\ +6x^2 + 3x + 9 \\ \hline -19x + 18 \end{array}$$

$R(x) < D(x)$, não damos continuidade a divisão, concluindo que:

O quociente é $6x - 3$ e o resto é $-19x + 18$.

Observação: Fazer exercícios

Vamos dividir um polinômio por um monômio, com o intuito de entendermos o processo operatório. Observe:

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r} 12x^3 + 4x^2 - 8x \quad \overline{) 4x} \\ -12x^3 \quad 3x^2 + x - 2 \\ \hline 0x + 4x^2 \\ -4x^2 \\ \hline 0x - 8x \\ +8x \\ \hline 0 \end{array}$$

Caso queira verificar se a divisão está correta, basta multiplicar o quociente pelo divisor, com vistas a obter o dividendo como resultado.

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo** $4x * (3x^2 + x - 2) + 0$
 $12x^3 + 4x^2 - 8x$

Caso isso ocorra, a divisão está correta. No exemplo a seguir, iremos dividir polinômio por polinômio. Veja:

Exemplo 2:

$$\begin{array}{r}
 10x^2 - 43x + 40 \quad | \quad 2x - 5 \\
 -10x^2 + 25x \\
 \hline
 0x - 18x + 40 \\
 18x - 45 \\
 \hline
 -5
 \end{array}$$

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo** $(2x - 5) * (5x - 9) + (-5)$

$$10x^2 - 18x - 25x + 45 + (-5)$$

$$10x^2 - 43x + 45 - 5$$

$$10x^2 - 43x + 40$$

Observe o exemplo de número 3:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 \quad | \quad 2x^2 - 4x + 5 \\
 -6x^4 + 12x^3 - 15x^2 \\
 \hline
 0x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 \\
 -2x^3 + 4x^2 - 5x \\
 \hline
 0x^3 - 2x^2 + 4x - 5 \\
 2x^2 - 4x + 5 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo**

$$(3x^2 + x - 1) * (2x^2 - 4x + 5) + 0$$

$$6x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 5$$

$$6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$$

Exemplo 4:

$$\begin{array}{r}
 12x^3 - 19x^2 + 15x - 3 \quad | \quad 3x^2 - x + 2 \\
 -12x^3 + 4x^2 - 8x \\
 \hline
 0x^3 - 15x^2 + 7x - 3 \\
 +15x^2 - 5x + 10 \\
 \hline
 2x + 7
 \end{array}$$

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo**

$$(4x - 5) * (3x^2 - x + 2) + (2x + 7)$$

$$12x^3 - 4x^2 + 8x - 15x^2 + 5x - 10 + (2x + 7)$$

$$12x^3 - 19x^2 + 13x - 10 + 2x + 7$$

$$12x^3 - 19x^2 + 15x - 3$$

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Compreendendo um dispositivo que auxilia na divisão de polinômios: o dispositivo de Briot-Ruffini. Esse dispositivo utiliza uma raiz do polinômio e seus coeficientes para calcular a divisão do polinômio pela sua raiz

O método tradicional para a divisão, utilizando o algoritmo da divisão. Entretanto, dois matemáticos (Paolo Ruffini e A. Briot) criaram um dispositivo prático para realizar esta divisão, dispositivo este que recebeu seus nomes: dispositivo de Briot-Ruffini.

Esse algoritmo é utilizado para dividirmos polinômios por um binômio do tipo $(x-a)$. Esse dispositivo usará apenas os coeficientes do polinômio e o termo constante (a) .

Chamemos de $p(x)$ o polinômio a ser dividido (dividendo); e $h(x)$ o divisor no qual $h(x)=x-a$. Com isso, a estrutura do dispositivo é a seguinte:

Termo constante do divisor com sinal trocado = a	Coeficientes de x do dividendo $p(x)$	Termo constante do dividendo
	Coeficientes do quociente	
		Resto

Para melhor compreendermos como este dispositivo funciona, utilizá-lo-emos em um exemplo, e explicaremos passo a passo seu processo.

Exemplo:

Efetue a divisão de $p(x)$ por $h(x)$, na qual:

$$p(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ e } h(x) = x + 1$$

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplique esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo $p(x)$.

-1	1	4	3
	1	$-1+4=3$	
	$1 \times (-1) = -1$	3	

Repita o processo agora para o novo elemento, multiplique esse número pelo divisor e some-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	$-1+4=3$	$-3+3=0$
	$1 \times (-1) = -1$	3	0
		$3 \times (-1) = -3$	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$$q(x) = 1x + 3$$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x).q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1).(x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é verdadeira.

Atividade: Pedir aos alunos que realizem os exercícios propostos do capítulo

IMPORTANTE: Buscar questões (situações-problemas) envolvendo o assunto

Podemos utilizar quantos exercícios e problemas forem possíveis, de acordo com o tempo e o ritmo da turma, sempre estimulando o raciocínio dos alunos.

IMPORTANTE: Exercícios Complementares, Contextualizados ou não, mas direcionados ao SAERJINHO, SAERJ, ou qualquer vestibular :

Pedir aos alunos que façam a lista de exercícios propostos abaixo:

01. (UESP) Se o polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 - 1$ é divisível por $x^2 + x - 1$, então m é igual a:

- a) -3
- b) -2
- c) -1
- d) 1
- e) 2

02. (UEL) Dividindo-se o polinômio $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x - 21$ por $x + 3$, obtêm-se:

- a) $x^3 - 2x^2 + x - 12$ com resto nulo;
- b) $x^3 - 2x^2 + 3$ com resto 16;
- c) $x^3 - x^2 - 13x + 35$ e resto 84;
- d) $x^3 - x^2 - 3x + 1$ com resto 2;
- e) $x^3 - x^2 + x - 7$ e resto nulo;

03. (UEL) Se o resto da divisão do polinômio $p = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é:

- a) -5
- b) -4
- c) 5
- d) 6
- e)

04. Sejam m e n determinados de tal modo que o polinômio $x^4 - 12x^3 + 47x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 7x + 6$. Então $m + n$ é igual a:

- a) 72
- b) 0
- c) -36
- d) 36

4ª Atividade

ACÕES E SEQUENCIAS: Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da decomposição. Representar graficamente uma função polinomial. Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

INSERIR PRÉ-REQUISITOS: Relações de Girard, funções polinomiais do 1º e 2º graus, teorema das raízes conjugadas complexas.

FORMAS DE FIXAÇÃO: Exercícios Propostos e Complementares

RECURSOS: Livro didático (Matemática - Dante) e lousa

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

ORGANIZAÇÃO: Individual

HABILIDADES E COMPETÊNCIAS: Estimular o aluno a aplicar seus conhecimentos adquiridos ao longo do processo ensino/aprendizagem, para resolver problemas correlacionados ao conteúdo

METODOLOGIA: Pesquisa e aplicação

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema (Gauss): Toda equação algébrica polinomial com coeficientes reais ou complexos, admite no conjunto dos números complexos, pelo menos uma raiz.

Teorema equivalente: Toda equação algébrica polinomial de grau n , com coeficientes reais ou complexos, admite exatamente n raízes, no conjunto dos números complexos.

Consequência: Toda equação algébrica polinomial real de grau n , admite no máximo n raízes, no conjunto dos números reais.

Qualquer equação algébrica, de grau restritamente positivo, aceita no campo complexo pelo menos uma raiz.

Em relação a este teorema vamos considerar apenas as observações e exemplos abaixo:

a) O teorema fundamental da álgebra apenas garante a existência de pelo menos uma raiz, ele não demonstra qual o número de raízes de uma equação algébrica nem como resolver tais raízes.

b) O T.F.A. somente tem valor para \mathbb{C} , já para \mathbb{R} este teorema não é válido. Isso quer dizer que em uma equação algébrica a condição de existência de raiz \mathbb{R} é incerta, já em \mathbb{C} é certeza que sempre terá pelo menos uma raiz.

c) Exemplo: A equação $x^2 + 1 = 0$ não possui raiz real, porém aceita no campo complexo os números i e $-i$ como raízes.

Problema: Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.

Solução: indicando por x e y os comprimentos dos catetos temos

$$xy/2 = 7 \text{ e } x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 :$$

Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta pondo $y = 14/x$,

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

$$x = (43 \pm \sqrt{-167})/12$$

Diofanto observa que só poderia haver solução se $(172/2)^2 > (24 \times 336)$. Neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Teorema da Decomposição

Qualquer função polinomial de grau restritamente positivo $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, sendo $a_0 \neq 0$, poderá ser decomposta e fatorada na forma:

$$F(x) = a_0 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

Onde r_1, r_2, \dots, r_n são as raízes de F .

Com exceção da ordem dos fatores, a unicidade desta decomposição é garantida.

Demonstração

O F.T.A. garante que a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz. Considerando r_1 a raiz de F , nesse caso, conforme o teorema de D'Alembert, F é divisível por $x - r_1$. Portanto:

$$\begin{array}{r} F(x) \\ a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n \\ \hline x - r_1 \\ \hline a_0 \cdot x^{n-1} + \dots \\ F_1(x) \end{array}$$

Logo, podemos representar assim:

$$F(x) = (x - r_1) \cdot F_1(x) \quad (\text{I})$$

onde F_1 é uma função polinomial que apresenta grau $n-1$ e coeficiente inicial a_0 . Sendo $n = 1$ o teorema está demonstrado, pois $F_1(x) = a_0$ e de (I) decorre $F(x) = a_0 \cdot (x - r_1)$.

Sendo $n > 1$, nesse caso $n - 1 > 0$ e a equação $F_1(x) = 0$ possui, conforme o T.F.A., pelo menos uma raiz r_2 . Se r_2 for a raiz F_1 então esta função polinomial será divisível por $x - r_2$. Portanto:

$$\begin{array}{r|l} a_0 \cdot x^{n-1} + \dots & x - r_2 \\ \hline 0 & a_0 \cdot x^{n-2} + \dots \\ & F_2(x) \end{array}$$

e assim $F_1(x) = (x - r_2) \cdot F_2(x)$.

Fazendo a substituição deste valor de $F_1(x)$ em (I), temos:

$$\mathbf{F(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot F_2(x) \text{ (II)}}$$

onde F_2 é uma função polinomial que apresenta grau $n - 2$ e coeficiente inicial a_0 .

Sendo $n = 2$ o teorema está demonstrado, pois $F_2(x) = a_0$ e de (II) decorre $F(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)$

Sendo $n > 2$, nesse caso $n - 2 > 0$ e a equação $F_2(x) = 0$ possui, conforme o T.F.A., pelo menos uma raiz r_3 , e assim sucessivamente.

Depois de n aplicações contínuas do T.F.A., chegamos à $F(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \cdot F_n(x)$, onde F_n é uma função polinomial que apresenta grau $n - 0 = 0$ e coeficiente inicial a_0 .

Portanto $F_n(x) = a_0$, e logo:

$$\mathbf{F(x) = a_0 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)}$$

Exemplo

Na resolução da equação do 2º grau $x^2 - 6x + 9 = 0$, encontramos duas raízes iguais a 3. Utilizando o teorema da decomposição, fatoramos o polinômio e obtemos:
 $x^2 - 6x + 9 = 0 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$

Nesse caso, dizemos que 3 é raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação. Dessa forma, se um polinômio fatorado resulta a seguinte expressão:

$$p(x) = (x + 5)^3 \cdot (x + 4)^2 \cdot (x - 2)$$

Podemos dizer que:

$x = -5$ é raiz com multiplicidade 3 ou raiz tripla da equação $p(x) = 0$

$x = -4$ é raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação $p(x) = 0$

$x = 2$ é raiz com multiplicidade 1 ou raiz simples da equação $p(x) = 0$

De maneira geral, dizemos que r é uma raiz de multiplicidade n , com $n \geq 1$, da equação $p(x) = 0$, se:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x); \text{ com } q(r) \neq 0$$

Observe que $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$ e que a condição $q(r) \neq 0$ significa que r não é raiz de $q(x)$ e garante que a multiplicidade da raiz r não é maior que m .

Exemplo 1. Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

Solução: considere $p(x)$ como sendo o polinômio dado. Assim:

$$p(x) = (x - 3)^2 \cdot q(x)$$

Note que $q(x)$ é obtido fazendo a divisão de $p(x)$ por $(x - 3)^2$.

Fazendo a divisão pelo dispositivo prático de Briot –Ruffini, obtemos:

3	1	-9	23	-3	-36
3	1	-6	5	12	0
	1	-3	-4	0	

Após a realização da divisão, vemos que os coeficientes do polinômio $q(x)$ são 1, -3 e -4. Assim, $q(x) = 0$ será: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Vamos resolver a equação acima para determinarmos as demais raízes.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 4$$

$$\text{Portanto, } S = \{-1, 3, 4\}$$

Exemplo 2. Escreva uma equação algébrica de grau mínimo tal que 2 seja raiz dupla e -1, raiz simples.

Solução: Temos que: $(x - 2)(x - 2)(x - (-1)) = 0$

Ou

$$(x - 2)^2 \cdot (x + 1) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x + 1) = 0$$

$$x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

Atividade: Pedir aos alunos que realizem os exercícios propostos do capítulo

IMPORTANTE: Relembrar o teorema de Baskara, Relembrar também produtos notáveis

Atividade: Pedir aos alunos que realizem os exercícios propostos do capítulo

Representação Gráfica de uma Função Polinomial

Normalmente, um polinômio de grau n é escrito na forma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde a_n é diferente de zero. O a_n será denominado de coeficiente dominante. Toda função definida por: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ com a_n diferente de zero, é denominada função polinomial de grau n .

- FUNÇÃO DO 1º GRAU (FUNÇÃO AFIM)

Para montarmos o gráfico de uma **função polinomial do 1º grau** basta conhecermos dois **pares ordenados** cujo primeiro elemento pertence ao **domínio da função** e o segundo pertence à sua **imagem**

Para o primeiro **par ordenado** vamos escolher aquele onde $x = 0$. Substituindo x por **0** na **regra de associação** ou **lei de formação** da função, temos:

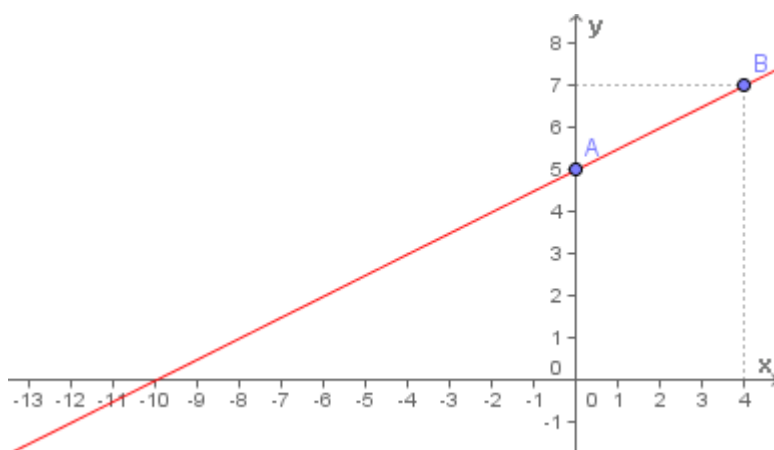
$$y = \frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Então o nosso par ordenado será **(0, 5)** representado no gráfico ao lado pelo ponto **A**:

Para o outro par ordenado, arbitrariamente podemos escolher o ponto com **abscissa** igual a **4** e realizarmos os cálculos como no caso do primeiro ponto, agora trocando x por **4**:

Quando $x=4$, $y=7$

Como sabemos que **o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta**, basta traçarmos uma reta unindo tais pontos, como podemos ver no gráfico abaixo:



Observe que obtivemos o mesmo gráfico do início das explicações deste tópico.

Neste exemplo partimos da **lei de formação da função**, escolhemos arbitrariamente dois pontos conhecidos e a partir deles montamos o gráfico da função. Agora vamos

obter a regra de **associação da função** a partir de quaisquer dois pontos conhecidos pertencentes à função.

- **FUNÇÃO DO 2º GRAU (QUADRÁTICA)**

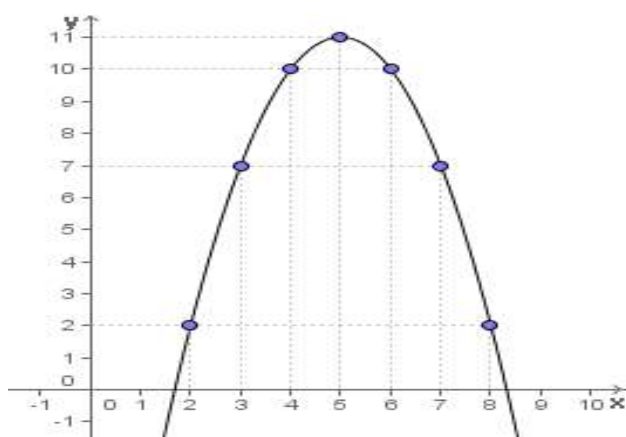
Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$) é denominada **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**.

O polinômio $ax^2 + bx + c$ é um **polinômio do segundo grau na variável x**.

Devido ao fato de o gráfico de uma **função polinomial do 2º grau** ser uma **parábola** e não uma **reta**, como no caso de uma **função afim**, para montarmos o seu gráfico não nos basta conhecer apenas dois **pares ordenados** pertencentes à curva da função, no caso da **função quadrática** precisamos de mais alguns pontos para termos uma boa ideia de como ficará a curva no gráfico.

Vamos analisar o gráfico ao lado e a tabela abaixo que contém alguns pontos deste gráfico:

x	$y = -x^2 + 10x - 14$
2	$y = -2^2 + 10 \cdot 2 - 14 = 2$
3	$y = -3^2 + 10 \cdot 3 - 14 = 7$
4	$y = -4^2 + 10 \cdot 4 - 14 = 10$
5	$y = -5^2 + 10 \cdot 5 - 14 = 11$
6	$y = -6^2 + 10 \cdot 6 - 14 = 10$
7	$y = -7^2 + 10 \cdot 7 - 14 = 7$
8	$y = -8^2 + 10 \cdot 8 - 14 = 2$



Na tabela temos cada um dos sete pontos destacados no gráfico.

Para traçá-lo primeiro identificamos no **plano cartesiano** cada um dos pontos sete pontos da tabela e depois fazemos as interligações, traçando linhas curvas de um ponto a outro seguindo a curvatura própria de uma parábola.

Normalmente é mais fácil traçarmos a parábola se a começarmos pelo seu vértice, que neste caso é o ponto **(5, 11)**, visualmente o ponto máximo do gráfico desta parábola.

Ponto de Intersecção da Parábola com o Eixo das Ordenadas

De uma forma geral a parábola sempre intercepta o **eixo y** no ponto **(0, c)**.

IMPORTANTE: Relembrar todo conteúdo para construção do gráfico (parábola) – Raiz da Função quadrática, Vértice e Concavidade da Parábola, Coordenadas do Vértice da Parábola, Valor Mínimo ou Máximo da Função Quadrática

Atividade: Pedir aos alunos que realizem algumas atividades

Atividade 1

Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

c) $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

1) Considerando o valor de x muito grande (positivo e negativo), analise cada gráfico e identifique onde ele “começa” e “termina” (se e na parte positiva ou negativa do eixo OY).

- a) _____
b) _____
c) _____

2) O grau dessas funções é par ou ímpar?

() par () ímpar

3) Como podemos identificar que o gráfico representa uma função de grau par?

Atividade 2

Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas:

a) $f(x) = 2x - 2$

b) $f(x) = -x + 3$

c) $f(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5x + 6$

1) Considerando o valor de x muito grande (positivo e negativo), analise e identifique onde cada gráfico “começa” e “termina” (se e na parte positiva ou negativa do eixo OY).

- a) _____
b) _____
c) _____

Relação de Girard

Considere a função polinomial $F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$, sendo $a_0 \neq 0$ e $n \geq 1$.

Considerando o teorema da decomposição podemos representar $F(x) = a_0 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$.

Empregando a propriedade distributiva, tornando redutíveis os termos semelhantes, e ordenando o polinômio, temos:

$$F(x) = a_0 \cdot x^n - a_0(r_1 + r_2 + \dots + r_n) \cdot x^{n-1} + a_0(r_1r_2 + r_1r_3 + \dots) x^{n-2} + \dots$$

Se igualarmos os coeficientes deste último polinômio, dois a dois, respectivamente, como os coeficientes iniciais $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, obtemos n relações entre **as raízes e os coeficientes de F**, tais relações são denominadas **Relações de Girard**, e são as

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n &= -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} \cdot r_n &= +\frac{a_2}{a_0} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n &= +\frac{a_3}{a_0} \\ &\vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

seguintes:

Relações de Girard para uma equação de grau 2

A equação $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ possui como raízes os termos r_1 e r_2 , nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 = +\frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

Relações de Girard para uma equação de grau 3

A equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2 e r_3 , nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = +\frac{a_2}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

Relações de Girard para uma equação de grau 4

A equação $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2, r_3 e r_4 , nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = +\frac{a_2}{a_0} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{a_3}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = +\frac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

Atividade: Pedir aos alunos que realizem alguns exercícios

Questão 1

Calcule o valor de k na equação $(k + 5) \cdot x^2 - 10x + 3 = 0$ de modo que o produto das raízes seja igual a $3/8$

Questão 2

(UFMG) Os números a, b e c são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Questão 3

De acordo com a equação $4x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$, determine as relações de Girard envolvendo as raízes x_1, x_2 e x_3 .

5ª Atividade

ACÕES E SEQUÊNCIAS: Resolver questões voltadas para o Vestibular, Escolas Militares, ENEM, SAERJ, SAERJINHO referenciadas a todo conteúdo de Polinômios e Equações Algébricas.

FORMAS DE FIXAÇÃO: Exercícios Propostos e Complementares

RECURSOS: Livro didático (Matemática -Dantei) , provas anteriores de concursos . internet

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

ORGANIZAÇÃO: Individual ou em dupla

HABILIDADES E COMPETÊNCIAS: Estimular o aluno a desenvolver a habilidade de realizar exercícios específicos, voltados a aprovação em um concurso ou vestibular.

METODOLOGIA: Treino e aplicação contínua

Resolução de Problemas

Um aluno que deseja obter a aprovação em um vestibular deve incluir na sua rotina de estudo uma ferramenta considerada, pelos especialistas e professores, como uma das mais importantes: a resolução de questões. Além de testar os seus conhecimentos, essa prática faz com que o aluno adquira uma maior familiaridade com o estilo adotado pela instituição responsável pela organização da seleção. Outra vantagem de resolver muitas questões e provas anteriores é se sentir mais seguro no dia da avaliação e ter a “sorte” de encontrar as mesmas questões ou alternativas resolvidas anteriormente, uma vez que algumas bancas repetem.

Questão 1

UERJ- Determine o valor de k na equação $x^2 - kx + 36 = 0$, de modo que uma das raízes seja o quádruplo da outra.

Questão 2

(EEM–SP) Dada a equação $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$, determine o valor do coeficiente a para que as raízes dessa equação sejam números naturais sucessivos.

Questão 3

(ITA–SP) Os números a , b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Questão 4

Lembrando que as raízes reais de uma função são “os valores de x quando $f(x) = 0$ e que o grau da função indica o número Máximo de raízes” construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas:

a) $f(x) = -x - 3$

b) $f(x) = x^2 - x - 6$

Questão 5

O número real $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ é raiz do polinômio:

- ☐ a) $p(x) = x^4 + 8x^2 - 4$ ☐ b) $p(x) = x^4 + \sqrt{3}x^2 - 4$ ☐ c) $p(x) = x^4 + 8x^2 + 4$
☐ d) $p(x) = x^4 - 4\sqrt{3}x^2 + 4$ ☐ e) $p(x) = x^4 - 8x^2 + 4$

Questão 6

O Brasil é o país onde mais caem raios no mundo. Na última década, a cada três dias, em média, uma pessoa foi fulminada por um raio”

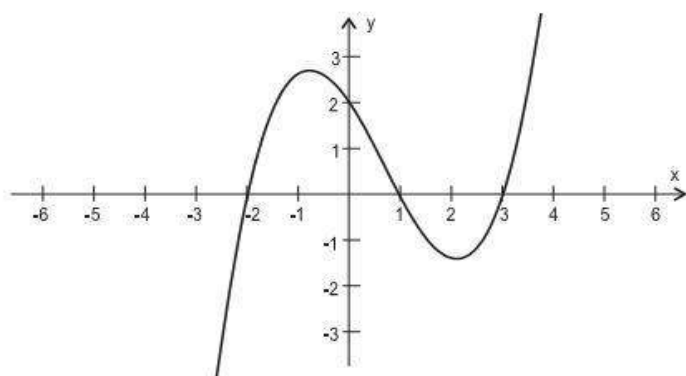
Revista Veja, 10 fev. 2010.

Seja $f(x)$ uma função polinomial que represente o número de pessoas fulminadas por um raio no Brasil ao longo da última década, onde x representa o número de dias.

Considerando as informações apresentadas na reportagem acima, conclui-se que

- ☐ a) $f(x) = 3x$
- ☐ b) $f(x) = x + 3$
- ☐ c) $f(x) = x - 3$
- ☐ d) $f(x) = \frac{x}{3}$

Questão 7



O valor de $a + b + c + d$ é ?

AValiação

A palavra avaliar é originária do latim e provém da composição a-valere, que significa "dar valor a..." No entanto, o conceito "avaliação" é expresso como sendo a "atribuição de um valor ou qualidade a alguma coisa, ato ou curso de ação...", implicando "um posicionamento positivo ou negativo em relação ao objeto, ato ou curso de ação avaliado" Alguns autores, como Libâneo, Luckesi, definem a avaliação como: "(...) um componente do processo de ensino que visa, através da verificação e qualificação dos resultados obtidos, determinar a correspondência destes com os objetivos propostos e, daí, orientar a tomada de decisões em relação às atividades didáticas seguintes". "(...) um juízo de qualidade sobre dados relevantes, tendo em vista uma tomada de decisão" O processo avaliativo apresenta algumas características que o diferem da medida, embora contenha a medida como condição necessária à sua objetividade e precisão. A avaliação da aprendizagem como processo deve buscar a inclusão e não a exclusão dos educandos. Portanto, o professor ao avaliar o aluno, deve levantar dados, analisá-los e sintetizá-los, de forma objetiva, possibilitando o diagnóstico dos fatores que interferem no resultado da aprendizagem. O objeto de análise da avaliação do rendimento escolar é a expressão global do aluno, ou seja, sua expressão de forma oral, escrita, corporal ou gestual, tanto na área cognitiva, afetiva-social quanto na psicomotora. "A avaliação deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem". Compete à avaliação a verificação e a qualificação. A verificação acontece por meio das informações levantadas pelo professor nas provas, exercícios, tarefas e observação do desempenho dos alunos. A qualificação acontece por intermédio da comprovação dos resultados alcançados, tendo em vista os objetivos e, conforme o caso, atribuição de notas ou conceitos. Podem ser atribuídas à avaliação educacional funções gerais e específicas. As funções gerais fornecem o embasamento para o planejamento e possibilita a seleção e a classificação de pessoas e o ajustamento da política educacional e das práticas curriculares. As funções específicas permitem o diagnóstico, o controle e a classificação. O diagnóstico possibilita identificar, discriminar, compreender e caracterizar os fatores desencadeantes das dificuldades de aprendizagem. O controle visa localizar, apontar, discriminar deficiências e insuficiências no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem e corrigi-las por meio de um controle sistemático e contínuo, que se dá pela interação professor-aluno, durante as aulas. A "função de classificação propicia principalmente a efetivação do propósito de classificar o aluno, segundo o nível de aproveitamento, ou rendimento alcançado, em comparação ao grupo de classe" A tarefa, a ser realizada individualmente ou em dupla, descrita na 5ª atividade, diz respeito a questões diversas de vestibulares com intuito de avaliar o conhecimento, as competências e habilidades adquiridas pelo aluno durante o período (Duração de 50 minutos). Deve ser pontuada (de 0 à 10) e o professor poderá avaliar a reflexão e o argumento crítico usado pelos alunos. O professor deve corrigir a avaliação, verificar os erros mais comuns, debatê-las com os alunos. Outro método de avaliação pode ser a verificação da aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em outros conteúdos estudados nos bimestres anteriores.

(Duração de 50 minutos) Avaliação (de 0 à 10) escrita e individual para cada aluno, analisando a capacidade do conhecimento adquirido. Questões com resoluções diretas ou situação-problema envolvendo Polinômios e expressões Algébricas.

OBSERVAÇÕES DO PLANO DE TRABALHO

Os alunos acharam um pouco complexo o assunto, entretanto bem interessante o plano proposto, deduzindo estar sendo abrangido os tópicos mais importantes referente ao conteúdo curricular.

Poucos alunos se mostraram bem interessados e pesquisaram o assunto, alguns fizeram perguntas que acabamos de debater em sala de aula.

A ação proposta certamente atingiu seus objetivos. Visualizei o interesse da grande maioria dos alunos e por conseguinte o aprendizado.

O Plano de Trabalho não foi totalmente compatível com a escola devido a alguns projetos que desvirtuaram uma certa quantidade de tempo que antes seria destinado ao conteúdo programático.

Me senti orgulhoso por atingir a meta destinada no Plano de Trabalho.

Pontos positivos - interesse demonstrado por alguns alunos e interesse em pesquisar via internet

Pontos negativos foram as dificuldade de aquisição do conhecimento .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Roteiros de Ação – Polinômios e Equações Algébricas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ - 3º ano do Ensino Médio – 4º Bimestre/2012

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1986.

GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas: A História da Álgebra*. São Paulo. Makron Books, 1997.

IEZZI, Gelson. *Álgebra III: números complexos, polinômios, equações algébricas*. São Paulo. Editora Moderna Ltda,

MATEMATICA- Dante – Volume único.

Vídeo sobre Polinômios e Equações Algébricas (DVD SBJ – Volume 1 - Educacional)

Endereços eletrônicos:

- pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/
- www.mundovestibular.com.br > Matemática
- http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1_2.php
- <http://www.algosobre.com.br/matematica/>