FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

COLÉGIO: CIEP BRIZOLÃO 998 –SÃO JOSÉ DE SUMIDOURO

PROFESSOR: RAFAEL SANCHES BORGES

MATRÍCULA: 09154410

SÉRIE: 3º ANO

GRUPO : 2

TUTOR : PAULO ROBERTO CASTOR MACIEL

AVALIAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1 –

POLINÔMIOS

Todas as atividades do Plano de trabalho 1 foram executadas com certa facilidade por todos os alunos. Estes se mostraram bem empolgados na realização das tarefas. Os objetivos foram alcançados de maneira satisfatória. Pude notar que os alunos se mostram mais interessados e participativos quando trabalhamos de forma prática, com atividades mais concretas e dentro de suas realidades.

Na atividade do vídeo, os alunos se interessaram bastante, pois puderam notar que o números complexos pode ser utilizada para resolver situações-problema do dia-a-dia. Pude notar que os discentes construíram o conceito e aprenderam o conteúdo exigido por esta atividade. Sempre trabalhei com vídeos e isso facilitou o bom andamento da aula, pois não era nenhuma novidade e os alunos participaram de modo adequado.

A atividade seguinte também foi muito produtiva. Os alunos se mostraram motivados e empolgados em realizá-la. Foi um momento muito gostoso e de grande importância para o aprendizado. Notei nesta atividade que os alunos possuem muita dificuldade na interpretação de problemas, muitas vezes tive que ler parte por parte da situação-problema para que eles conseguissem montar a fórmula que representasse tal situação. Todos os grupos conseguiram realizar as atividades, alguns com facilidade outros com bastante dificuldade, mas todos demonstraram vontade em aprender e acertar e isso é fundamental para que haja aprendizado.

Achei válida a experiência e, com certeza, me utilizarei de atividades mais dinâmicas para abordar todos os outros conteúdos. É meio utópico querer que todos os alunos aprendam e participem de forma ativa de todas as atividades, mas fico feliz em ver que a grande maioria se mostrou interessada, participativa e com vontade de aprender.

PLANO DE TRABALHO SOBRE POLIN]ÔMIOS

1. Introdução:

Os polinômios, a *priori*, formam um plano conceitual importante na álgebra, entretanto possuem também uma relevante importância na geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos.

A definição de polinômio abrange diversas áreas, pois podemos ter polinômios com apenas um termo na expressão algébrica, como por exemplo: 2x, y, 4z, 2, 5, etc. Mas podemos possuir polinômios com uma infinidade de termos. Por exemplo:

$$P(x)=a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+...+a_2 x^2+a_1 x+a_0$$

Como podemos notar, polinômios são compostos pelas várias expressões algébricas, desde aquelas que envolvem apenas números, até as que apresentam diversas letras, potências, coeficientes, entre outros elementos dos polinômios.

Os polinômios se encontram em um âmbito da matemática denominado **álgebra**, contudo a álgebra correlaciona o uso de letras, representativas de um número qualquer, com operações aritméticas. Portanto, podemos, assim, efetuar as operações aritméticas nos polinômios, que são: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação.

Buscaremos, então, nesta seção, abarcar todas as propriedades dos polinômios, assim como as operações aritméticas desses números.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

Polinômios

- **Tempo de Duração:** 8aulas/400 min
- **Recursos Educacionais Utilizados:**
- Vídeo
- Folha de atividade
- Power Point;

- **Organização da turma:**

  Pequenos grupo de 2 ou 3 alunos;

Objetivos: -

Efetuar operações com polinômios.

- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios .

Vídeo : Introdução aos Polinômios

http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=286pEKuk-DI

OPERAÇÕES COM POLINOMIOS

O procedimento utilizado na adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios envolve técnicas de redução de termos semelhantes, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes. Observe os exemplos a seguir:

Adição

Exemplo 1 : Adicionar $x^2 – 3x – 1$ com $–3x^2 + 8x – 6$.

$(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6)$ → eliminar o segundo parênteses através do jogo de sinal.

$+(–3x^2) = –3x^2$ -----------$+(+8x) = +8x$ ---------------- $+(–6) = –6$

$x^2 – 3x – 1 –3x^2 + 8x – 6$ → reduzir os termos semelhantes.

$x^2 – 3x^2 – 3x + 8x – 1 – 6 =$ $\mathbf{–2x^2 + 5x – 7}$

Portanto: $(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6) = \mathbf{–2x^2 + 5x – 7}$

Subtração

Exemplo 2 : Subtraindo $–3x^2 + 10x – 6$ de $5x^2 – 9x – 8$.

$(5x^2 – 9x – 8) – (–3x^2 + 10x – 6)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.

$– (–3x^2) = +3x^2$ / $– (+10x) = –10x$ / $– (–6) = +6$

$5x^2 – 9x – 8 + 3x^2 –10x +6$ → reduzir os termos semelhantes.

$5x^2 + 3x^2 – 9x –10x – 8 + 6 =$ $\mathbf{8x^2 – 19x – 2}$

Portanto: $(5x^2 – 9x – 8) – (–3x^2 + 10x – 6) = 8x^2 – 19x – 2$

EXCERCICIOS

1) Considerando os polinômios $A = 6x^3 + 5x^2 – 8x + 15$, $B = 2x^3 – 6x^2 – 9x + 10$ e $C = x^3 + 7x^2 + 9x + 20$. Calcule:

a) A + B b) A+ C c) B + C d) A+ B+ C

e) A – B e) A – C f) B – C G) A – B - C

Multiplicação de polinômio por polinômio

Para efetuarmos a multiplicação de polinômio por polinômio também devemos utilizar a propriedade distributiva. Veja o exemplo:

$(x – 1) . (x^2 + 2x - 6)$

$x^2 . (x – 1) + 2x . (x – 1) – 6. (x – 1)$

$(x^3 – x^2) + (2x^2 – 2x) – (6x – 6)$

$x^3 – x^2 + 2x^2 – 2x – 6x + 6$ → reduzindo os termos semelhantes.

$x^3 + x^2 – 8x + 6$

Portanto, nas multiplicações entre monômios e polinômios aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação.

Divisão de polinômio por polinômio

Vídeo : Introdução aos Polinômios Divis

http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=SPJS_hyqqa0

Em toda divisão temos **dividendo, divisor, quociente e resto**, como estamos falando de divisão de polinômio por polinômio, teremos:

Para o **dividendo** um polinômio **G(x)**

Para o **divisor** um polinômio **D(x)**

Para o **quociente** um polinômio **Q(x)**

Para o **resto** (podendo ser zero) um polinômio **R(x)**

$$\begin{array}{l|l} G(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Prova real: $G(x) = Q(x)\ D(x) + R(x)$

Tem algumas observações a serem feitas, como:

ao final da divisão o resto sempre tem que ser menor que o divisor: **R(x) < D(x)**.

quando o resto for igual a zero, a divisão é considerada exata, ou seja, o dividendo é divisível pelo divisor. **R(x) = 0**.

Observe a divisão de polinômio por polinômio abaixo, vamos partir de um exemplo, cada passo tomado no desenvolvimento da divisão será explicado.

Dada a divisão
$(12x^3 + 9 – 4x) : (x + 2x^2 + 3)$

Antes de começar a operação temos que fazer algumas verificações: se todos os polinômios estão em ordem conforme as potências de x.
No caso da nossa divisão devemos ordenar, ficando assim:
$(12x^3 - 4x + 9) : (2x^2 + x + 3)$
observar se no polinômio G(x) não está faltando algum termo, se estiver devemos completar.
No polinômio $12x^3 - 4x + 9$ está faltando o termo x^2, completando ficará assim:
$12x^3 + 0x^2 - 4x + 9$
Agora podemos iniciar a divisão:

$$\begin{array}{l|l} 12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 & 2x^2 + x + 3 \\ \hline \end{array}$$

? G(x) tem 3 termos e D(x) tem 3 termos. Pegamos o 1º termo de G(x) e dividimos pelo 1º termo de D(x): **$12x^3 : 2x^2 = 6x$**, o resultado **multiplicará** o polinômio **$2x^2 + x + 3$** e o resultado dessa multiplicação **subtrairemos** pelo polinômio **$12x^3 + 0x^2 - 4x + 9$**. Assim teremos:

$$\begin{array}{l|l} 12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 & 2x^2 + x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-12x^3 - 6x^2 - 18x} & 6x \\ \quad\;\; -6x^2 - 22x + 9 & \end{array}$$

R(x) > D(x), podemos dar continuidade à divisão, repetindo o mesmo processo anterior. Achando agora o segundo termo de Q(x).

$$
\begin{array}{l|l}
12x^3 + 0x^2 - 4x + 9 & 2x^2 + x + 3 \\
\cline{2-2}
\underline{-12x^3 - 6x^2 - 18x} & 6x - 3 \\
\quad -6x^2 - 22x + 9 & \\
\quad \underline{+6x^2 + 3x \ + 9} & \\
\qquad - 19x \ + 18 &
\end{array}
$$

R(x) < D(x), não damos continuidade a divisão, concluindo que: O quociente é 6x – 3 e o resto é –19x + 18.

Divisão de Polinômios utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini

Podemos ver no artigo de Divisão de polinômios o método tradicional para a divisão, utilizando o algoritmo da divisão. Entretanto, dois matemáticos (Paolo Ruffini e A. Briot) criaram um dispositivo prático para realizar esta divisão, dispositivo este que recebeu seus nomes: dispositivo de Briot-Ruffini.

Esse algoritmo é utilizado para dividirmos polinômios por um binômio do tipo (x-a). Esse dispositivo usará apenas os coeficientes do polinômio e o termo constante (a).

Chamemos de p(x) o polinômio a ser dividido (dividendo); e h(x) o divisor no qual h(x)=x-a. Com isso, a estrutura do dispositivo é a seguinte:

Termo constante do divisor com sinal trocado = a	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo
	Coeficientes do quociente	Resto

Para melhor compreendermos como este dispositivo funciona, utilizá-lo-emos em um exemplo, e explicaremos passo a passo seu processo.

Exemplo: Efetue a divisão de p(x) por h(x), na qual:

$$p(x) = x^2 + 4x + 3 \quad e \quad h(x) = x + 1$$

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplique esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo p(x).

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	
	1×(-1)=-1	3	

Repita o processo agora para o novo elemento, multiplique esse número pelo divisor e some-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	-3+3=0
	1×(-1)=-1	3	0
		3×(-1)=-3	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$q(x) = 1x + 3$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x).q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$x^2 + 4x + 3 = (x + 1).(x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$
$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é verdadeira.

Teorema do Resto

> O teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do teorema do resto, que são voltados para a divisão de polinômio por binômio do tipo x – a. O teorema do resto diz que um polinômio G(x) dividido por um binômio x – a terá resto R igual a P(a), para
> x = a. O matemático francês D'Alembert provou, levando em consideração o teorema citado acima, que um polinômio qualquer Q(x) será divisível por x – a, ou seja, o resto da divisão será igual à zero

(R = 0) se P(a) = 0.

Esse teorema facilitou o cálculo da divisão de polinômio por binômio (x –a), dessa forma não sendo preciso resolver toda a divisão para saber se o resto é igual ou diferente de zero.

Exemplo 1
Calcule o resto da divisão $(x^2 + 3x – 10) : (x – 3)$.

Como diz o Teorema de D'Alembert, o resto (R) dessa divisão será igual a:

$P(3) = R$
$3^2 + 3 \cdot 3 – 10 = R$
$9 + 9 – 10 = R$
$18 – 10 = R$
$R = 8$
Portanto, o resto dessa divisão será 8.

Exemplo 2
Verifique se $x^5 – 2x^4 + x^3 + x – 2$ é divisível por $x – 1$.

Segundo D'Alembert, um polinômio é divisível por um binômio se P(a) = 0.

$P(1) = (1)^5 – 2 \cdot (1)^4 + (1)^3 + (1) – 2$
$P(1) = 1 – 2 + 1 + 1 – 2$
$P(1) = 3 – 4$
$P(1) = – 1$

Como P(1) é diferente de zero, o polinômio não será divisível pelo binômio x – 1.

Exemplo 3
Calcule o valor de m de modo que o resto da divisão do polinômio
$P(x) = x^4 – mx^3 + 5x^2 + x – 3$ por $x – 2$ seja 6.

Temos que, $R = P(x) \rightarrow R = P(2) \rightarrow P(2) = 6$

$P(2) = 2^4 – m \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 2 – 3$
$2^4 – m \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 2 – 3 = 6$
$16 – 8m + 20 + 2 – 3 = 6$
$– 8m = 6 – 38 + 3$
$– 8m = 9 – 38$
$– 8m = – 29$
$m = 29/8$

Exemplo 4 :Calcule o resto da divisão do polinômio $3x^3 + x^2 – 6x + 7$ por $2x + 1$.

$R = P(x) \rightarrow R = P(– 1/2)$
$R = 3 \cdot (–1/2)^3 + (–1/2)^2 – 6 \cdot (–1/2) + 7$
$R = 3 \cdot (–1/8) + 1/4 + 3 + 7$
$R = –3/8 + 1/4 + 10$ (mmc)
$R = –3/8 + 2/8 + 80/8$
$R = 79/8$

Exercícios

1) Determine o polinômio que representa a área de cada retângulo .

a) X + 5

3X + 4

b) X +5

5X + 3

c) 3X -2

2X +5

2) O produto de um monômio por um polinômio dá 27 $X^6Y^5 - 36X^5Y^4 + 48X^3Y^2$ .Se o monômio é $3X^2Y^2$, qual é o polinômio ?

3) Determine o quociente e da divisão do polinômio $120X^4 - 180X^3 - 60X^2$ por :

a) 5 X b) 4 X c) 3 X d) 2X

4) Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio P (x) = $3X^3 - 11X^2 + 14X - 5$ por D (x)= $3X^2 - 5X + 1$.

5) Qual é o quociente e o resto da divisão do polinômio $6X^2 - 18X + 12$ por $2X - 4$?

Equação Polinomiais

Tomando-se o seguinte polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são constantes *n* e é definido como o grau do polinômio.

Por exemplo: $P(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 7x + 8 = 0$

Define-se como raiz α se e somente se $P(\alpha) = 0$.

Obs.: Note que ao se igualar um polinômio a zero $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ele se transforma em uma equação polinomial.

Também se pode decompor o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ em *n* fatores de primeiro grau:

$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n)$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são raízes da equação polinomial.

Raízes múltiplas

Pode ocorrer que uma ou mais raízes sejam iguais, nesse caso essas raízes são definidas como múltiplas, por exemplo:

$$P(x) = 4(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-2)(x-8)$$

Note a multiplicidade da raiz 1 (2 vezes) e da raiz 2 (3 vezes). Denomina-se que a equação polinomial $P(x)$ possui a raiz 1 com multiplicidade 2, a raiz 2 de *multiplicidade* 3 e a raiz 8 de *multiplicidade* 1.

Raízes complexas e reais

"Toda equação polinomial, de grau *n*, com $n \geq 1$ possui pelo menos 1 raiz complexa (real ou imaginário)".
Obs.: Lembrar que os números complexos englobam os números reais, ou seja, um número real é também um número complexo.

"Toda equação polinomial que possua uma raiz imaginária possuirá também o conjugado dessa raiz como raiz".

Ou seja, se $z = a + bi$ é raiz de uma equação polinomial $z = a - bi$ também será raiz. Sendo $a, b \in \mathcal{R}$ e $i^2 = -1$.

Exemplo: Sabendo-se que a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ possui uma raiz imaginária igual a *i*, com $i^2 = -1$ encontrar as outras raízes.

Se *i* é uma raiz então -*i*, seu conjugado, é outra e consegue-se encontrar a terceira raiz que é 2.

c. Raízes racionais

"Se um número racional $\frac{p}{q}$, com *p* e *q* primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de *coeficientes inteiros* do tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n".

Podemos usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir o polinômio $P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ por $x+1$ e obter o quociente $Q(x)$.

−1	2	−3	−3	2
	2	−5	2	0

Veja que $Q(x)=2x^2-5x+2$ e $R(x)=0$ (isso significa que $P(x)$ é divisível por $x+1$.

Basta resolvermos $Q(x)=0$ que as soluções que faltam de $P(x)=0$ virão.

Isso ocorre porque se $A(x)$ for dividendo, $B(x)$ for divisor, $C(x)$ quociente e $D(x)$resto, então:

$$A(x) \equiv B(x)C(x)+R(x)$$

Se $A(x)$ é divisível por $B(x)$, então $R(x)=0$ para todo x de seu domínio. Assim passa a valer que

$$A(x)=B(x)C(x)$$

Então, vamos lembrar que já resolvemos $Q(x)=2x^2-5x+2$ e obtivemos as outras soluções 2 e 12, mas mesmo se não o tivéssemos, é uma equação do 2º Grau que pode facilmente ser resolvida.

Portanto, o conjunto solução de $2x^3-3x^2-3x+2=0$ é:

$$S=\{-1,2,12\}$$

Pré-requisitos:

- .Fórmulas de solução das equações polinomiais do 1º e 2º grau.
- **Tempo de Duração:** 8 aulas/400 min
- **Recursos Educacionais Utilizados:**
- Folha de atividade
- Power Point;
- Quadro branco e pincel..

- **Organização da turma:**

Turma organizada em grupos de dois ou três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Objetivos:

- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema

- Representar graficamente uma função polinomial.

LISTA DE SITUAÇÃO-PROBLEMA

1) Uma raiz da equação $4X^3 - 4X^2 - 100X + 100 = 0$ é 1 . Calcule o conjunto solução dessa equação .

2)Sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $2X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 12X - 4 = 0$, DETERMINE O CONJUNTO SOLUÇÃO .

3) Determine o valor de k no polinômio $P(x) = 3X^3 - 12X^2 + 13X - k = 0$, sabendo que - 3 é uma das suas raízes.

Dividir a turma em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos. Cada grupo deverá criar uma situação-problema para ser resolvida utilizando geometria analítica . Em seguida, os grupos trocarão os problemas criados para que possam ser resolvidos por outro grupo.

3. Avaliação:

Atividade 1 – Os alunos serão avaliados em dois momentos. De forma escrita, na resolução da situação-problema sugerida e de forma oral, na explicação da resolução do problema para os outros alunos na lousa. Também será avaliada a participação no debate relativo ao vídeo proposto.

Atividade 2 – A avaliação será escrita e individual com resolução de problemas .

4. Referências:

- BENIGNO Barreto Filho,Claudio Xavier da Silva . Matemática Aula Por Aula ..1ª edição Volume Único .São Paulo: Editora FDT, 2000.

- GIOVANNI, José Rui;; GIOVANNI JR., José Rui. Matemática Completa . 3ª série do Ensino Médio.2ª edição. São Paulo: FTD, 2009.

- DE OLIVEIRA, Francisco; DE OLIVEIRA, Alana; FARIAS, Ivaneide Ferreira. Construindo, desconstruindo e analisando: Portal do Professor, 2011. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=30712> 10/08/2011

- PAIVA, Manoel; Matemática Paiva . Volume 3 1ª edição . São Paulo: Editora Moderna , 2009.

-VídeosYoutube. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=aIXcuud7QUo&feature=player_detailpage