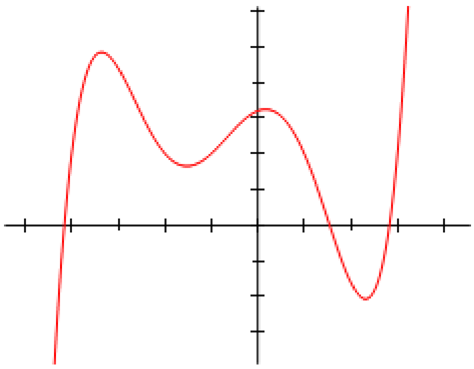
Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CICIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho

Polinômios



Tarefa: 1

Tempo para a implementação: 14 aulas

Cursista: Roberto monteiro Barata

Pré requisito: As operações básicas, Produtos notáveis, fatoração e função.

Tutor: Claudio Rocha de Jesus

Introdução

Os polinômios, a *priori*, formam um plano conceitual importante na álgebra, entretanto possuem também uma relevante importância na geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos..

Polinômios são a essência da álgebra. trabalhar com as operações desconsiderando a natureza desses objetos.

Em linguagem Matemática (na Álgebra) o conjunto dos polinômios é um anel (de integridade), ou seja, dados quaisquer polinômios , e quando munido das operações usuais de soma e multiplicação, as seguintes propriedades são válidas: p x q x e r x quando munido das operações usuais de soma e multiplicação, as seguintes propriedades são válidas:

A soma	O produto
Comutativa: $p\ x + q\ x = q\ x + p\ x$	**Comutativo** $p\ x \cdot q\ x = q\ x \cdot p\ x$
Associativa: $p\ x + q\ x \ + r\ x = p\ x + \ q\ x + r\ x$	**Associativo** $p\ x \cdot q\ x \ \cdot r\ x = p\ x \cdot \ q\ x \cdot r\ x$
Existe elemento Neutro (único!) $p\ x + 0 = 0 + p\ x = p\ x$	**Existe elemento Neutro (único!)** $p\ x \cdot 1 = 1 \cdot p\ x = p\ x$
Existe o simétrico $p\ x + [-p\ x\ ] - [-p\ x\ ] + p\ x - 0$	**Não existe o simétrico para** $p\ x \neq$ **constante**
Vale a distributividade $p\ x\ [q\ x - r\ x\ ] = p\ x \cdot q\ x + p\ x \cdot r\ x$	
Não há divisores de zero $p(x) \neq 0$ **e** $q\ x \neq 0 \Rightarrow p\ x \cdot q\ x \neq 0$	

Os matemáticos Keith Devlin e Gary Lorden no livro *The numbers behind NUMB3RS: solving crime with mathematics* usam a série NUMB3RS para explicar como técnicas matemáticas avançadas são utilizadas por agências de inteligência policial, em laboratórios forenses, em investigações antiterrorismo ou mesmo para capturar e condenar criminosos comuns.

Sabemos que o uso de polinômios é apenas uma das centenas de técnicas utilizadas nos processos de reconstrução e enlargamento de imagem, mas, ainda hoje, é importante. O que é muito legal é que as técnicas de reconstrução, realce ou enlargamento de imagens aparecem como aplicações em muitos campos importantes da ciência (... citar: Tomografias, Realce de Imagens de Satélites, ...)

Numa época em que qualquer pessoa com habilidade razoável pode manipular uma fotografia (um processo que depende também de matemática sofisticada), o velho ditado “Fotografias não mentem" não se sustenta mais. Mas por causa do desenvolvimento de técnicas de reconstrução de imagem, um novo ditado se aplica: fotografias (e vídeos) geralmente podem dizer muito mais do que você pensa.

Vamos entender a idéia geral e simplificada da participação dos polinômios neste processo?

Imagine que queremos dobrar as dimensões de uma foto. O mais simples neste caso é adicionar mais pixels. Como identificamos cada pixel (quadrado unitário)

pelo vértice cujas coordenadas x e y são máximas – veja figura 4, o pixel verde tem coordenada (1,1) e o azul (2,2) – colorimos os pontos (2x,2y), (2x,2y-1),(2x-1,2y-1), (2x-1,2y-1) com a mesma cor de (x,y).

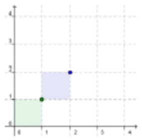


Figura 3 – Píxeis da Imagem Original

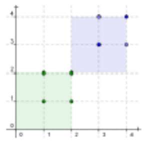


Figura 4 – Píxeis da Imagem Ampliada

Pixel ou **Píxel** (sendo o plural *píxeis*) (aglutinação de ***Pic**ture* e ***El**ement*, ou seja, elemento de imagem, sendo *Pix* a abreviatura em inglês para *Picture*) é o menor elemento num dispositivo de exibição (como, por exemplo, um monitor), ao qual é possível atribuir-se uma cor. De uma forma mais simples, um pixel é o menor ponto que forma uma imagem digital, sendo que o conjunto de milhares de píxeis formam a imagem inteira.

Um pixel não precisa representar obrigatoriamente um pequeno quadrado. As imagens mostram maneiras alternativas de se reconstruir uma imagem usando: um conjunto de pixels (píxeis), pontos, linhas e filtragem, respectivamente.

Este simples processo cria uma segunda imagem sem buracos, idêntica a primeira nos caso em que as cores da imagem são sólidas. Em uma foto, de uma paisagem, por exemplo, esse método seria catastrófico, por exemplo, para as partes nas quais as cores estão em tons *degradee*. Para isso, necessitam-se de outra técnicas.

Para que isso ocorra a solução encontrada pelos engenheiros foi empregar a técnica chamada de segmentação, a qual divide a imagem em regiões distintas que correspondem a objetos distntos da cena original. Essa técnica de subdivisão em regiões permite que diferentes técnicas de alargamento possam ser aplicadas a diferentes regiões da imagem de acordo com suas especificidades.

A segmentação se baseia na seleção de píxeis de mesma cor, ou seja, na seleção de contornos com propriedades pré definidas. Estes contornos são as mais variadas curvas possíveis, e, é justamente aí que entram os polinômios. Matematicamente, o que é feito, é tirar proveito do fato de que qualquer curva suave (sem bicos!) pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por um ou um conjunto de diferentes polinômios.

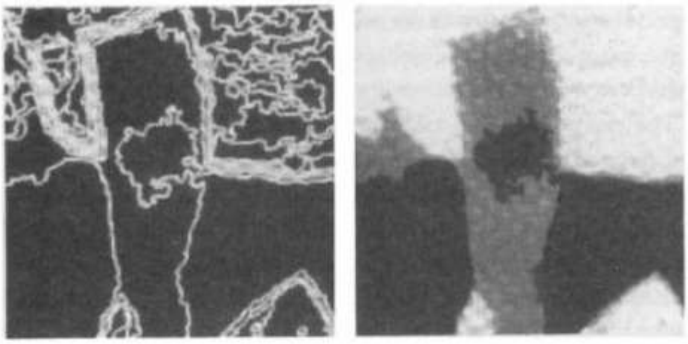


Figura 5. O resultado do algoritmo de segmentação executado na foto do caso de Denny mostrando nitidamente a consistência de uma tatuagem.

O que está por trás desta determinação de contorno é, de fato, a técnica de realce. As curvas, obtidas por polinômios “completam” buracos que a visão humana não percebe e com isso pode-se homogeneizar de diferentes maneiras e finalidades as imagens.

Mas, como os alunos podem ver isso acontecer? Fácil, fácil, o software geogebra constrói curvas polinomiais a partir de pontos, ou seja, contém uma ferramenta com o qual podemos construir uma curva que é gráfico de uma função polinomial que contém pontos arbitrários por nós escolhidos.

Podemos então levar para nossas salas esse papo de redimensionamento, realce e reconstrução de imagens para introduzir o assunto (e o interesse por) polinômios.

Um polinômio de grau n é uma função da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais conhecidos, $a_n \neq 0$ e n é um número natural.

Polinômios aparecem na resolução de muitos problemas, por isso é importante estudá-los com um pouco mais de cuidado.

A função linear afim $y = ax + b$, cujo gráfico é uma reta, e a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola, são exemplos de polinômios de primeiro grau e de segundo grau, respectivamente. O polinômio de grau zero é uma função constante.

Vamos brincar um pouco:

1. **Realize mentalmente a seguinte brincadeira. Nela, a exceção da primeira instrução, cada uma das outras deve ser executada com o resultado obtido na instrução imediatamente anterior.**

❶Pense em um número;

❷Multiplique-o por 2

❸ome 4

❹Multiplique-o por 3

❺ubtraia 2

❻ivida por 2

❼ubtraia 5

❽Divida-o por 3

Se você fez todas as operações sem errar nenhum cálculo, o resultado da última etapa é . . . o número que você pensou inicialmente!

Sabe como seu professor inventou esta brincadeira? Escrevendo as operações para uma variável x que representasse o número que você imaginou na primeira instrução. Veja:

❶Pense em um número → x

❷Multiplique-o por 2 → $2x$

❸ome 4 → $2x+4$

❹Multiplique-o por 3 → $3(2x+4)$

❺ubtraia 2 → $3(2x+4)-2$

❻ivida por 2 → $\dfrac{3(2x+4)-2}{2}$

❼ubtraia 5 → $\left(\dfrac{3(2x+4)-2}{2}\right)-5$

❽Divida-o por 3 → $\dfrac{\left(\dfrac{3(2x+4)-2}{2}\right)-5}{3}$

Mas, $\dfrac{\left(\dfrac{3(2x+4)-2}{2}\right)-5}{3}=\dfrac{\left(\dfrac{6x+12-2}{2}\right)-5}{3}=\dfrac{\dfrac{6x+10-10}{2}}{3}=\dfrac{3x}{3}=x$.

Raiz de um Polinômio

Raiz ou zero é um valor tal que, atribuído à variável da função polinomial, faz com que a função resulte em 0. Ou seja, se *a* é dito raiz do polinômio *P(x)*, então $P(a) = 0.$

Exemplos de raízes:

- $P(x) = 3 * x - 12$ tem raiz *r* = 4 (pois $P(4) = 3 * 4 - 12 = 0$)
- $P(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x^2 + x^1$ tem raiz *r* igual a -1, pois $P(-1) = 0.$

Um polinômio de grau *n* terá *n* raízes, sempre. Algumas vezes uma mesma raiz se repete, sendo por isso chamada raiz dupla, tripla, quádrupla, etc. Por exemplo:

- $P(x) = x^2 - 4x + 4$ tem raiz dupla *r* igual a 2, uma vez que pode ser fatorado em $P(x) = (x - 2)(x - 2).$

Num gráfico representativo da função polinomial, as raízes sempre ocorrem nos pontos em que a curva cruza o eixo das abscissas.

Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio $P(x)$ de uma variável com coeficientes complexos e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa. Em outras palavras, a equação polinomial $P(x) = 0$ tem n soluções, não necessariamente distintas.

Raízes de um polinômio

1ª PARTE – Raízes Conjugadas

1. Sabendo que 1+i e 1-i são números tais que

$$(1+i)^2 = 2i,\ (1+i)^3 = 1-i,\ (1-i)^2 = -2i,\ (1-i)^3 = -1-i.$$

Calcule $p(1+i)$ e $p(1-i)$ em cada caso abaixo.

a) $p(x) = 4x^5 - 3x^2 + 5x$

b) $\mathrm{p(x) = 2x^2 - 7x - 1}$

c) $\mathrm{p(x) = x^3 - 2x^2 + x}$

Lembrando que 1+i e 1 – i são números conjugados complexos, o que podemos dizer sobre $p(1+i)$ e $p(1-i)$ em todos os três casos anteriores?

O que você observou e confirmou com seu professor no item anterior vale para quaisquer dois números complexos conjugados. Ou seja, para todos aqueles números na forma $a+bi$, com $b \neq 0$. Sabendo disso complete a frase abaixo.

$$\text{Se } p(a+bi) = 0 = \overline{0} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Explique cm suas palavras a afirmação da frase que você completou com a ajuda de seu professor no item anterior.

Se 1+i e 2 – 3i são raízes de um polinômio de grau 4 quais são todas as suas raízes? Qual a expressão desse polinômio?

Se –i é raiz do polinômio $p(x) = x^3 + x$, quais são todas as raízes desse polinômio?

Equação do segundo grau

Lembre-se: *Da fórmula $ax^2 + bx + c$.*

A expressão abaixo se encaixa na fórmula acima.

$$x^2 - 8x + 15$$

Observações: Fórmula da fatoração das Equações do segundo grau:

$$a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Aplica-se a fórmula da fatoração das equações do segundo grau. Onde,

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

Por tanto, a fatoração de tal expressão resulta em:

$$1\,(x - 3) \cdot (x - 5)$$

$$(x - 3) \cdot (x - 5)$$

Dispositivo de Briot Ruffini

1. Quando um número r é raiz de um polinômio, então (x – r) é um fator deste polinômio. Ou seja, a divisão desse polinômio por (x – r) deixa resto zero. Utilize essa informação para responder o que pedimos a seguir.
   a) Use o algoritmo de Briot-Ruffini para verificar se 2i é raiz polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.
   b) -2i é raiz de $p(x)$? Por quê?
   c) Qual é o polinômio $q(x)$ quociente de $\dfrac{p(x)}{(x-2i)(x+2i)}$?
   d) Calcule as raízes de $q(x)$.
   e) Quais são todas as raízes de $p(x)$?

Veja que podemos dividir o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ por $(x-1)$ e $(x+1)$ sucessivamente de forma direta pelo algoritmo de Briot-Ruffini:

2	-4	-2	4	*1*	→ Raiz de (x – 1)
2	-2	-4	**0**	*-1*	→ Raiz de (x +1)
2	-4	**0**			

Quociente = 2x - 4 ←

Restos

Desta forma obtemos que

$$p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x+1)\underbrace{(2x-4)}_{q(x)} + 0 = 2(x-1)(x-1)(x-2)$$

Portanto, as raízes de p(x) são os números 1, -1 e 2.

Grau de um Polinômio

O **grau de um polinômio** reduzido, não nulo, é o grau do seu termo de maior grau.

O polinômio $\mathbf{-5x^4 + 14x^5y^2 - 7x^3y^2}$ é do **grau 7**, pois o seu termo de maior grau é o segundo, que é do grau **7**.

O polinômio $\mathbf{4a^2b^3 + 5a^5}$ é do **grau 5**, pois ambos os termos do polinômio são deste grau.

Redução de Termos Semelhantes

Assim como fizemos no caso dos monômios, também podemos fazer a redução de polinômios através da adição algébrica dos seus termos semelhantes.

No exemplo abaixo realizamos a soma algébrica do primeiro com o terceiro termo, e do segundo com o quarto termo, reduzindo um polinômio de quatro termos a um outro de apenas dois.

$$3xy + 2a^2 - xy + 3a^2 = (3xy - xy) + (2a^2 + 3a^2) = 2xy - 5a^2$$

Polinômios reduzidos de dois termos também são denominados **binômios**. Polinômios reduzidos de três termos, também são denominados **trinômios**.

Veja abaixo alguns exemplos de redução de polinômios através da soma ou subtração de termos semelhantes:

- $5a^2 + 3a^2 = (5 + 3)a^2 = 8a^2$
- $7xy^2 - 2x^2y + xy^2 = (7 + 1)xy^2 - 2x^2y = 8xy^2 - 2x^2y$
- $4x^2 + 3y^3 - 5y^3 + 6x^2 = (4 + 6)x^2 + (3 - 5)y^3 = 10x^2 - 2y^3$

Multiplicação de Polinômios

Temos tanto o caso da multiplicação de um monômio por um polinômio, quanto o caso da multiplicação de um polinômio por um polinômio.

Multiplicação de um Polinômio por um Monômio

No primeiro caso a multiplicação é realizada multiplicando-se o monômio por cada um dos termos do polinômio.
Vejamos a multiplicação abaixo:

$$7xy^2 \cdot (2x^2 + y) = (7xy^2 \cdot 2x^2) + (7xy^2 \cdot y) = 14x^3y^2 + 7xy^3$$

Veja mais alguns exemplos:

- $2a \cdot (7b + 3c) = (2a \cdot 7b) + (2a \cdot 3c) = 14ab + 6ac$
- $(6a + 5b) \cdot 3c = (6a \cdot 3c) + (5b \cdot 3c) = 18ac + 15bc$
- $(4x - 2y) \cdot -3x = (4x \cdot -3x) - (2y \cdot -3x) = -12x^2 + 6xy$

Multiplicação de um Polinômio por um Polinômio

No caso da multiplicação de polinômio por polinômio efetuamos a multiplicação de cada um dos termos do primeiro polinômio, por cada um dos termos do segundo polinômio e depois realizamos a redução do polinômio resultante.

Vamos analisar a multiplicação abaixo a qual separamos em três linhas para podermos observá-la mais facilmente:

Divisão de Polinômios

Como no caso da multiplicação, temos tanto a divisão de um polinômio por um monômio, quanto a divisão de um polinômio por um polinômio. Vamos tratar cada um dos casos individualmente.

Divisão de um Polinômio por um Monômio

Este é o caso mais simples, pois podemos fazê-lo dividindo cada um dos monômios que formam o polinômio, pelo monômio em questão.

Vamos analisar a divisão do polinômio abaixo:

$$(14x^3y^2 + 7xy^3) \div 7xy^2 = (14x^3y^2 \div 7xy^2) + (7xy^3 \div 7xy^2) = 2x^2 + y$$

Divisão de um Polinômio por um Polinômio

Para realizarmos a divisão de polinômios é preciso que eles estejam reduzidos e ordenados.

Vamos dividir $\mathbf{2x^4 - 7x^3 + 3x^2}$ por $\mathbf{x - 2}$

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \underline{x - 2\quad} \\
\underline{-2x^4} & \underline{+\ 4x^3} & & 2x^3 - 3x^2 \\
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & \\
 & \underline{3x^3} & \underline{-\ 6x^2} & \\
 & 0 & -\ 3x^2 &
\end{array}$$

Exercícios para as aulas foram retirados do livro texto da turma.

A avaliação ao fim de cada aula com alunos indo ao quadro para resolver os exercícios.

Avaliação do trabalho:

Pontos positivos: A utilização dos roteiros de ação e a troca no fórum.

Pontos negativos: O tempo desse bimestre que foi muito curto.

Impressões dos alunos: Eles gostaram dessa nova abordagem bem mais contextualizada.

Alterações: Sem alteração.