Formação Continuada em Matemática

Plano de Trabalho

Esferas

Cursista: Igor de Freitas Leardini

Série: 2º ano – Ensino Médio

Tutor: Deivis de Oliveira Alves

Sumário

Introdução

Este plano de trabalho tem como objetivo fazer com que os alunos identifiquem e reconheçam uma esfera, e a partir disso, possam resolver problemas relacionados a áreas e volumes das mesmas.

Essas figuras serão introduzidas através de material concreto do cotidiano dos alunos, fazendo uso de vídeos, utilizando o data – show em todas as figuras deste plano de trabalho, enfim, ferramentas para que possam sempre terem uma melhor compreensão e poderem, principalmente, diferenciar as partes de uma esfera.

É necessário que se faça algumas revisões como, Teorema de Pitágoras, área de círculo e alguns conceitos já vistos em cilindros e cones.

Para tal plano serão necessárias 04 (quatro) aulas de 50 minutos e para a avaliação formal serão necessárias 02 (duas) aulas de 50 minutos.

Desenvolvimento

Atividade 1

- Habilidade relacionada: Reconhecer esferas e resolver problemas com áreas – Discretores **H04 e H24**

- Pré – requisito: área de círculo, Teorema de Pitágoras , Trigonometria, cilindros e cones.

- Tempo de duração: 100 minutos

- Recursos utilizados: Data-show, livro didático, Geogebra, Youtube, lousa.

- Organização da turma: Individual ou dupla.

- Objetivos: Fazer o aluno reconhecer esferas e saber diferenciar suas partes, calculando sua área.

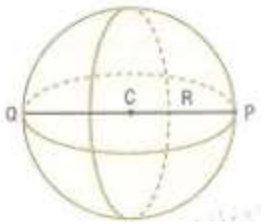
- Metodologia: Apresentar em data-show os vídeos sobre introdução à esfera.(http://www.youtube.com/watch?v=ccie8Vaf3oI) (http://www.youtube.com/watch?v=tCdwpTmFvRU)

A Esfera

Consideremos um ponto C e um número real positivo R qualquer.

A esfera de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C.

A "casquinha" ou a fronteira da esfera chama-se *superfície esférica*.



C = $Centro da esfera$

$\overline{CP}$ = $raio da esfera$

$\overline{PQ} = diâmetro da esfera$

$R = medida do raio da esfera$

Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.336)

Fazendo uso do roteiro de ação 1 e do Geogebra, mostrar tais definições acima descritas.

Área da superfície esférica

Na figura estão desenhados três círculos máximos. A área da superfície esférica é dada pelo quádruplo da área de um dos círculos máximos, ou seja:

$$A=4\pi R^2$$

Por exemplo, se o raio de uma esfera é 9 cm, a área da superfície esférica será dada por:

$$A=4\cdot 3{,}14\cdot 9^2=1017{,}36 cm^2$$

Essa fórmula será justificada depois de se aprender a calcular o volume da esfera.

Exercícios de fixação: Livro didático

Exercício avaliativo

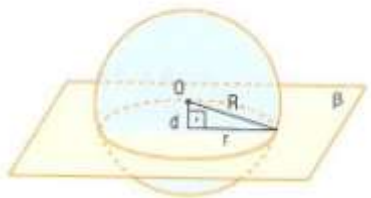
Quantos metros quadrados de plástico são gastos aproximadamente para fazer o balão da figura abaixo?

Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.336)

Atividade 2

- Habilidade relacionada: Cálculo do volume de uma esfera – Discritor **H25**.
- Pré – requisito: Teorema de Pitágoras , Princípio de Cavalieri, cilindros e cones.
- Tempo de duração: 100 minutos
- Recursos utilizados: Data-show, livro didático, Geogebra, lousa.
- Organização da turma: Individual ou dupla.
- Objetivos: Fazer o aluno reconhecer esferas calculando seu volume.
- Metodologia: Começar com o roteiro 3, mostrando a visualização do Geogebra.

Observe a figura abaixo, em que aparece a secção determinada em uma esfera de raio R por um plano β.



Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.337)

A intersecção do plano β com a esfera é um círculo de raio r. Se d é a distância de O (centro da esfera) ao plano β, temos:

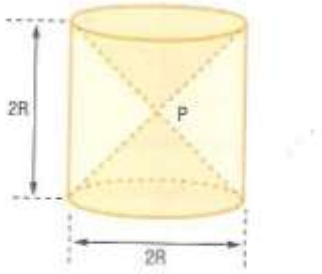
$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

Portanto, a área da secção é dada por:

$$\pi(R^2 - d^2)$$

O volume da esfera será determinado utilizando o princípio de Cavalieri. Para isso, vamos considerar inicialmente um sólido S que será obtido da seguinte maneira:

De um cilindro eqüilátero de raio R e altura 2R retiramos dois cones de raio R, altura R e vértice P.

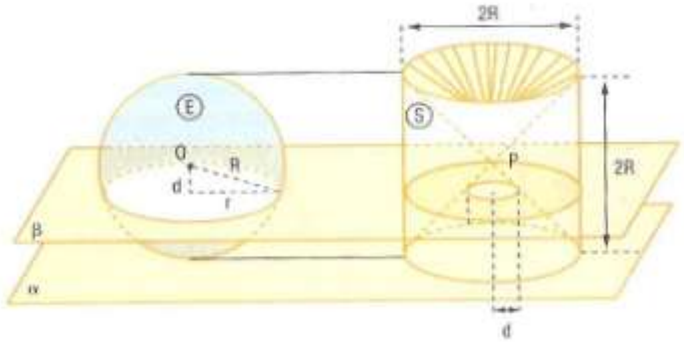


Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.337)

O volume do sólido S é tal que:

Volume de S = $\underbrace{\pi R^2 \cdot 2R}_{cilindro} - \underbrace{2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R}_{2\,cones} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Agora podemos considerar, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E de raio R, conforme mostra a figura:



Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.338)

Se um plano β, paralelo a α, seccionar a esfera E, a área da secção será $\pi(R^2 - d^2)$ conforme foi visto. Além disso, β também secciona o sólido S e a secção será uma coroa circular de raios R e d, e também área igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A igualdade das áreas das secções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem o mesmo volume que o sólido S, que como sabemos é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

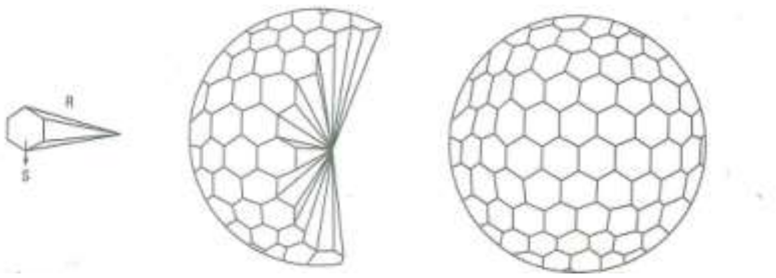
Podemos então concluir que, se uma esfera tem raio R, seu volume é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Apêndice

Depois de conhecer o volume da esfera, podemos justificar por que a área da superfície esférica é $4\pi R^2$.

Podemos imaginar a esfera, de maneira aproximada, como a reunião em torno de um ponto (centro da esfera) de um grande número de pirâmides, conforme as figuras:



Fonte: Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.347)

Assim, o volume da esfera é, aproximadamente, igual à soma dos volumes de todas as pirâmides componentes. Repare que a altura da pirâmide é o raio da esfera. Pensando assim, a superfície esférica fica dividida em um grande número de “polígonos” (base das pirâmides)

Digamos que a superfície esférica tenha ficado dividida em n polígonos, cujas áreas são $S_1, S_2, ..., S_n$.

Lembrando que o volume de cada pirâmide é

$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_n)R = \frac{1}{3}AR$$

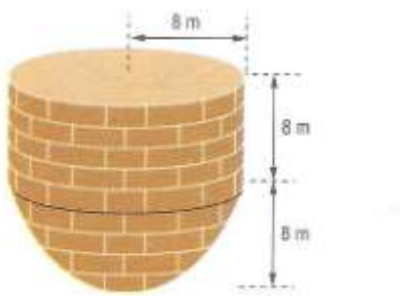
$$ou\ seja: \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \quad \Rightarrow \quad A = 4\pi R^2$$

Logo, a área da superfície esférica de raio R é **A =** $4\pi R^2$.

Exercícios de fixação: Livro didático

Exercícios avaliativos

Um reservatório tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro. Qual será o volume, em litros, de um liquido que ocupe totalmente o reservatório?



Fonte:Matemática – Contextos e aplicações (Luis Roberto; Dante, 2003, pág.341)

Avaliação

A avaliação é um instrumento onde professor e aluno podem estar refletindo sobre o conteúdo abordado no bimestre. Sendo assim, ela ocorrerá de maneira que o aluno possa construir o conhecimento a cada etapa do conteúdo, através de exercícios avaliativos, após a introdução de cada assunto pertinente(máximo de 15 minutos/aula).

Após toda a introdução necessária, aplicaríamos uma avaliação individual escrita (com duração de 100 minutos), onde estaríamos colocando em prática todo assunto visto, dando ênfase à questões nos moldes do Saerjinho.

Considerações Finais

Vale ressaltar que todo o plano de trabalho foi desenvolvido para aliar conceito com a prática, sempre com o objetivo que o aluno possa ter uma visão de aplicabilidade aos conceitos estudados.

Obviamente, estando aberto a novos métodos e práticas relevantes para o acréscimo de tais desenvolvimentos.

Referências

- Dante, L.R. **Matemática-contextos e aplicações**, São Paulo: Ática, 2003 – pág.336 a pág.347.
- Roteiros de ação – Esferas – Curso de aperfeiçoamento em Matemática oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Medio – 4º bim – 2012, http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em Novembro/2012.,em anexo.
- Geogebra

Anexo

Roteiro de Ação 1 – Gira, gira, gira e eis que surge uma esfera? Ou uma superfície esférica?

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
ASSUNTO: Geometria Espacial _ Esfera
OBJETIVOS: Apresentar a esfera como um sólido de revolução a partir da rotação de uma região circular em torno de um eixo.
PRÉ-REQUISITOS: Ponto, reta, círculo e semicírculo.
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, computador com programa de geometria dinâmica Geogebra instalado e com os arquivos "Esfera de revolução.ggb" disponibilizado.
ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
DESCRITORES ASSOCIADOS:

- *H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas por meio de suas principais características.*

Neste roteiro iremos apresentar a esfera como sólido de revolução, a partir da rotação de um semicírculo em torno de um eixo que passa pelo centro. Pelo mesmo procedimento, você verá a geração de uma superfície esférica. Para isso, faremos uso do software Geogebra, que pode ser baixado gratuitamente no *link* http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

Lembramos que, se você ainda não o utilizou para fazer construções com sua turma, é interessante que faça uma seção introdutória de familiarização com esta ferramenta tecnológica. Caso haja dificuldades em utilizar o laboratório da escola, uma opção é levar um Datashow para a sala de aula. Nesse caso, convide alguns alunos para experimentarem o uso do *software*. Dessa forma, eles apenas responderão os questionamentos.

A mesma atividade pode ser realizada com material concreto, usando palitos de churrasco, cartolina e arame. Deixamos como dica o link http://www.uff.br/cdme/solidos_revolucao/index.html , onde todo o procedimento é apresentado, assim como a confecção do material.

1) Abra o arquivo "Esfera de revolução.ggb" que o professor disponibilizou.

2) Observe as duas figuras em vermelho que aparecem na tela de visualização. Você poderia citar o nome delas?

Talvez o seu aluno se confunda com os nomes, podendo dizer que ambos são semicircunferências. É a hora de lembrá-los sobre os conceitos de círculo e circunferência, comentando sobre as diferenças entre eles. Na figura da esquerda temos uma semicircunferência, enquanto na figura da direita temos um semicírculo.

3) Clique com o botão direito do mouse sobre o botão play para

animar. O que está acontecendo com a semicircunferência?

4) Pause a animação e selecione a semicircunferência. Com o botão esquerdo do mouse, clique sobre ela. Aparecerá um menu, onde você irá escolher a opção Habilitar Rastro. Faça o mesmo com o ponto C e dê um play. Que sólido está sendo formado?

Neste caso temos uma superfície esférica, já que estamos fazendo a rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo. Seria interessante conversar um pouco com seus alunos sobre a diferença entre esfera e superfície esférica. Você pode dar uma olhada no exemplo da laranja utilizada no texto base e usá-lo com seus alunos. Lembrando que a casca precisa ser montada de modo a aparecer a superfície da laranja.

5) Observe que o segmento *AB* está sobre o eixo de rotação da semicircunferência e que o ponto D pertence a este segmento, dividindo-o ao meio. Você sabe que nome recebe o segmento *AB* em relação à superfície esférica? E ao ponto D, que nome ele recebe?

6) Pressione as teclas CTRL + Z para voltarmos à posição inicial da semicircunferência. A superfície esférica é gerada a partir da rotação de *AB* , em vermelho, em torno de um eixo, correto? Que nome você sugeriria para *AB* em relação à superfície esférica? Converse com seu colega e dê a sua sugestão.

Saiba que o segmento *AB* sobre o eixo de rotação da semicircunferência é chamado de diâmetro da superfície esférica e o ponto D, que pertence a este segmento, é chamado de centro. Assim, podemos considerar os segmentos *AD* e *DB*
como raios, já que *AD*= *DB.*

7) Existe um ponto C pertencente à »*AB* que divide-o ao meio. Ao rotacionar »*AB* , uma figura geométrica plana é formada em preto? Que figura geométrica é essa?

Converse com seus alunos sobre a circunferência que é formada com a rotação do ponto C pertencente a »*AB* em torno de um eixo. É importante falar que toda seção plana de uma superfície esférica é uma circunferência.

8) Agora, mova o seletor $\beta = 0$ até $\beta = 180°$ e veja o que acontece com o semicírculo vermelho, à direita. Que sólido geométrico está sendo formado?

Ao rotacionar o semicírculo, os alunos perceberão que será formada uma esfera. A partir deste ponto sugerimos que você defina formalmente os conceitos de esfera e superfície esférica. Você pode seguir a idéia proposta no texto base para apresentar estas definições.

9) Ao interceptarmos um plano com a esfera, que figura geométrica plana é formada? Para ajudá-lo, observe o plano que contem o

ponto G após a rotação do semicírculo *EF*. Eles deverão perceber que será formado um círculo.

Roteiro de Ação 3 – Volume da Esfera a partir de outros volumes – Parte II

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria Espacial _ Esfera

OBJETIVOS: Trabalhar o conceito de volume da esfera a partir da comparação com o volume de outros sólidos geométricos já conhecidos.

PRÉ-REQUISITOS: Volume do Cone e Volume do Cilindro.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, computador com programa de geometria dinâmica Geogebra instalado e com os arquivo "Volume da esfera.ggb" disponibilizado.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

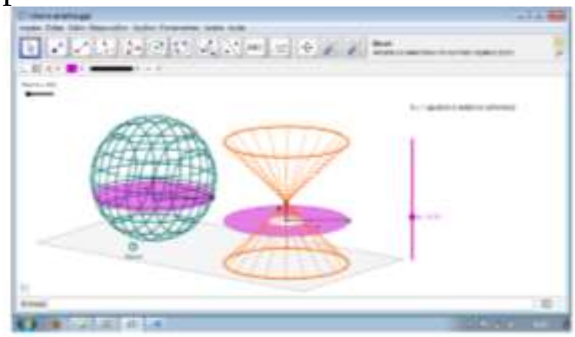
DESCRITORES ASSOCIADOS:

- *H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.*

Fazendo uso do *software* de geometria dinâmica Geogebra, buscamos trabalhar o volume da esfera a partir do volume do cone e do cilindro.

O *software* Geogebra pode ser baixado gratuitamente no *link* http://www.geogebra.org/cms/pt_BR. Lembramos que, se você ainda não o utilizou para fazer construções com sua turma, é interessante que faça uma seção introdutória de familiarização com esta ferramenta tecnológica. Caso haja dificuldades em utilizar o laboratório da escola, uma opção é levar um Datashow para a sala de aula. Nesse caso, convide alguns alunos para experimentarem o uso do *software*. Eles precisarão apenas responder a folha de atividades.

1) Abra o arquivo “Volume da esfera.ggb” disponibilizado pelo seu professor e observe-o.



2) Que sólidos geométricos temos na tela de visualização?

Não será muito difícil para o aluno lembrar o nome desses sólidos, cone reto e esfera. O importante é você ressaltar o fato de termos dois cones.

Existe um equipamento chamado ***Clepsidra*** cujo formato é bem parecido com o sólido composto pelos dois cones no Geogebra. Também conhecido como relógio de água, foi um dos primeiros sistemas criados pelo homem para medir o tempo. Trata-se de um dispositivo movido a água, que funciona por gravidade, no mesmo princípio da ampulheta (de areia).

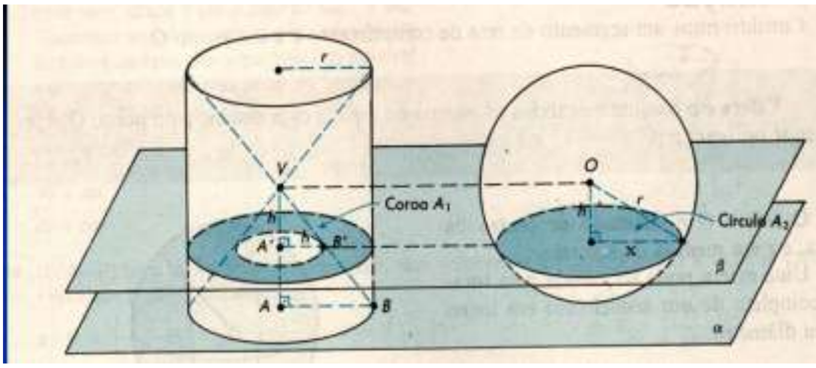
3) Clique no botão mover para girar os sólidos e observá-los em outros ângulos. Se preferir, você também pode ampliar ou reduzir a tela, movimentando o botão no seletor Zoom = 0.6.

4) Movimente o seletor s = 0.35 no canto direito da tela. O que você observa em relação à região roxa que aparece na esfera e nos cones? E a altura h, ela varia?

Os alunos poderão notar que ao mover o seletor s, à medida que a região roxa nos cones sobe ou desce, a região roxa na esfera também sobe ou desce. A altura h também varia de acordo com o movimento.

5) Será que as regiões roxas nos cones e na esfera possuem a mesma área? O que você acha? Que tal conversar com seu colega?

6) Como podemos escrever a área do círculo roxo na esfera em função da altura h e do raio r? E área da coroa circular em roxo nos cones? Elas são iguais?

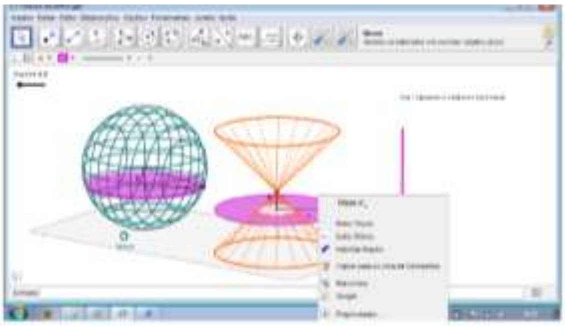


Esperamos que seu aluno chegue a conclusão que a área do círculo na esfera é dado por πx^2 , onde x é o raio do círculo. Mas, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 = r^2 - h^2$, então seu aluno chegará a seguinte fórmula para a área do círculo roxo : $\pi(r^2 - h^2)$

Já na área da coroa circular, o aluno deverá chegar a seguinte conclusão $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$

Ou seja, as áreas são iguais.

7) Clique com o botão direito do mouse sobre a região roxa nos cones. É importante que o seletor s não esteja nos extremos. Aparecerá um menu, onde você deverá habilitar o rastro.



8) Novamente com o botão direito do mouse você irá clicar sobre o ponto s e logo aparecerá um menu, onde você irá selecionar a opção Animar.

9) Agora, observe o que acontece. Que sólido geométrico está sendo formado?

10) Sabendo que a altura do cone é dado por h (quando o seletor está em seus extremos), e que h = r, o que podemos afirmar sobre a altura do cilindro?

11) E qual é o diâmetro da esfera? Esse diâmetro é igual a altura do cilindro?

Após seguir os passos dos itens 7 e 8, um cilindro vai sendo formado conforme a animação vai acontecendo. A altura deste cilindro é igual a duas vezes a altura do cone, ou seja
Altura Cilindro = 2. Altura Cone = 2. h = 2. r
Quanto a esfera, temos que o diâmetro é
d = 2 .r
Assim, eles perceberão que altura do cilindro e o diâmetro da esfera são iguais. Pode dizer que eles possuem a mesma altura.
Existe um princípio que diz que dois sólidos que tiverem a mesma altura e sempre que seccionados por um mesmo plano gerarem áreas iguais, terão o mesmo volume. Ele é chamado de *Princípio de Cavalieri*.
12) Sabendo que as áreas seccionadas são iguais e que a altura do sólido da direita é igual ao da esfera, o que podemos dizer sobre o volume desses dois sólidos, a partir do Princípio de Cavalieri?

Os alunos chegarão a conclusão que os volumes dos sólidos são iguais a partir do Princípio de Cavalieri.

13) Você lembra da fórmula do volume do cilindro? E do volume do cone? Converse com seus colegas e escreva-as.

Caso os alunos não lembrem as fórmulas do volume do cilindro e do cone, exponha para eles.
O volume do Cilindro é dado por $V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$
e o volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
14) Como podemos calcular o volume do sólido da esquerda, composto, agora, pelo cilindro e pelo cone? Discuta com seu colega a partir de suas observações e escreva a fórmula.

15) E que tal escrever esta fórmula em função do raio r? Tente!

Espera-se que o aluno entenda que o volume do primeiro solido é dado pela diferença do volume do cilindro e do volume dos cones, ou seja,
que é o volume da esfera.