Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 2º ano
4º Bimestre de 2012
Grupo 1

Plano de Trabalho 2: GEOMETRIA ESPACIAL - ESFERA

Cursista: **Josiane da Cunha Souza Page**
Tutor: **Maria Cláudia Padilha Tostes**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade do aluno para aplicações mais elaboradas. O pré-requisito básico para as atividades propostas serão a leitura, interpretação e as operações básicas matemáticas.

No primeiro momento do plano de trabalho é apresentar algumas imagens de construção e obras de arte visitando o universo dos corpos redondos (esfera) e conhecendo sua história. O próximo passo será a partir de objetos concretos (bolas – esporte, globo terrestre, laranja, limão etc.) identificarem os seus elementos onde logo após passaremos para a definição do cálculo da área da superfície e do volume de uma esfera. Em seguida, passaremos para a resolução de quinze situações-problemas que irão conduzir a aplicação dos cálculos de área da superfície e volume das esferas trabalhando as habilidades do Currículo Mínimo 2012. Depois será abordado um pouco de História para abordar a evolução histórica dos conceitos estudados. Para finalizar o plano de trabalho será desenvolvida uma atividade musical onde os alunos aplicaram todos os conceitos/fórmulas aprendidos durante o ano letivo em uma canção criada ou modificada por eles.

Por fim o processo de avaliação que é um instrumento fundamental para se obter informações sobre como foi o andamento do processo ensino-aprendizagem. Somente o diagnóstico contínuo possibilita a reformulação de procedimentos e estratégias, visando sempre o sucesso efetivo de nossos alunos.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1:

HABILIDADE RELACIONADA: Reconhecer corpos redondos (esfera) por meio de suas principais características;

PRÉ-REQUISITOS: Leitura e identificação de corpos redondos.

TEMPO DE DURAÇÃO: 20 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Notebook e projetor de multimídia

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de no máximo 4 alunos.

OBJETIVOS: Reconhecer a forma estudada em objetos, embalagens, construções, obras de arte entre outros.

METODOLOGIA ADOTADA: Através de uma apresentação no PowerPoint com imagens com formas arredondadas pedir aos alunos para comentar sobre todas as gravuras apresentadas, aproveitando a oportunidade para destacar a esfera. Como também identificar as semelhanças e diferenças que eles puderem observar entre os corpos redondos já conhecidos e estudados por eles.

Ao observar algumas imagens, podemos nos surpreender, em função da beleza, da leveza dos traços, das combinações de cores empregadas ou ainda as curiosidades, surpresas e ilusões ali presentes. Ao observar uma gravura do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) podemos ter algumas dessas sensações, pois em muitas delas tudo o que está ali presente nunca é o que realmente parece ser. Na imagem abaixo, se olharmos mais atentamente, notamos que a cena seria impossível de ocorrer na realidade, apesar de a gravura apresentar harmonia nos traços, qualidade técnica e estética e, também, respeito às regras geométricas do desenho e da perspectiva.


Queda-d'água, de Maurits Cornelis Escher, 1961. Litografia, 38 cm × 30 cm.

Os desenhos desse artista, porém, não nasciam como um toque de mágica. Para executá-los, Escher fazia uso de vários conceitos matemáticos, principalmente no campo da geometria. Assim, suas obras estão diretamente ligadas à Matemática, e ele mesmo dizia:

"Eu freqüentemente sinto ter mais em comum com matemáticos do que com meus colegas artistas."

Em algumas de suas obras, esse artista utilizava formas geométricas, entre elas as esferas como mostram as imagens a seguir.


Varanda, de Maurits Cornelis Escher, 1945. Litografia, 30 cm × 23,5 cm.


Mão com esfera reflectora, de Maurits Cornelis Escher, 1935. Litografia, 32 cm × 21,5 cm.


Superfície esférica com peixes, de Maurits Cornelis Escher, 1958. Xilogravura, com diâmetro de 32 cm.


Três esferas II, de Maurits Cornelis Escher, 1946. Litografia, 26 cm × 47 cm. Nessa imagem, Escher mostra três esferas, sendo a da esquerda transparente, a do centro refletiva, pois mostra a imagem de Escher, e a esfera da direita opaca.

Algumas vezes pela otimização de material, outras pelo aspecto visual, determinadas formas têm sido utilizadas com mais freqüência pela indústria e pela arquitetura. Alguns arquitetos, por exemplo, se destacam por apresentar elementos curvos em suas obras. Dentre eles, podemos citar o arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, considerado um dos maiores do mundo, sendo um dos poucos centenários ainda em atividade.

À nossa volta, encontramos, freqüentemente, seja na embalagem de um produto, em um silo de estocagem de grãos ou em um edifício, objetos e construções com forma cilíndrica, cônica ou esférica.

As esferas são um tipo de sólido bastante diferente dos anteriormente tratados, pois não possuem vértices, arestas e faces, não apresentam nenhuma parte plana em sua superfície e, seja qual for a posição em que as observamos, a sua parte visível e a não-visível apresentam sempre a mesma forma. Muitos chamam este sólido de perfeito.

ATIVIDADE 2:

HABILIDADE RELACIONADA: Deparar com o raciocínio dedutivo para compreensão das fórmulas e visualizar o mundo real;

PRÉ-REQUISITOS: Operações básicas matemáticas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Notebook, projetor de multimídia, objetos arredondados, quadro branco e pincel.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de no máximo 4 alunos.

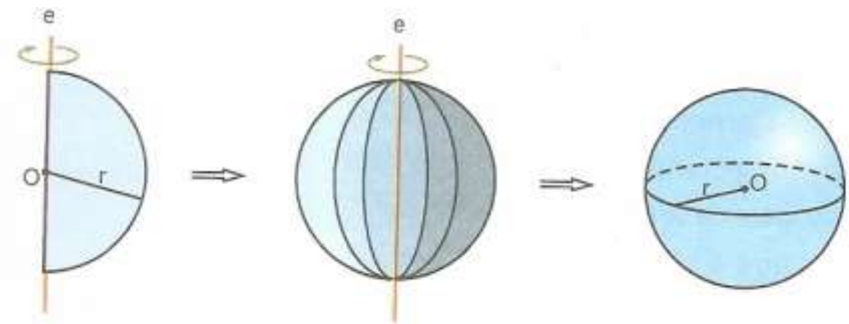
OBJETIVOS: Identificar esferas e seus elementos; Construir as fórmulas de área de superfície e volume da esfera.

METODOLOGIA ADOTADA: A proposta é a visualização de objetos arredondados como bolas (esportes), globo terrestre, frutas para identificação de seus elementos e a partir daí a demonstração das fórmulas de área da superfície e do volume da esfera.

Todos os esportes que utilizam bola devem obedecer a regras e padrões determinados por órgãos oficiais. Bolas de futebol, por exemplo, devem ter uma circunferência de 68 cm a 70 cm e massa entre 410 g e 450 g, segundo a FIFA (Federação Internacional de Futebol Associados). Já a de voleibol, segundo a FIVB (Federação Internacional de Voleibol) deve ter uma circunferência entre 65 cm e 67 cm e massa entre 260 g e 280 g.

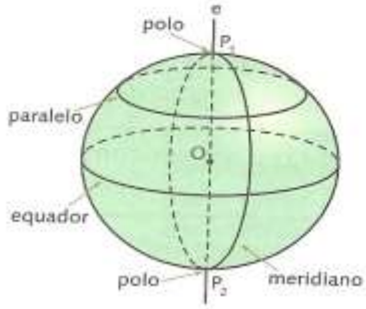
Existem vários tipos de caneta, dentre as quais, as chamadas canetas esferográficas. O sistema de funcionamento desse tipo de caneta consiste em uma esfera rolante em sua ponta, que é umedecida em tinta e desliza sobre as superfícies, possibilitando um fluxo contínuo e controlado da tinta.

A esfera também pode ser definida como um sólido de revolução, obtido da rotação completa de um semicírculo em torno da reta que contém o seu diâmetro.



Elementos da esfera

Em uma esfera, podemos destacar alguns elementos. Na esfera, ao lado, temos:



- **eixo**: é uma reta que passa pelo centro O da esfera. Nessa caso, a reta e
- **polos**: são as interseções do eixo com a superfície esférica. Nesse caso, P_1 e P_2
- **equador**: é a circunferência obtida pela interseção da superfície esférica e o plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro O
- **paralelo**: é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo
- **meridiano**: é qualquer seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo
- **seção da esfera**: é o círculo obtido pela interseção da esfera e um plano secante a ela. Se o plano secante contém o centro O da esfera, temos um **círculo máximo**

Área da superfície de uma esfera

Imagine uma esfera de centro O e raio r cuja superfície foi dividida, no limite, em um número muito grande de regiões planas. Cada uma dessas regiões será base de um sólido que é uma pirâmide, cujo vértice V se encontra no centro da esfera e cuja altura é, no limite, igual ao raio da esfera.

Ilustrações: Nelson Ishikawa/Arquivo da editora

Chamando de A_1, A_2, A_3,..., A_n as áreas das regiões que compõem a superfície da esfera, podemos calcular seu volume da seguinte forma:

$$V = \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \frac{1}{3}A_3r + ... + \frac{1}{3}A_nr \Rightarrow V = \frac{1}{3}r\underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)}_{A\text{: área da superfície esférica}}$$

Sabemos que o volume da esfera é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Dessa forma, temos:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)}_{A} \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Portanto, a área da superfície de uma esfera de raio r pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

$$A = 4\pi r^2$$

Volume de uma esfera

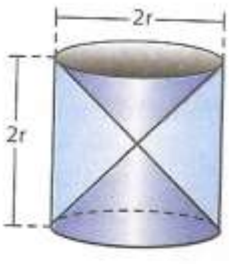
Na figura, ao lado, temos uma esfera de centro O e raio r e um plano α que a corta a uma distância d do centro, determinando uma região que corresponde a um círculo de raio r'.

De acordo com o teorema de Pitágoras: $r^2 = d^2 + r'^2 \Rightarrow r'^2 = r^2 - d^2$.

Dessa forma, a área do círculo é dada por: $A = \pi r'^2 \Rightarrow A = \pi\left(r^2 - d^2\right)$.

Para obtermos o volume da esfera, será utilizado o princípio de Cavalieri. Nesse caso, vamos considerar um sólido de volume conhecido, tal que as regiões determinadas por planos horizontais na esfera e no sólido tenham áreas iguais.

Esse sólido é obtido de um cilindro equilátero de raio r e altura $2r$. Dele, retiramos dois cones de raio r e altura r.



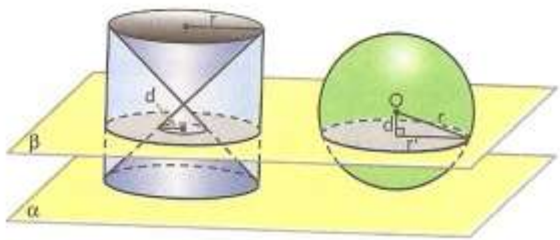
Note que o volume desse sólido corresponde ao volume do cilindro menos o volume dos dois cones, isto é:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Consideremos agora a esfera e o sólido obtidos anteriormente, apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também um plano β qualquer, paralelo a α, cortando o sólido e a esfera.

Observação

O sólido e a esfera têm a mesma altura.



O plano β determinou uma região no sólido e outra na esfera. A região determinada na esfera corresponde a um círculo de área $\pi\left(r^2 - d^2\right)$, como vimos anteriormente. A região determinada no sólido corresponde a uma coroa de raios r e d, cuja área também é igual a $\pi\left(r^2 - d^2\right)$, pois:

$$\pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

Pelo princípio de Cavalieri, como as regiões delimitadas por planos horizontais têm áreas iguais, a esfera e o sólido têm o mesmo volume: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Portanto, o volume de uma esfera de raio r pode ser calculado por meio da expressão:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

ATIVIDADE 3:

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas envolvendo noções de área da superfície esférica e volume da esfera;

PRÉ-REQUISITOS: Operações básicas da matemática, medidas de área e de capacidade.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha fotocopiada (xerox).

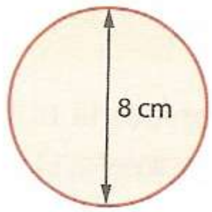
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de no máximo 4 alunos.

OBJETIVOS: Possibilitar a abstração dos conceitos geométricos de forma clara e coerente. Utilizar os conceitos de esfera na resolução de problemas para calcular a área da superfície e o seu volume.

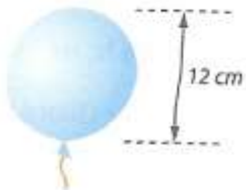
METODOLOGIA ADOTADA: Resolver quinze situações-problema levando os alunos a reconhecer os elementos e calcular a área da superfície esférica e o seu volume. Em cada atividade os conceitos serão reforçados gradativamente para garantir um aprendizado concreto e significativo.

QUESTÕES PROPOSTAS:

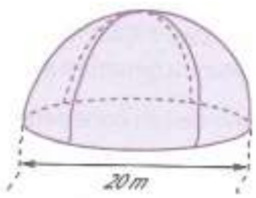
1) Uma laranja tem a forma esférica com a medida indicada abaixo. Qual é a área aproximada da casca dessa laranja?



2) Quantos metros quadrados de plástico são gastos aproximadamente para fazer o balão da figura ao lado?



3) A figura abaixo representa um hemisfério. Qual é a área da superfície desse hemisfério?



4) Uma indústria calcula o custo do material utilizado na confecção de bolas plásticas de acordo com a área da superfície externa de cada bola.

Veja, no quadro abaixo, o diâmetro e o custo por metro quadrado do material utilizado na fabricação de bolas de quatro tamanhos diferentes.

Custo do material utilizado	
Diâmetro da bola (cm)	**Custo por metro quadrado (R$)**
9	7,35
12	7,30
15	6,84
18	6,50

Com base nessas informações, determine o diâmetro da bola que tem:

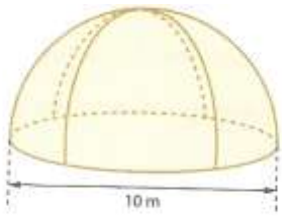
a) O menor custo com material em sua produção?

b) O maior custo com material em sua produção?

5) Qual é o volume de uma bola de basquete cujo diâmetro mede 26 cm?

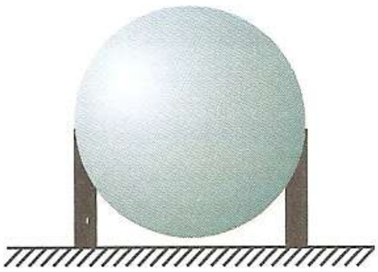
6) O diâmetro de uma esfera de ferro fundido mede 6 cm. Qual é o volume dessa esfera?

7) Um reservatório tem a forma de um hemisfério (figura a seguir). Qual é o volume máximo de líquido que cabe nesse reservatório, em litros?



8) Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8 cm de diâmetro, qual é o volume de cada gomo?

9) Um reservatório de forma esférica (figura abaixo) tem 9 m de raio. Para encher totalmente esse reservatório são necessárias 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos m^3/h?



10) Sabemos que uma bóia (figura a seguir) serva para orientar os navios na estrada de um porto. Essa bóia é formada por um hemisfério de 2 m de diâmetro e por um cone que tem 80 cm de altura. Qual é o volume da bóia?

11) Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.

12) Qual é a área total e o volume de um recipiente semi-esférico de raio 3 cm?

13) Um cone é equivalente a um hemisfério de 25 cm de diâmetro. Determinar a área lateral do cone sabendo que as bases do cone e do hemisfério são coincidentes.

14) Uma esfera está inscrita num cubo cuja aresta mede 20 cm. Calcule a área da superfície esférica.

15) Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1 cm?

ATIVIDADE 5:

HABILIDADE RELACIONADA: Compreender os conhecimentos científicos e tecnológicos como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico social.

PRÉ-REQUISITOS: Leitura e interpretação de texto.

TEMPO DE DURAÇÃO: 30 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: notebook, projetor de multimídia.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de no máximo 4 alunos.

OBJETIVOS: Despertar a consciência crítica e perceber que os conteúdos de Matemática no campo da Geometria também foram descobertos em consequência da necessidade de resolver problemas existentes.

METODOLOGIA ADOTADA: Será apresentado aos alunos através de slides o valor da história no estudo da esfera.

Um pouco sobre a vida de um gênio

O cálculo do volume da esfera e da área da superfície é uma preocupação muito antiga dos matemáticos, e parece ter sido Arquimedes (287-212 a. C.) o primeiro a saber e provar os teoremas relativos a ele. Tais teoremas aparecem em sua obra Sobre a esfera e o cilindro, um dos grandes tratados escritos e publicados por este que foi, sem dúvida alguma, um dos maiores gênios da história e o maior matemático da Antiguidade.

"Durante toda a idade Helenística, o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas o maior matemático desse tempo – e de toda a Antiguidade – não nasceu nessa cidade. Arquimedes pode ter estudado por algum tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides, e manteve comunicação com os matemáticos de lá, mas ele viveu e morreu em Siracusa. Conhece-se poucos fatos de sua vida, mas tem-se alguma informação tirada da narração de Plutarco sobre a vida de Marcelo, o general romano.

Durante a Segunda Guerra Púnica, a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago; tendo-se associado a essa última, a cidade foi sitiada pelos romanos durante os anos de 214 a 212 a.C. Lemos que, durante o cerco, Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância – catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; invenções para queimar os navios. Por fim, no entanto, Siracusa caiu devido a uma "quinta coluna", durante o saque da cidade, Arquimedes foi morto por um soldado romano, apesar das ordens de Marcelo para que o geômetra fosse poupado. Como se diz que Arquimedes tinha então setenta e cinco anos, provavelmente nasceu em 287 a.C.

Seu pai era astrônomo e Arquimedes também adquiriu uma reputação em astronomia. Diz-se que Marcelo reservou para si, como parte do sangue, engenhosos planetários que Arquimedes tinha construído para retratar os movimentos dos corpos celestes. Todas as narrações da vida de Arquimedes, no entanto, concordam em que ele dava pouco valor a seus engenhos mecânicos, em comparação com o produto de seus pensamentos. Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, ele estava muito mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas. (...)

Arquimedes escreveu muitos tratados maravilhosos, dentre os quais, seus sucessores se inclinavam a admirar naus Sobre espirais. O próprio autor parece ter preferido outro, Sobre a esfera e o cilindro.

Arquimedes pediu que sobre seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele tinha descoberto, e provado, que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas, isto é, três para dois. Essa propriedade que Arquimedes descobriu após sua Quadratura da parábola era, diz ele, desconhecida dos geômetras que o precederam. Tinha-se pensado outrora que os egípcios sabiam achar a área de um hemisfério; mas agora Arquimedes aparece como o primeiro a saber e provar que a área da superfície esférica é quatro vezes a área de um seu círculo máximo."

ATIVIDADE 6:

HABILIDADE RELACIONADA: Associar os conhecimentos matemáticos e geométricos com a criação das letras de música pelos próprios alunos, despertando o interesse destes pelas melodias, musicalidades, interpretações e apresentações de suas obras.

PRÉ-REQUISITOS: Fórmulas matemáticas, criatividade, imaginação e motivação.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de ofício, lápis e violão

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de no máximo 4 alunos.

OBJETIVOS: Criar letra e melodia para uma música com tema matemático trabalhado pelo Currículo Mínimo 2012 durante todo ano letivo.

METODOLOGIA ADOTADA: Os alunos divididos em grupos participam de um sorteio com todos os conteúdos estudados durante o ano letivo. Com o tema de cada grupo já definido, a tarefa dos grupos é elaborar uma música com letra e melodia (inédita ou paródia) que descreva os conceitos do tema sorteado. Após a criação os autores (alunos) farão uma apresentação, com acompanhamento de instrumentos musicais levados e tocados por eles, na própria sala de aula mostrando as suas autorias de forma criativa e divertida.

AVALIAÇÃO

A avaliação é um processo, não uma série de obstáculos a serem vencidos. Ao longo do plano de trabalho 2, muitas oportunidades de observação serão aproveitadas. A identificação do conhecimento prévio do aluno, proposto em todas as atividades propostas. Além disso, no decorrer das atividades serão pontuados, registrados e relatados procedimentos comuns, relevantes e diferentes que irão contribuir para melhor avaliar o aluno.

O acompanhamento durante a resolução das atividades (competências e habilidades do Currículo Mínimo 2012) e as produções orais e escritas da turma possibilitará a percepção sobre quais aspectos deverão ser reforçados. Será observada a compreensão conceitual, a leitura e interpretação dos textos matemáticos e as atitudes na resolução dos problemas.

Durante a realização das atividades serão realizados feedbacks para que os alunos não percam o objetivo do trabalho proposto. Também será observado se o aluno fará alguma pergunta, participará das atividades e trabalhos propostos, se haverá cooperação com os colegas, se argumentará com justificativas coerentes defendendo assim sua opinião. A partir dessa observação, pode-se avaliar a capacidade de argumentação, a lógica de raciocínio, a compreensão correta dos conceitos envolvidos, a organização, a descrição do método utilizado e, ainda, os resultados obtidos.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

FACCHINI, Walter. **Matemática para a escola de hoje**: livro único. São Paulo: FTD, 2006.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2010.

ROTEIROS DE AÇÃO – Esfera – Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 14/11/2012.

EXEMPLO DE TAREFA 1 – Função Polinomial do 1º grau – Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 2º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 20/08/2012.

MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SAERJINHO 2012 – Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 16/08/2012.

CURRÍCULO MÍNIMO 2012 - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 16/08/2012.