

*Formação Continuada em Matemática*

Fundação CECIERJ consórcio CEDERJ

**Matemática 2º Ano- 4ºBimestre/2012**

**Plano de Trabalho 1**

# Sistemas Lineares

**Cursista: Karoline Weyll Ramos**

**Tutor (a): Paulo Alexandre Alves de Carvalho**

## INTRODUÇÃO

### Sistemas Lineares

Trabalhar sistemas lineares com nossos alunos da rede Estadual de ensino é um desafio e tanto. Infelizmente, nossos alunos não possuem o hábito da leitura, o que dificulta traduzir os problemas da linguagem escrita para a linguagem matemática.

Procurando sempre trazer os conteúdos matemáticos para a realidade do aluno, nos é conveniente resolver problemas do interesse do aluno ou que traga a realidade de toda uma sociedade.

Para lembrar como se resolvia os problemas de duas incógnitas utilizei exercícios corriqueiros como quantos veículos motorizados temos neste estacionamento sabendo que são carros e motos e o total de rodas é igual a 30? Ou então, quantos animais temos em uma fazenda que possui um total de 236 pés de animais? Além de utilizar alguns exercícios dos roteiros de ação.

Sabendo que nos é possível a renovação dos métodos matemáticos, propus aos alunos interessados que pesquisassem sobre o Geogebra. Poucos me deram um retorno desta pesquisa. Acreditando que em um futuro próximo nos serão fornecidos salas de informática maiores ou a diminuição de alunos nas turmas, preso por uma aula mais dinâmica e prazerosa, para os discentes e os docentes.

Por fim, a Regra de Cramer e o escalonamento foram ensinados e exercitados. Desta forma o aluno escolhe o método que melhor o atende nos respectivos problemas matemáticos.

## DESENVOLVIMENTO

### Atividade 1 – Sistemas Lineares

- Área de conhecimento: Matemática
- Duração prevista: 100 min (2h/a).
- Assunto: Sistemas de Equações Lineares.
- Objetivos: Resolver um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas algébrica e graficamente.
- 
- Pré-requisitos: Equação do 1º grau, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.
- Material necessário: caderno, lápis, borracha.
- Organização da turma: Turma disposta em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

### DESCRITORES ASSOCIADOS:

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.
- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

- **Avaliação:**

–Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo quando o aluno resolveu cada sistema linear.

Num primeiro momento, apresentei alguns sistemas prontos para serem resolvidos. Utilizando os exemplos sugeridos no Roteiro de ação 1. Pouquíssimos alunos lembraram que já haviam aprendido. Outros disseram que nunca viram. Alguns disseram não saber quais eram os métodos para resolvê-los.

Falei que estes sistemas com duas equações e duas incógnitas poderiam ser resolvidos pelos métodos de substituição, adição e comparação. Assim, eles escreveram qual método seria para cada sistema escrito.

Após, alguns chutes e sugestões, resolvi cada sistema com eles. Utilizei os métodos de adição e comparação para todos eles. Fui fazendo de acordo com a sugestão deles e depois mostrava o método mais adequado. Na primeira letra eles disseram o método da comparação. Fiz desta forma, depois mostrei que para este exercício o melhor seria o método da adição. Enfatizei que na verdade o melhor método é aquele que o aluno sabe fazer e tem mais segurança, como nos sugere o roteiro de ação 1.

No exercício 2, primeiro perguntei qual método o aluno usaria. Foi unânime o método da substituição. Completamente normal, visto que nossos alunos se espantam com muitos números. Depois expliquei como deveria ser feito peço método da adição.

Fiz uma bateria de exercícios, pedindo separadamente para eles resolverem por adição, outro por substituição e num terceiro para eles resolverem como achavam melhor.

#### EXERCÍCIOS SUGERIDOS:

1. Para cada um dos sistemas a seguir diga qual o melhor método para resolvê-lo e por que. Resolver o sistema, caso você consiga.

a)

$$\begin{cases} X - 2Y = 0 \\ X + 2Y = 12 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} X + 2Y = 5 \\ -2X + 3Y = -3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 5X - 2Y = 8 \\ 3X - 5Y = 1 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 4X - 9Y = 1 \\ -5X + 6Y = 4 \end{cases}$$

O que você faria para eliminar uma das incógnitas do sistema usando o método da adição?

## **Atividade 2: Sistemas Lineares**

- Área de conhecimento: Matemática
- Duração prevista: 100 min (2h/a).
- Assunto: Sistemas de Equações Lineares.
- Objetivos: Resolver um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas algébrica e graficamente.
- 
- Pré-requisitos: Equação do 1º grau, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.
- Material necessário: Apostila contendo o conteúdo, caderno, lápis, borracha.
- Organização da turma: Turma disposta em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

- **Avaliação:**

- Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo quando o aluno resolveu cada sistema linear.

Particularmente, essa foi a atividade que eu mais gostei e os alunos se interessaram, pois foi um exemplo do nosso dia a dia.

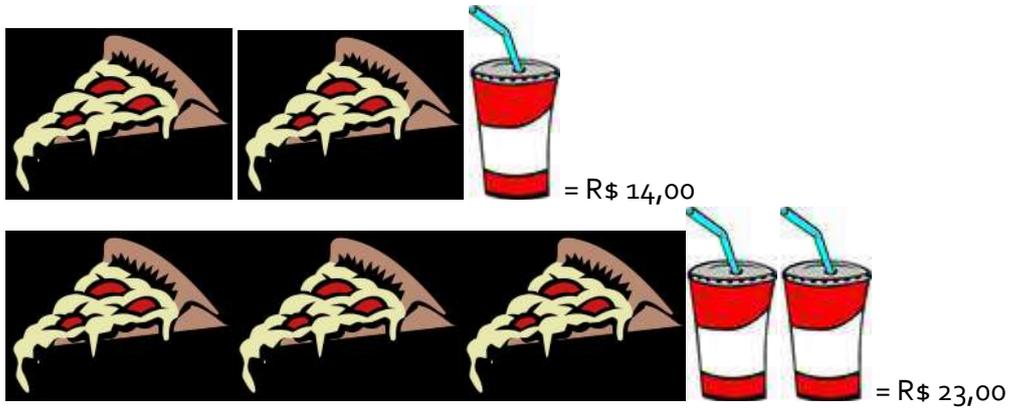
Devemos deixar claro que a interpretação deste exercício foi tranquila, fácil. Porém os exercícios sugeridos para casa não foram muito tranquilos. Nestes exercícios para casa, o aluno precisou passar a linguagem escrita para a linguagem matemática, não tendo os desenhos para auxiliarem.

A correção foi extensa, porém proveitosa. A dificuldade na interpretação foi tamanha que estou disponibilizando alguns minutos de minhas aulas para nossos alunos lerem qualquer artigo. Ler e comentar com os colegas.

A resolução no papel milimetrado foi feita em sala de aula.

1. Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo.



b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.



{ \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c) Vocês conseguem resolver o sistema?

d) Você também pode tentar visualizar as soluções para esse sistema graficamente. No mesmo eixo cartesiano trace o gráfico das duas retas que representam o sistema e encontre a solução para o problema. Use papel quadriculado ou milimetrado.

### Atividade 3: Sistemas Lineares

- Área de conhecimento: Matemática
- Duração prevista: 100 min (2h/a).
- Assunto: Sistemas de Equações Lineares.
- Objetivos: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problema para a linguagem matemática.
- 
- Pré-requisitos: Definição, construção e reconhecimento de equações e sistemas lineares.
- Material necessário: Apostila contendo conteúdo e exercícios, caderno, lápis, borracha.
- Organização da turma: Turma disposta em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
- **Avaliação:**

Reconhecer equações e sistemas de equações lineares, utilizando-os para representar, em linguagem matemática, as informações de uma situação-problema. Após a resolução dos exercícios, avaliar se os alunos assimilaram o conceito e a construção de um sistema linear inicialmente apresentado de modo informal. Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo através do desenvolvimento das atividades propostas utilizando outras situações problemas e pedindo que eles construam o sistema correspondente a situação dada.

#### Exercícios:

1) (UNIRIO 2002 – Adaptado) Três amigos foram fazer compras num shopping. Juntos gastaram R\$ 1390,00. O primeiro comprou duas calças compridas, um sapato e uma camisa social, pagando R\$ 440,00 por tudo. O segundo gastou R\$ 580,00 na compra de uma calça comprida, dois sapatos e uma camisa social. O terceiro dos três amigos comprou apenas um sapato e duas camisas sociais.

a) Quanto gastou o terceiro dos três amigos?

b) No texto acima, existem informações que relacionam as quantidades de calças, sapatos e camisas compradas pelos amigos ao preço pago. Preencha a tabela a seguir, a partir dessas informações:

Amigo	Nº de Calças	Nº de sapatos	Nº de camisas	Total a pagar
1º				
2º				
3º				

c) Considere  $x$ , o preço de cada calça,  $y$ , o preço de cada sapato e  $z$ , o preço de cada camisa. Cada uma das informações acima pode ser representada por uma sentença matemática. Quais são essas sentenças?

d) Qual é o sistema que nos permite calcular o preço de cada calça, sapato e blusa?

e) O sistema obtido tem quantas equações e quantas incógnitas?

f) É um sistema de equações lineares? Por quê? Quais são as incógnitas? E seus coeficientes? E os termos independentes?

**2) Faça você:** Enuncie um problema que seja modelado pelo sistema:

$$\begin{cases} x+y= 48 \\ x -3y =12 \end{cases}$$

#### Atividade 4: Regra de Cramer

- Duração prevista: 100 min (2 h/a)
- 
- Área de conhecimento: Matemática
  
- Objetivo: Resolver problemas, utilizando sistemas lineares. Apresentar a Regra de Cramer, como método de resolução de um sistema linear.
  
- Pré-requisitos:- Definição, construção e reconhecimento de equações e sistemas lineares, determinante, cálculo do determinante, regra de Sarrus.
- 
- Material necessário: Apostila com resumo dos conceitos necessários, folha com os exercícios a serem resolvidos, lápis, borracha.
  
- Organização da turma: Turma disposta em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
  
- **Avaliação:** Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo através do desenvolvimento do jogo e utilizando outros exercícios de fixação. Após a resolução dos exercícios, avaliar se os alunos assimilaram o método de resolução de um sistema linear inicialmente apresentado de modo informal.

Exercícios:

Resolvendo o sistema linear pela Regra de Cramer:

Considere o sistema a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ 3x + y - z = 4 \end{array} \right.$$

Chamaremos de  $D$ , o determinante da matriz incompleta do sistema e de  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_z$  os determinantes das matrizes geradas, quando trocamos uma das colunas da matriz incompleta pelos termos independentes do sistema. No caso de  $D_x$ , trocamos a coluna dos coeficientes de  $x$ , de  $D_y$ , a coluna dos coeficientes de  $y$  e de  $D_z$ , a coluna dos coeficientes de  $z$ .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 12$$

$$D_X = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 24$$

$$D_Y = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 11 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 36$$

$$D_Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 60$$

$$X = \frac{D_X}{D} = \frac{24}{12} = 2$$

$$Y = \frac{D_Y}{D} = \frac{36}{12} = 3$$

$$Z = \frac{D_Z}{D} = \frac{60}{12} = 5$$

Logo, a solução é (2, 3, 5).

Exercícios propostos:

1) (UFPE) Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: “Minha idade quando somada à idade de Júnior é igual a 47 anos; quando somada à idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Júnior somam 39 anos. Qual é a idade de Júnior?

- (a) 2 anos      (b) 3 anos      (c) 4 anos      (d) 5 anos      (e) 10 anos

2) (VUNESP - SP) Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C tendo de cada uma um pequeno estoque não nulo. Se vender cada unidade de A por R\$ 2,00, cada uma de B por R\$ 3,00 e cada uma de C por R\$ 4,00, obtém uma receita de R\$ 50,00. Mas, se o vender cada unidade respectivamente por R\$ 2,00 ; R\$ 6,00 e R\$ 3,00, a receita será de R\$ 60,00. Calcule o número de unidades que possui de cada uma das mercadorias.

Resposta:  $A = 15$ ;  $B = 4$  e  $C = 2$

## **Atividade 5: Escalonamento**

- Duração prevista: 100 min (2 h/a)
- Área de conhecimento: Matemática
- Objetivos: H 78 - Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.  
Resolver problemas, utilizando sistemas lineares.  
Apresentar o método da adição e do escalonamento como diferentes métodos de resolução de um sistema linear.
- Pré-requisitos: Definição, construção e reconhecimento de equações e sistemas lineares, as quatro operações elementares, o método da adição e escalonamento.
- Material necessário: Apostila com resumo dos conceitos, folha com os exercícios a serem resolvidos, lápis, borracha.
- Organização da turma: Turma disposta em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

- **Avaliação:**

Após a resolução dos exercícios, avaliar se os alunos assimilaram o método de resolução de um sistema linear inicialmente apresentado de modo informal. Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo através do desenvolvimento das atividades propostas utilizando outros exercícios. Propor aos alunos um debate sobre os métodos de resolução aprendidos.

## **Exercícios:**

### **COLHEITA BOA, MEDÍOCRE E RUIM**

#### **Objetivo**

Identificar um sistema linear  $3 \times 3$  que expressa um problema e resolvê-lo por escalonamento.

#### **Descrição da atividade**

A partir de um problema folclórico de origem chinesa que envolve a colheita de fardos, os alunos irão montar o sistema de equações lineares correspondente. Em seguida, serão guiados passo a passo na resolução do sistema obtido, utilizando o método de escalonamento.

## SITUAÇÃO PROBLEMA

Uma das peças mais antigas e mais influentes da literatura matemática da China antiga é a *CHIU&CHANG SUAN SHU* ou *DOS NOVE CAPÍTULOS DA ARTEMATEMÁTICA*. Este tratado, datado de 180 a. C., está escrito em tiras de bambu e é uma compilação de séculos de conhecimento matemático, transmitido através das gerações. No seu capítulo VIII, são apresentados 18 problemas relacionados com conceitos que hoje fazem parte do ramo da Matemática, denominado Álgebra Linear. Um destes problemas está enunciado a seguir:

**“Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre e um fardo de uma colheita ruim, foram vendidos por 39 dou. Dois fardos da boa, três da medíocre e um da ruim, foram vendidos a 34 dou; e um da boa, dois da medíocre e três da ruim foram vendidos a 26 dou. Qual o preço recebido por cada fardo, associado à boa colheita, à colheita medíocre e à colheita ruim?”**

Na época, os chineses representaram as informações numéricas, dispondo pedaços de bambus em um quadro de madeira com linhas e colunas. A solução do problema era obtida, manipulando as linhas do quadro.

1. Como faziam os chineses, vamos colocar, numa tabela, as informações do enunciado de nosso problema.

Quantidade de fardos da Boa Colheita	Quantidade de fardos da Colheita Medíocre	Quantidade de fardos da Colheita Ruim	Preço da venda em “dou”
3			
		1	
			26

2. Representemos por  $x$  o preço de um fardo de boa colheita; por  $y$  o preço de um fardo de colheita medíocre e por  $z$  o preço de um fardo de colheita ruim. Representemos cada linha da tabela por meio de sua correspondente equação.

3. Qual o sistema obtido ?

4. A resposta ao nosso problema dependerá de encontrarmos a solução do sistema obtido. Vamos resolvê-lo passo a passo, por escalonamento, obtendo sucessivos sistemas equivalentes:

**a.** Troque a 1ª linha com a 3ª;

**b.** Substitua a 2ª equação por outra obtida, após a operação:  $(-2) \times 1^\text{ª} \text{ equação} + 2^\text{ª} \text{ equação}$ ;

**c.** Considere, agora, o sistema resultante no item (b) e substitua a 3ª equação por outra obtida após a operação:  $(-3) \times 1^\text{ª} \text{ equação} + 3^\text{ª} \text{ equação}$ ;

**d.** Desta vez, no sistema final do item (c), substitua a 3ª equação por outra, obtida após a operação:  $(-4) \times 2^\text{ª} \text{ equação} + 3^\text{ª} \text{ equação}$ ;

**e.** O último sistema obtido é equivalente ao nosso sistema inicial, ou seja, ambos possuem a mesma solução. Como você calcula, a partir de agora, o valor de alguma das incógnitas?

**f.** Com este resultado, é possível encontrar o valor das outras incógnitas. Após encontrá-las, será possível indicar a solução do sistema original e a resposta do nosso problema chinês.

## **Atividade 6: Adote um Método**

- Duração prevista: 100 min (2h/a).
- Área de conhecimento: Matemática.
- Objetivo: Resolver problemas, utilizando os diferentes métodos de resolução de um sistema linear.  
Propor a comparação entre os diferentes métodos de resolução de um sistema linear, possibilitando a melhor escolha de acordo com a situação proposta.
- Pré-requisitos:- Definição, construção e reconhecimento de equações e sistemas lineares, as quatro operações elementares, os diferentes métodos de resolução de um sistema linear.
- 
- Material necessário: Apostila com resumo dos conceitos necessários, folha com os exercícios a serem resolvidos, lápis, borracha.
- Organização da turma: Turma disposta em trio, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
- **Avaliação:**
  - Após a resolução dos exercícios, avaliar se os alunos assimilaram os diferentes métodos de resolução de um sistema linear.
  - Verificar se a proposta possibilitou o entendimento dos diferentes caminhos para a resolução de um mesmo problema e permitiu que, a partir desta análise, ele possa “adotar” para si aquele método que considerar mais conveniente para cada situação ou até mesmo aquele que o deixa mais à vontade na resolução.
  - Verificar se houve aprendizagem significativa do conteúdo através do desenvolvimento das atividades propostas utilizando outros exercícios.
  - Propor aos alunos um debate sobre os métodos de resolução aprendidos.

### **1ª Atividade:** O Português da Matemática

**Objetivo:** Apresentar situações-problema e traduzi-las para a linguagem matemática.

#### **Situação problema :**

Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R\$ 4 300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R\$ 50,00 e cada calça de tamanho médio custou R\$ 60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

Antes de partir para a resolução do problema, observe a tabela abaixo. Note que a primeira coluna da tabela apresenta trechos do texto acima. Discuta com o seu grupo e complete a segunda coluna com equações que podem representar cada trecho através da linguagem matemática.

Trechos do texto	Equações
“Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio,..”	
“... gastando R\$ 4300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R\$ 50,00 e cada calça de tamanho médio custou R\$ 60,00.”	
Qual a “ferramenta matemática” que vai permitir que você descubra “Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?”	

- 1) Escreva o sistema que representa a situação acima:
- 2) Agora, depois de analisar esse sistema, veja com o seu grupo qual é o número de equações e de incógnitas e resolva-o, utilizando os métodos que você estudou?
- 3) E aí? Qual o seu método preferido? Justifique a sua resposta.

### **2ª Atividade: Tirando a sorte (torneio matemático)**

**Objetivo:** Sortear o método de resolução de sistema que será utilizado por cada equipe.

#### **Orientações ao professor:**

O professor dividirá a turma em duas equipes (por exemplo, A e B e escolherá aleatoriamente um representante de cada uma delas, para retirar a sua carta da sorte. Esta carta conterá o método de resolução que a equipe vai utilizar, para resolver um problema dado. A equipe terá de se organizar estrategicamente para resolvê-lo com o menor número de interações que conseguirem.

**Descrição da atividade:**

Leia atentamente o problema proposto com os demais colegas de equipe.

Criem uma estratégia para resolvê-lo, utilizando o método sorteado com o menor número de interações que conseguirem.

**Situação problema:**

**(Unicamp – SP)** - Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-Pará. Sabe-se que o quilo do amendoim custa R\$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R\$ 20,00 e o quilo da castanha-do-Pará, R\$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser R\$ 5,75. Além disso, a soma das quantidades de amendoim e de castanha-do-Pará deve ser igual ao triplo da quantidade de castanha de caju em cada lata.

Encontre o sistema linear que descreve a situação acima e resolva-o, utilizando o método sorteado.

**Atividade - Quem venceu o Torneio?**

**Objetivo:** Avaliar o “custo” de cada método de resolução utilizado.

**Descrição da atividade**

Admitindo que interações sejam quaisquer operações efetuadas para obter a solução do problema, apresente o número de interações realizadas no método que vocês utilizaram. Vamos calcular o “custo” de cada método pelo número de interações que foram utilizadas.

Depois, discuta com os seus colegas de equipe a respeito das operações que foram necessárias para obter o valor de cada incógnita do sistema, verifique se nenhuma operação foi feita desnecessariamente e responda:

- I. Qual foi o método utilizado pelo seu grupo?
- II. Quantas interações seu grupo realizou para resolver o sistema?
- III. E com quantas interações o grupo adversário (ou equipe adversária) conseguiu resolver o problema?
- IV. Então, quem venceu o Torneio Matemático?
- V. Independente da resposta anterior, qual dos métodos aprendidos vocês elegem como mais prático?

## **AVALIAÇÃO**

Acredito ser necessário uma avaliação constante e diária. Por isso, avalio cada trabalho feito em sala dando visto e pontuando pela participação. Assim, meus alunos, por mais dificuldades que tenham, tentam fazer os exercícios e se interessam pelas atividades.

Normalmente aplico um trabalho em dupla, onde tenho como objetivo fazê-los tirar suas dúvidas entre si. E ainda aplico uma prova, não dispensando uma avaliação individual, valendo, quantitativamente, mais que as outras.

## Referências Bibliográficas:

Oswaldo DOLCE e José Nicolau POMPEO, FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR, Volume 4 – Sequências, matrizes, determinantes e sistemas, São Paulo: Atual, 1993.

Luiz ROBERTO DANTE, MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES, 2º Ano, São Paulo: Ática, 2011.

BARROSO, Juliane Matsubar, Conexões com a Matemática, 2º Ano, São Paulo: Moderna, 2010.

ROTEIROS DE AÇÃO – Sistemas Lineares–  
Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ  
referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre –  
disponível em <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava>.

Projeto Reforço Escolar oferecido por CECIERJ  
referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre –  
disponível em <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava>.