

Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 2º ano – 4º bimestre/2012
Plano de Trabalho 1

SISTEMAS LINEARES

Cursista: Milena Clemente Villar
Tutor: Catharina Kapps

SUMÁRIO

Introdução	3
Desenvolvimento	4
Avaliação	20
Referências Bibliográficas	21

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar a definição, representação, resolução e o emprego dos sistemas lineares na resolução de situações do dia a dia. A construção do conhecimento se dará através da resolução de situações-problemas relacionadas com o cotidiano dos alunos.

Outro objetivo é avaliar as habilidades e competências adquiridas pelos alunos no estudo de sistemas lineares, conforme currículo mínimo da disciplina:

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.
- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Para atingir os objetivos o cronograma previsto será de dois tempos de 50 minutos para o tema identificação de um sistema, dois tempos de 50 minutos para resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e mais dois tempos de 50 minutos para resolução do Roteiro de Ação 1.

DESENVOLVIMENTO

Aula 1

Habilidade Relacionada: H78 – Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.

Objetivos Específicos:

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para linguagem matemática.

Conteúdo:

- Identificar uma equação, a partir de uma situação-problema.
- Relacionar um problema em linguagem corrente com sua formalização num sistema linear de equações.
- Métodos para resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos utilizados:

- Computador e data-show para apresentação das dinâmicas e questões do Saerjinho.
- Livro Didático para acompanhar a demonstração de exemplos.
- Quadro branco e caneta para demonstração e resolução de exercícios.

Organização da turma: Individual atividade 1 e duplas no restante da aula.

Metodologia:

- **Atividade 1 – Aula expositiva e dialogada (20 minutos)**

Apresentação do texto com a situação motivadora e transformação da linguagem corrente para linguagem matemática.

Situação: Uma padaria apresenta duas sugestões de lanches: três sucos e dois sanduíches custam R\$ 14,00; dois sucos e um sanduíche custam R\$ 8,00. Quanto custa cada suco e cada sanduíche?

1ª etapa - Escolher as incógnitas:

Suco – x
Sanduíche – y

2ª etapa - Relacionar incógnitas com a primeira sugestão de lanche:

$$3.x + 2.y = 14,00 \quad \text{Equação 1: } 3x + 2y = 14$$

3ª etapa – Relacionar incógnitas com a segunda sugestão de lanche:

$$2.x + y = 8,00 \quad \text{Equação 2: } 2x + y = 8$$

4ª etapa – Identificar alguns possíveis resultados para equação 2:

$$(2x + y = 8)$$

Suco (x) – R\$1,00 Sanduíche (x) – R\$ 6,00

$$2.1 + 6 = 8$$

Suco (x) – R\$ 2,00 Sanduíche (x) – R\$ 4,00

$$2.2 + 4 = 8$$

Suco (x) – R\$ 3,00 Sanduíche (x) – R\$ 2,00

$$2.3 + 2 = 8$$

5ª etapa – Verificar os possíveis resultados da equação 2 na equação 1:

$$(3x + 2y = 14)$$

Suco (x) – R\$1,00 Sanduíche (x) – R\$ 5,00

$$3.1 + 2.5 = 13$$

Suco (x) – R\$ 2,00 Sanduíche (x) – R\$ 4,00

$$3.2 + 2.4 = 14$$

Suco (x) – R\$ 3,00 Sanduíche (x) – R\$ 2,00

$$3.3 + 2.2 = 10$$

6ª etapa: Mostrar que apenas 1 entre os resultados atende às duas equações ao mesmo tempo:

Suco (x) – R\$ 2,00 Sanduíche (x) – R\$ 4,00

$$3.2 + 2.4 = 14$$

$$2.2 + 4 = 8$$

Solução: $x = 2$ e $y = 4$

7ª etapa: Explicar a definição de sistemas lineares:

Chama-se sistema linear o conjunto de duas ou mais equações com duas ou mais incógnitas.

Para o exemplo apresentado o sistema é:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

- **Atividade 2 – Demonstração de 2º exemplo (10 minutos)**

Com a utilização do livro didático, realizaremos outro exemplo.

- **Atividade 3 – Dinâmica: “Qual é o problema? – parte 1” (30 minutos)**

Serão apresentados vários problemas que podem ser descritos formalmente por sistemas lineares. A turma será dividida em duplas, que deverão analisar e decidir qual é o sistema, dentre os disponíveis, que descreve em linguagem matemática a situação do problema.

Após relacionarem o problema com o sistema que o representa, as duplas deverão preencher uma tabela informando as grandezas que as incógnitas x e y do sistema representam.

As duplas terão 20 minutos para realizar a atividade e os 10 minutos restantes serão para correção.

1ª etapa: Relacionar situação-problema com sistema que a representa.

Situações-Problemas

Problema 1: Sabe-se que Ana tem o dobro da idade de Pedro. Juntos eles possuem 18 anos. Quantos anos Ana tem hoje? E Pedro?

Problema 2: Caco e seu cão Bidu subiram juntos numa balança que registrou 100 kg. Sabe-se que Bidu tem a terça parte do peso de Caco. Qual o peso de cada um deles?

Problema 3: A diferença entre o número de sapato de Antônio e o de sua filha Clarinha é igual ao número que Clarinha calça. Sabe-se também que a soma desses números é igual a 66. Qual o número do sapato de Antônio e de Clarinha?

Problema 4: Felipe tem R\$ 170,00 distribuídos em notas de R\$ 10,00 e R\$ 50,00. Se ao todo são 5 notas, quantas notas de cada valor Felipe possui?

Problema 5: Em um estacionamento há motos e carros, num total de 79 veículos e 248 rodas. Qual é o número de carros e de motos neste estacionamento?

Problema 6: O convite de uma festa custava R\$ 20,00 para homens e R\$ 10,00 para mulheres. Sabendo que o número de mulheres que foram à festa excedeu em 15 o número de homens e que, ao todo, foram arrecadados R\$ 960,00, quantos homens e quantas mulheres formam à festa?

Sistemas Lineares:

Sistema 1:
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 66 \end{cases}$$

Sistema 2:
$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 10x + 20y = 960 \end{cases}$$

Sistema 3:
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ \end{cases}$$

$$x + y = 18$$

Sistema 4: $\begin{cases} x + y = 79 \\ 2x + 4y = 248 \end{cases}$

Sistema 5: $\begin{cases} x + y = 100 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

Sistema 6: $\begin{cases} 10x + 50y = 170 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2ª etapa: Preenchimento da tabela

PROBLEMA	SISTEMA LINEAR	GRANDEZA QUE x REPRESENTA	GRANDEZA QUE y REPRESENTA
Problema 1			
Problema 2			
Problema 3			
Problema 4			
Problema 5			
Problema 6			

• **Atividade 4 – Dinâmica: “Qual é o problema? – parte 2” (30 minutos)**

Semelhante à dinâmica anterior, serão apresentados vários problemas que podem ser descritos formalmente por sistemas lineares. A turma continuará dividida em duplas, que, agora, deverão analisar e construir o sistema que descreve em linguagem matemática a situação do problema.

As duplas terão 20 minutos para realizar a atividade e os 10 minutos restantes serão para correção.

Situações-Problemas

Problema 1: Edu e Bia têm juntos 52 figurinhas. A diferença entre o número de figurinhas dos dois é 12. Quantas figurinhas possui cada um deles?

Problema 2: A soma de dois números é 34 e a diferença entre eles é 2. Quais são esses dois números?

Problema 3: Numa papelaria, o preço de um caderno é R\$ 5,00 e de uma caneta, R\$ 3,00. Gastei R\$ 22,00 comprando cadernos e canetas, num total de 6 objetos. Quantos cadernos e quantas canetas eu comprei?

Problema 4: No sítio da tia Léia há galinhas e coelhos. São 17 animais e 48 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem no sítio?

Problema 5: Um sorvete custa x reais e um doce custa y reais. A diferença entre o preço do sorvete e o preço do doce é de R\$ 4,00. Aninha tomou um sorvete e comprou dois doces, gastando R\$ 13,00. Quanto custa cada sorvete e cada doce?

• **Atividade 4 – Resolução de exercício Saerjinho (10 minutos)**

Fazer apresentação, no data-show, de questão do Saerjinho de 2011 para resolução.

Questão (ACRESCENTADA): Gabriela e Eduardo têm juntos 106 anos. Sabendo que Eduardo tem o dobro da idade de Gabriela menos 20 anos.

Qual o sistema que indica a situação descrita acima?

a.
$$\begin{cases} x + y = 106 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = 106 \\ x + y = -20 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y = 106 \\ 2x - y = -20 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y = 106 \\ x - 2y = -20 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x + y = 106 \\ 2x - 2y = -20 \end{cases}$$

Opção Correta: **Letra D**

Questão: (Saerjinho – 3ª série do Ensino Médio – 3º bimestre – 2011)

Alberto, Bernardo e Caio possuem juntos 90 figurinhas. Alberto é o que possui mais figurinhas, ele tem o dobro do total de figurinhas de Bernardo e Caio juntos. Caio é o que tem menos figurinhas, ele tem um quarto da diferença entre o número de figurinhas de Alberto e Bernardo.

Um sistema linear que permite calcular o número de figurinhas de Alberto, Bernardo e Caio é:

a.
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - c = 0 \\ a - 4b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - 2c = 0 \\ a - b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} a + b + c = 90 \\ a + 2b + 2c = 90 \\ a + b + 4c = 90 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - 2c = 90 \\ a - b - 4c = 90 \end{cases}$$

Opção Correta: **Letra C**

AValiação da Aprendizagem: Baseada na participação dos alunos e na resolução dos exercícios.

Habilidade Relacionada: H114 – Resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas.

Objetivos Específicos:

- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Conteúdo:

Apresentar os três métodos de resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas:

- Substituição.
- Comparação.
- Adição.

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos utilizados:

- Computador e data-show para apresentação de questão do Saerjinho.
- Quadro branco e caneta para demonstração e resolução de exercícios.

Organização da turma: Individual.

Metodologia:

- **Atividade 1 – Aula expositiva e dialogada (50 minutos)**

Apresentar a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas através de exemplos já vistos pelos alunos em aula anterior.

Problema 1: Sabe-se que Ana tem o dobro da idade de Pedro. Juntos eles possuem 18 anos. Quantos anos Ana tem hoje? E Pedro?

Ana – x
Pedro – y

Sistema: $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 18 \end{cases}$

Método da Substituição

Resolução: $\begin{cases} x = 2y & \textcircled{1} \\ x + y = 18 & \textcircled{2} \end{cases}$

Substituindo $\textcircled{1}$ em $\textcircled{2}$, temos:

$$\begin{aligned} 2y + y &= 18 \\ 3y &= 18 \\ y &= \frac{18}{3} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Substituindo $y = 6$ em $\textcircled{1}$, temos:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 6 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Solução = (12, 6), ou seja, Ana tem 12 anos e Pedro tem 6 anos.

Método da Comparação

Resolução: $\begin{cases} x = 2y & \textcircled{1} \\ x + y = 18 & \textcircled{2} \end{cases}$

Isolando x em 2, temos:

$$x = 18 - y \quad \textcircled{3}$$

Comparando $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$, temos:

$$2y = 18 - y$$

$$2y + y = 18$$

$$y = \frac{18}{3}$$

$$y = 6$$

Substituindo $y = 6$ em $\textcircled{1}$, temos:

$$x = 2 \cdot 6$$

$$x = 12$$

Solução = (12, 6), ou seja, Ana tem 12 anos e Pedro tem 6 anos.

Método da Adição

Resolução: $\begin{cases} x - 2y = 0 & \textcircled{1} \\ x + y = 18 & \textcircled{2} \end{cases}$

Multiplicando $\textcircled{2}$ por 2, temos: $2x + 2y = 36$ $\textcircled{3}$

Montando outro sistema com $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ \underline{2x + 2y = 36} + \\ \hline 3x + 0y = 36 \end{cases}$$

$$x = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

Substituindo $x = 12$ em $\textcircled{2}$, temos:

$$12 + y = 18$$

$$y = 18 - 12$$

$$y = 6$$

Solução = (12, 6), ou seja, Ana tem 12 anos e Pedro tem 6 anos.

Problema 2: (ACRESCENTADO) Edu e Bia têm juntos 52 figurinhas. A diferença entre o número de figurinhas dos dois é 12. Quantas figurinhas possui cada um deles?

Resolução:
$$\begin{cases} x + y = 52 & \textcircled{1} \\ x - y = 12 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Somando $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ temos:

$$\begin{array}{r} x + y = 52 \\ x - y = 12 \quad + \\ \hline 2x + 0y = 64 \\ x = \frac{64}{2} \\ x = 32 \end{array}$$

Substituindo $x = 32$ em $\textcircled{1}$, temos:

$$\begin{aligned} 32 + y &= 52 \\ y &= 52 - 32 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Solução = (32, 20), ou seja, Edu tem 32 figurinhas e Bia tem 20 figurinhas.

Problema 3: (ACRESCENTADO) Um sorvete custa x reais e um doce custa y reais. A diferença entre o preço do sorvete e o preço do doce é de R\$ 4,00. Aninha tomou um sorvete e comprou dois doces, gastando R\$ 13,00. Quanto custa cada sorvete e cada doce?

Resolução:
$$\begin{cases} x - y = 4 & \textcircled{1} \\ x + 2y = 13 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Multiplicando $\textcircled{1}$ por 2, temos: $2x - 2y = 8$ $\textcircled{3}$

Montando outro sistema com $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$, temos:

$$\begin{array}{r} 2x - 2y = 8 \\ x + 2y = 13 \quad + \\ \hline 3x + 0y = 21 \\ x = \frac{21}{3} \\ x = 7 \end{array}$$

Substituindo $x = 7$ em $\textcircled{2}$, temos:

$$\begin{aligned} 7 + 2y &= 13 \\ 2y &= 13 - 7 \\ y &= \frac{6}{2} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Solução = (7, 3), ou seja, o sorvete custa R\$ 7,00 e o doce R\$ 3,00.

- **Atividade 2 – Resolução de exercícios (40 minutos)**

Os alunos serão convidados a realizar algumas situações-problemas que passaram para linguagem matemática na aula anterior, optando pelo método que se sentirem mais confortável.

Quando necessário, realizar intervenções pedagógicas por meio de exposição oral ou mesmo com a utilização do quadro branco.

Ao final a correção dos exercícios escolhendo para cada um deles um método diferente, de forma a mostrar as várias possibilidades e que o resultado deverá ser sempre o mesmo.

- **Atividade 4 – Resolução de exercício Saerjinho (10 minutos)**

Fazer apresentação, no data-show, de questão do Saerjinho de 2011 para resolução.

Questão: (Saerjinho – 3ª série do Ensino Médio – 2º bimestre – 2011)

O conjunto solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 5y = -10 \end{cases}$, em \mathbb{R} é:

- a. $\{(3, 2)\}$
- b. $\{(11, -15)\}$
- c. $\{(-1, 4)\}$
- d. $\{(5, 1)\}$
- e. $\{(7, -10)\}$

Opção Correta: **Letra D**

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM: Baseada na participação dos alunos e na resolução dos exercícios.

Aula 3

Habilidade Relacionada: H78 – Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.

H114 – Resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas.

Objetivos Específicos: Avaliar as habilidades e competências adquiridas pelos alunos no estudo de sistemas, tais como:

- Resolver um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas algebricamente.

Conteúdo:

- Identificação e resolução de sistema lineares.

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos utilizados:

- Roteiro de Ação 1 (adaptado).
- Quadro branco e caneta para intervenções necessárias.

Organização da turma: Duplas.

Metodologia:

• Atividade 1 – Roteiro de Ação 1 (100 minutos).

Apresentar o Roteiro de Ação 1 sugerido no curso, com algumas adaptações (exclusão item d da atividade 5, pois não teremos visto o pré-requisito necessário), para realização pelos alunos.

Os alunos organizados em duplas terão 100 minutos para realizarem a tarefa.

- 1) Para cada um dos sistemas a seguir diga qual o melhor método para resolvê-lo e por que (não é necessário resolver o sistema).

$$a) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

- 2) Considere o seguinte sistema linear $\begin{cases} 4x - 9y = 1 \\ -5x + 6y = 4 \end{cases}$

O que você faria para eliminar uma das incógnitas do sistema usando o método da adição?

Uma possibilidade é multiplicar a primeira equação por **2** e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em y.

Uma outra possibilidade é multiplicar a primeira equação por ____ e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em x.

Resolva o sistema das duas formas e verifique que em ambos os casos chega-se na resposta $x = -2$ e $y = -1$

- 3) William tentou resolver o sistema $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y - x = 5 \end{cases}$

Ele substituiu x por $10 - 2y$ na segunda equação e fez $y - 10 - 2y = 5$, encontrando $y = -15$. Substituindo $y = -15$ na primeira equação encontrou $x = 40$. Mas a resposta não satisfaz o sistema.

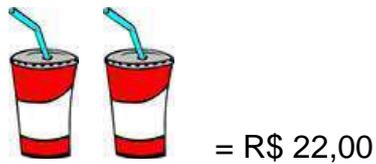
O que William fez de errado?

- 4) Usando tentativa e erro, Marcos encontrou a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2(x + y) = 6 \end{cases}$ como sendo $x = 1$ e $y = 2$.

Você concorda? Explique sua resposta.

5) Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo.



b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.



{ _____ = _____
 _____ = _____

c) Resolva o sistema.

- **Atividade 2 – Intervenção Pedagógica (conforme for solicitada)**

Caso seja necessário, realizar intervenções pedagógicas por meio de exposição oral ou mesmo com a utilização do quadro branco.

**AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM: Baseada na
resolução e correção do Roteiro de Ação 1.**

AVALIAÇÃO

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo ensino aprendizagem como um todo – tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem os resultados de seu trabalho como para o aluno verificar seu desempenho.

Ela deve ser essencialmente formativa, na medida em que cabe à avaliação subsidiar o trabalho pedagógico, redirecionando o processo ensino aprendizagem para sanar dificuldades, aperfeiçoando-o constantemente. A avaliação vista como um diagnóstico contínuo e dinâmico torna-se um instrumento fundamental para repensar e reformular os métodos, os procedimentos e as estratégias de ensino para que realmente o aluno aprenda.

Procurando seguir esta linha de pensamento a Avaliação das Aulas 1 e 2 se dará por meio da observação baseada na participação dos alunos e resolução das atividades propostas (dinâmicas, exercícios e questões do Saerjinho). Esse acompanhamento das atividades no dia a dia é muito valioso, especialmente nas aulas que dão oportunidade de participação, nas quais o aluno pergunta, emite opiniões, constrói novos conceitos e busca novas informações.

A Avaliação da Aula 3 se dará por meio da correção do Roteiro de Ação 1 realizado pelos alunos. Será atribuída uma nota. Por meio das respostas terei oportunidade de perceber os avanços ou dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo estudado, fazendo assim, uma avaliação de minhas aulas para possíveis ajustes.

Observação:

Ressalto que o conteúdo das aulas foi baseado no que já foi visto em aulas anteriores nas turmas 2007, 2008, 2009, 2010 e 2011, todas no turno da tarde do Colégio Estadual Stella Matutina. As aulas serão realizadas em todas as turmas e o resultado das avaliações será utilizado como uma das notas do 4º bimestre.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA, Volume 2/Juliane Matsubara BARROSO – 1ª edição – São Paulo: Moderna, 2010.

MATEMÁTICA DANTE, Volume único/Luiz Roberto DANTE – 1ª Edição – São Paulo: Ática, 2008.

MATEMÁTICA PAIVA, Volume 2/Manoel PAIVA – 1ª Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

ROTEIRO DE AÇÃO 1 – Sistemas Lineares – 1º campo conceitual – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 – <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/> acessado em 10/11/2012.