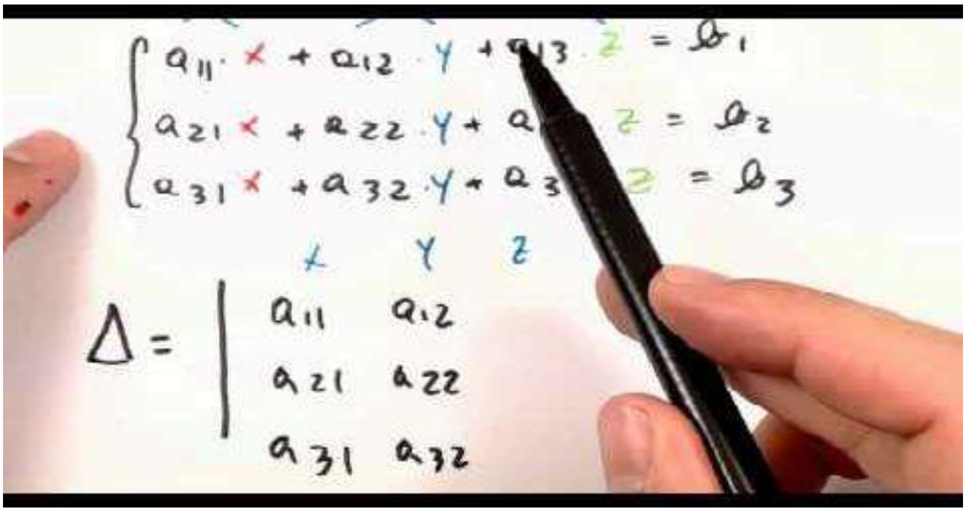
Formação continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º ano / 4º Bimestre/ 2012

PLANO DE TRABALHO

SISTEMAS LINEARES



TAREFA 3:

Cursista: *Vanessa de Souza Machado*

Matrícula: *00/0974440-0*

Tutor: Deivis de Oliveira Alves

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade do conteúdo denominado “Sistemas Lineares” para resolução de problemas bem como seus métodos de resolução. Foi elaborado visando a transmissão do conhecimento através da construção feita pelos alunos com resoluções de situações problema e generalizações.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades concernentes a interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico, além da falta de interesse. Por isso, e extremamente importante utilizar assuntos atraentes.

Para a totalização do plano, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos juntamente com a avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1 - Identificando e solucionando uma equação linear

---

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificação de equações lineares bem como a identificação de suas incógnitas, coeficientes e termos independentes. Solução de equações lineares.

- PRÉ-REQUISITOS: Resolução de equações

- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Caderno e quadro.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

- OBJETIVOS:
  - Identificar uma equação linear bem como seus elementos.
  - Verificar a solução de equações lineares.

- METODOLOGIA ADOTADA: A partir de uma situação problema conceituar equações lineares, permitindo aos alunos perceberem a noção do conceito com a situação do dia a dia e buscarem uma solução.

Para iniciar o tema apresentaria aos alunos esta situação problema:

A professora de Língua Portuguesa após ter concluído o Projeto de Literatura Brasileira com os alunos do 2º ano médio irá entregar um cartão com lembrança, sendo o cartão de dois modelos: um tipo para menino, outro para menina. Diante dessa questão a professora ficou em dúvida sobre a quantidade de cartões que teria que confeccionar, pois só sabe que no total há 40 alunos em sua classe.

Chamemos a quantidade de meninos de x e a quantidade de meninas de y. Diante disso podemos representar o número de alunos por:

$$x + y = 40$$

Essa é uma equação linear pois, equação linear é toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

em que $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ... , a_n}$ são números reais, que recebem o nome de *coeficientes* das *incógnitas* $\mathbf{x_1, x_2, x_3, ... , x_n}$, e **b** é um número real chamado *termo independente* (quando b=0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*).

Com essa equação a professora não consegue descobrir o número exato de meninos e meninas de sua classe, mas, consegue descobrir vários pares de respostas, veja alguns deles:

(20,20) – (30,10) – (10,30) – (15,25) – (1,39) – (12,28) – (35,5) – (25,15) .... e muitas outras...

Perceba que para descobrir exatamente o número de meninos e meninas que compõem sua classe a professora terá que se apropriar de mais uma informação sobre o número de alunos.

Perceba também que a resposta (30,10) e (10,30) apesar de terem os mesmos números não representam a mesma solução pois chamamos essas soluções de pares ordenados ou seja, a ordem importa, nesse caso o primeiro elemento sempre faz referência a incógnita x (meninos) e o segundo elemento faz referência a incógnita y (meninas).

Veja alguns exemplos de equações lineares:

- $3x - 2y + 4z = 7$
- $-2x + 4z = 3t - y + 4$

As equações a seguir não são lineares:

- $xy - 3z + t = 8$
- $x^2 - 4y = 3t - 4$
- $\sqrt{x} - 2y + z = 7$

Veja um exemplo de quando um conjunto é solução de uma equação linear.

Exemplo:
Dado o conjunto solução (0, 1, 2) e a equação linear -2x + y + 5z = 11, para verificar se é verdadeira essa solução deve-se substituir os valores 0, 1 e 10 nas suas respectivas incógnitas.

-2 . 0 + 1 + 5 . 2 = 11
0 + 1 + 10 = 11
11 = 11, como a igualdade é verdadeira, podemos concluir que o conjunto solução (0, 1, 10) é solução da equação -2x + y + 5z = 11

<u>Notações importantes sobre a equação linear:</u>

• Quando os coeficientes das incógnitas forem todos iguais a zero e o valor numérico da equação for diferente de zero, essa equação não terá solução.

• Quando os coeficientes das incógnitas forem todos iguais a zero e o valor numérico da equação for igual a zero, essa equação irá assumir qualquer valor real no seu conjunto solução.

AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 1:

Avaliação Informal: Solicitar que o aluno crie mais duas hipóteses para o número de meninos e meninas na classe.

Avaliação Formal: Calcule para que valor de m a quadrada ordenada (1,2,-3,5) é solução da equação $3x + 5y - mz + t = 0$

ATIVIDADE 2 – Sistema linear (solução e classificação)

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar sistemas lineares / Classificar um sistema linear / Solucionar um sistema linear pelos métodos da substituição e adição.

- PRÉ-REQUISITOS: Equações lineares

- TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Caderno e quadro.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

- OBJETIVOS:
  - Introduzir o conceito de sistemas a partir de uma situação problema;
  - Classificar sistemas a partir das respostas encontradas;
  - Recordar os métodos da adição e da substituição para resolver sistemas;
  - Identificar qual o melhor método para ser aplicado.

- METODOLOGIA ADOTADA: Dar sequência a questão inicial da aula anterior para conceituar sistemas, definindo sua classificação quanto a resposta e seus métodos de resolução, bem como demonstrando qual a melhor escolha para cada situação problema.

Dando sequência a aula passada, percebemos que somente com uma equação linear temos infinitas respostas. A professora agora obteve mais uma informação sobre sua turma, ela soube que o dobro do número de meninos menos o número de meninas é igual a 5.

Com mais essa informação a professora pode escrever duas equações lineares:

$x + y = 40$

$2x - y = 5$

Como essas duas equações falam de um mesmo problema dizemos que elas compõem um sistema. Perceba que agora só há um par de resposta que satisfaz essas duas equações. Por eliminação a professora descobriu que nessas condições o número de meninos é 15 e o de meninas é 25.

<u>Sistema Linear</u>
Um conjunto de p equações lineares com variáveis x1, x2, x3,....,xn formam um sistema linear com p equações e n incógnitas.

Exemplos:

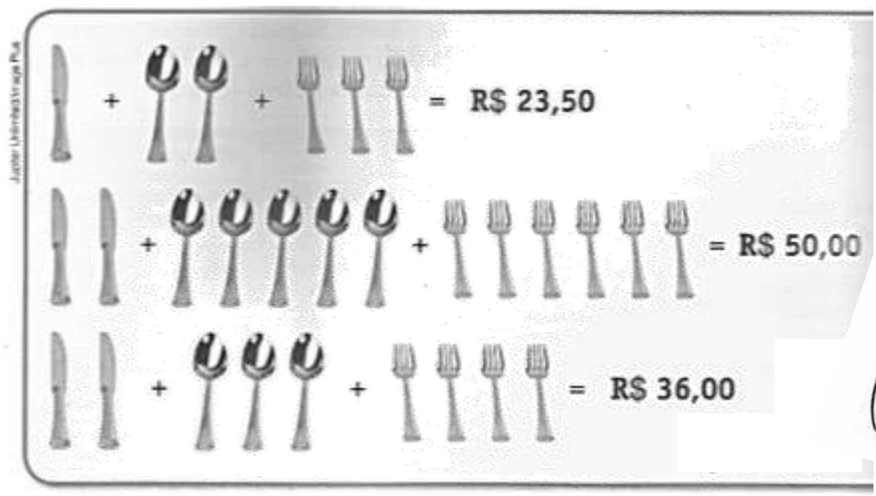
$x + y = 3$
$x - y = 1$
Sistema linear com duas equações e duas variáveis.

$2x + 5y - 6z = 24$
$x - y + 10z = 30$
Sistema linear com duas equações e três variáveis.

$x + 10y - 12z = 120$
$4x - 2y - 20z = 60$
$-x + y + 5z = 10$
Sistema linear com três equações e três variáveis.

$x - y - z + w = 10$
$2x + 3y + 5z - 2w = 21$
$4x - 2y - z + w = 16$
Sistema linear com três equações e quatro variáveis.

Temos que utilizar os sistemas como ferramenta de cálculo em muitas situações do dia a dia. Veja:



Suponha que para decidir quantos talheres irá comprar, um cliente deseje saber o preço de cada faca, de cada colher e de cada garfo. Como proceder para ter essas informações?

Podemos associar o valor de cada utensílio a uma incógnita:

- Preço de cada faca: x
- Preço de cada colher: y
- Preço de cada garfo: z

Dessa forma podemos traduzir esse problema por meio de um sistema:

$$x + 2y + 3z = 23{,}50$$
$$2x + 5y + 6z = 50{,}00$$
$$2x + 3y + 4z = 36{,}00$$

Classificação de um sistema linear
Todo sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções apresentadas por ele.
SPD – Sistema Possível e Determinado – possui apenas uma solução.
SPI – Sistema Possível e Indeterminado – possui infinitas soluções.
SI – Sistema Impossível – não possui solução.

<u>Solução de um sistema linear</u>
Dado o sistema:
$x + y = 3$
$x – y = 1$

Dizemos que a solução deste sistema é o par ordenado (2,1), pois ele satisfaz as duas equações do sistema linear. Observe:
x = 2 e y = 1

$2 + 1 = 3$ $3 = 3$
$2 – 1 = 1$ $1 = 1$

Dado o sistema:
$2x + 2y + 2z = 20$
$2x – 2y + 2z = 8$
$2x – 2y – 2z = 0$
Podemos dizer que o trio ordenado (5, 3, 2) é solução do sistema, pois ele satisfaz as três equações do sistema linear. Veja:

2 * 5 + 2 * 3 + 2 * 2 = 20   10 + 6 + 4 = 20   20 = 20
2 * 5 – 2 * 3 + 2 * 2 = 8   10 – 6 + 4 = 8   8 = 8
2 * 5 – 2 * 3 – 2 * 2 = 0   10 – 6 – 4 = 0   0 = 0

Vamos relembrar dois métodos de resolução de sistemas, o método da adição e o método da substituição.

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Além de saber armar o sistema é bom saber fazer a escolha pelo método mais rápido de resolução.

1º) MÉTODO DA ADIÇÃO

Este método consiste em deixar os coeficientes de uma incógnita opostos. Desta forma, somando-se membro a membro as duas equações recai-se em um equação com uma única incógnita.

EXEMPLO:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

1º passo: vamos multiplicar a primeira linha por -1 para podermos cortar –2x com 2x

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad . (-1) \qquad \begin{cases} -2x - y = -6 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y &= -4 \\ y &= -4/2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

2º passo: Substituir y = - 2, em qualquer um das equações acima e encontrar o valor de x.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2x + (-2) &= 6 \\ 2x - 2 &= 6 \\ 2x &= 6 + 2 \\ x &= 8/2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

3º passo: dar a solução do sistema.
S = { (4, -2) }

2º) MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Este método consiste em isolar uma incógnita numa equação e substituí-la na outra equação do sistema dado, recaindo-se numa equação do 1º grau com uma única incógnita.

EXEMPLO:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

1º passo: vamos isolar o y na primeira equação para podermos substituir na Segunda equação.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad 2x + y = 6 \quad \therefore \quad y = 6 - 2x$$

2º passo: Substituir y = 6 – 2x, na segunda equação para encontrar o valor de x.

$$2x + 3y = 2$$
$$2x + 3.(6 - 2x) = 2$$
$$2x + 18 - 6x = 2$$
$$-4x = 2 - 18$$
$$-4x = -16$$
$$-x = -16/4$$
$$-x = -4 \quad .(-1)$$
$$x = 4$$

3º passo: Substituir x = 4 em y = 6 – 2x, para encontrar o valor de y.

y = 6 – 2x
y = 6 – 2.4
y = 6 – 8
y = -2

4º passo: dar a solução do sistema.

S = { (4, -2)}

AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 2:

Avaliação Informal:

1. Para cada um dos sistemas a seguir diga qual o melhor método para resolvê-lo e por que (não é necessário resolver o sistema).

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

Avaliação Formal:

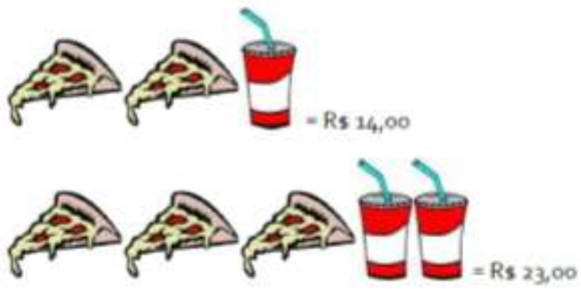
2. Considere o seguinte sistema linear $\begin{cases} 4x - 9y = 1 \\ -5x + 6y = 4 \end{cases}$

O que você faria para eliminar uma das incógnitas do sistema usando o método da adição?

3. William tentou resolver o sistema $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y - x = 5 \end{cases}$. Ele substituiu x por 10 – 2y na segunda equação e fez $y - 10 - 2y = 5$, encontrando y = -15. Substituindo y = – 15 na primeira equação encontrou x = 40. Mas a resposta não satisfaz o sistema.
O que William fez de errado?

) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.

______________ = ___
______________ = ___



ATIVIDADE 3 – Sistemas escalonados

- HABILIDADE RELACIONADA: Escalonar sistemas

- PRÉ-REQUISITOS: Equações lineares, sistemas lineares, classificação de sistemas lineares.

- TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, caderno e exemplos adicionais e vídeo do youtube: http://www.youtube.com/watch?v=BlRSB0pxzBo (Sistemas Lineares - Método de Escalonamento - NovaEscola-MS)

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

- OBJETIVOS:

 - Compreender quando se faz necessário a utilização da técnica do escalonamento para resolução de sistemas.

 - Compreender o método de escalonamento para aplicação nos exercícios.

- METODOLOGIA ADOTADA: A partir da aula teórica e exemplificações será demonstrado quando se faz necessário a técnica do escalonamento. Para finalizar segue um vídeo para fixar o processo novo aprendido.

Escalonamento

Sistemas equivalentes

Dois sistemas só são equivalentes quando admitem o mesmo conjunto-solução.

Para realizar a transformação de um sistema em outro sistema equivalente e mais simples, podemos:

- fazer a permutação de duas equações.

- fazer a multiplicação de qualquer uma das equações por um número real e diferente de zero.

- fazer a multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero e adicioná-la à outra equação.

Sistema Escalonado

Veja abaixo um exemplo de sistema escalonado:

$$\begin{cases} a_{11} . x_1 + a_{12} . x_2 + a_{13} . x_3 + \ldots + a_{1n} . x_n = b_1 \\ a_{22} . x_2 + a_{23} . x_3 + \ldots + a_{2n} . x_n = b_2 \\ a_{33} . x_3 + \ldots + a_{3n} . x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn} . x_n = b_n \end{cases}$$

- Um sistema escalonado pode ser solucionado por meio de substituição, partindo da última equação.

- Para transformar um sistema em outro escalonado e equivalente ao primeiro basta utilizar as propriedades do item anterior.

Escalonar sistemas consiste em um método para classificar, resolver e discutir sistemas lineares de qualquer ordem. Contudo, é necessário primeiro compreender o sistema escalonado. Exemplificando um sistema 4x4, discutiremos e compreenderemos tal sistema.

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1 \\ 0x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 + a_7x_4 = k_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + a_8x_3 + a_9x_4 = k_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + a_{10}x_4 \end{cases} \quad \textit{Ou ainda,}$$

$$\textit{Sistema sem os coeficientes nulos.} \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1 \\ a_5x_2 + a_6x_3 + a_7x_4 = k_2 \\ a_8x_3 + a_9x_4 = k_3 \\ a_{10}x_4 = k_4 \end{cases}$$

Veja que um sistema escalonado é aquele no qual, a cada equação, uma nova incógnita possui coeficiente nulo, anulando assim uma quantidade considerável de incógnitas no sistema. Obtendo um sistema escalonado desta forma, obtêm-se as soluções de maneira fácil. Veja no nosso exemplo genérico de um sistema 4x4 que a última linha nos fornece o valor da incógnita x4. Substituindo esse valor na terceira equação, obtém-se o valor da incógnita x3 e assim sucessivamente.

Exemplo:

1. $\begin{cases} x - 3y \ + 2z = 5 \\ \quad\ 2y \ + \ z \ = 4 \\ \qquad\qquad 2z = 4 \end{cases}$

Note que este é um sistema escalonado. Vejamos a solução deste sistema.

Da terceira equação temos que z = 2. Substituindo esse valor na segunda equação, teremos:

$2y + 2 = 4 \ \rightarrow y = 1$

Agora que temos os valores de z e y, substituiremos tais valores na primeira equação.

$x - 3.\mathbf{1} + 2.\mathbf{2} = 5 \rightarrow x = 4$

Com isso, temos que este sistema é SPD (Sistema Possível Determinado), cuja solução é: (4, 1, 2).

2. $\begin{cases} x + y = 15 \\ \quad\ y = 10 \end{cases}$ *Sistema 2x2 escalonado.*

Na segunda equação, tem-se o valor de y, portanto, basta substituí-lo na primeira equação.

$x + 10 = 15 \rightarrow x = 5$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + \ z \ = 10 \\ \qquad 2y + \ 2z = 12 \end{cases}$

Note que neste sistema, o número de equações é inferior ao número de incógnitas. Neste exemplo, temos três incógnitas e apenas duas equações. Em casos como este, podemos escrever a terceira linha, como uma equação nula. Ficando da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x + 3y + \ z \ = 10 \\ \qquad 2y + \ 2z = 12 \\ \qquad\qquad 0z = 0 \end{cases}$$

Bem, sabemos que nem todos os sistemas lineares serão escritos, previamente, de forma escalonada. Portanto, precisamos encontrar uma forma de obter um sistema equivalente, que seja um sistema escalonado.

Vale ressaltar que dois sistemas são ditos equivalentes quando estes possuem o mesmo conjunto solução.

O processo de escalonamento de um sistema linear ocorre por meio de operações elementares, que são iguais às utilizadas no teorema de Jacobi.

Portanto, para escalonarmos um sistema, podemos seguir um roteiro com alguns procedimentos. Utilizaremos um sistema linear para explicitarmos tais passos.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ x + y + 2z = 10 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

• As equações podem ser trocadas de posição e ainda assim teremos um sistema equivalente.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Para facilitar o procedimento, aconselhamos que a primeira equação seja aquela sem coeficientes nulos e que o coeficiente da primeira incógnita seja, de preferência, igual a 1 ou –1. Esta escolha facilitará os passos seguintes.

• Podemos multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero:

$$x + y + 2z = 10\ (\times 2) \rightarrow \quad 2x + 2y + 4z = 20$$

Este é um passo que pode ser utilizado dependendo do sistema a ser trabalhado, pois ao realizar este procedimento você estará escrevendo a mesma equação, entretanto com coeficientes diferentes.

Na verdade este é um passo complementar ao próximo.

• Multiplique todos os membros de uma equação por um mesmo número real, que seja diferente de zero, e some esta equação obtida à outra equação do sistema.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \quad \times(\mathbf{-2})\ (multiplicando\ a\ equação\ por\ -2) \\ 2x + 3y + 3z = 5 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -2x - 2y - 4z = -20\ + \\ \underline{2x + 3y + 3z = 5} \\ 0x + y - z = -15 \quad (esta\ é\ a\ nova\ equação\ do\ sistema) \end{array}$$

Com isso, substituiremos esta equação obtida no lugar da segunda equação. Note que esta equação já não possui uma das incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y - z = -15 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Repita este processo para as equações que possuem mesma quantidade de incógnitas, no nosso exemplo seriam as equações 2 e 3.

Note que a 1ª equação continuou normal, mesmo após ter sido multiplicada por -2. Esta multiplicação é feita para obtermos coeficientes opostos (sinais trocados) para que quando a soma seja realizada o coeficiente se anule e o escalonamento seja feito. Não existe a necessidade de escrever a primeira equação de maneira diferente, mesmo se você multiplicá-la.

• Uma possibilidade que existe neste processo é a obtenção de uma equação com todos os coeficientes nulos, entretanto com o termo independente diferente de zero. Caso isso aconteça, podemos afirmar que o sistema é impossível, ou seja, não existe solução que o satisfaça.

Exemplo: 0x + 0y = 1

Vejamos um exemplo de sistema a ser escalonado.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

Note que a incógnita faltando na ultima equação é a y, ou seja, a partir das duas primeiras devemos obter uma equação que tenha apenas as incógnitas x e z, em outras palavras, devemos escalonar a incógnita y.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & \times(-3) \\ 2x + 3y - z = 0 & \times(2) \\ \quad x - 14z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -3x - 6y - 12z = 0 \\ \underline{4x + 6y - 2z = 0} \\ \qquad x - 14z = 0 \ \ (substitua\ na\ segunda\ equação) \end{array}$$

Sendo assim, teremos um sistema equivalente.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ \boldsymbol{x - 14z = 0} \\ \boldsymbol{-x + 16z = 4} \end{cases}$$

Ao somar a segunda e a terceira equação, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ \boldsymbol{2z = 4} \end{cases}$$

Com isso, obtemos um sistema escalonado.

$$Classificação\ de\ sistemas \begin{cases} Possível \begin{cases} Determinado\ (SPD) \\ Indeterminado\ (SPI) \end{cases} \\ Impossível\ (SI) \end{cases}$$

Possíveis classificações de um sistema

Para classificarmos um sistema linear que esteja escalonado, temos apenas que analisar a última linha do sistema, caso o sistema esteja completamente escalonado. Caso a quantidade de linhas não corresponda à quantidade de incógnitas, ou seja, caso existam incógnitas que não serão escalonadas, denominaremos estes sistemas “sistemas incompletos” e completaremos as demais linhas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_n = 0}$$

Sistemas incompletos são resolvidos de uma maneira diferenciada e sua classificação é dada como um sistema possível indeterminado. Fato este que pode ser compreendido pelo cálculo do determinante da matriz dos coeficientes, pois o determinante de uma matriz cuja linha (ou coluna) seja toda igual a zero, resulta em um determinante igual a zero. Vale lembrar que a classificação de um sistema linear pelo determinante é: “caso o determinante seja zero denominamos este sistema como SPI”.

Quando possuímos um escalonamento completo, podemos analisar o sistema de três formas diferentes, todas elas dependendo da última linha. Dessa forma, quando temos na última linha:

• Uma equação do 1º grau com uma incógnita. (Ex.: 3x=3; 2y=4;…): o sistema será SPD (sistema possível determinado);

• Uma igualdade verdadeira sem incógnitas. (Ex.: 0 = 0; 2 = 2; 4 = 4): o sistema será SPI (Sistema possível indeterminado)

• Uma igualdade falsa sem incógnitas. (Ex.: 1 = 0; 2 = 1; 3 = -3; 5 = 2): o sistema é SI (Sistema impossível).

• Igualdade com impossibilidade de determinação do valor da incógnita. (Ex.: 0.x=10; 0w=5; 0y=2). Veja que as incógnitas estão multiplicadas por zero e igualadas a um valor. Afirmamos que é impossível determinar o valor da incógnita, pois qualquer que seja o seu valor, quando multiplicarmos pelo coeficiente 0 (zero) o resultado será nulo.

Após a aula teórica iremos para o laboratório de informática assistir ao vídeo:

Este vídeo tem por objetivo fixar os conceitos que discutimos em sala de aula.

AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 3:

Avaliação Informal:

Considerando o seguinte sistema e equações lineares:

$$\begin{cases} x+y+z+t=11 \\ x-y-z-t=-9 \\ -x+y-z-t=-7 \\ -x-y+z-t=-5 \end{cases}$$

Calcule o produto x.y.z.t

a) 15
b) 20
c) 30
d) - 20
e) - 30

$$\begin{array}{r} x+y+z+t=11 \\ x-y-z-t=-9 \\ \hline 2x=2 \end{array}$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\begin{array}{r} x+y+z+t=11 \\ -x+y-z-t=-7 \\ \hline 2y=4 \end{array}$$

$$\boxed{y=2}$$

$$\begin{array}{r} x+y+z+t=11 \\ -x-y+z-t=-5 \\ \hline 2z=6 \end{array}$$

$$\boxed{z=3}$$

$$x+y+z+t=11$$
$$1+2+3+t=11$$
$$t=11-6$$
$$\boxed{t=5}$$

$$\boxed{x.y.z.t=30}$$

O sistema $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x+ay=b \end{cases}$:

a) é impossível se a = 4 e b = - 2
b) é possível e determinado se a = 4 e b = - 2
c) é impossível se a ≠ 4 e b ≠ - 2
d) é determinado se a = 4
e) é indeterminado se a = 4 e b = - 2

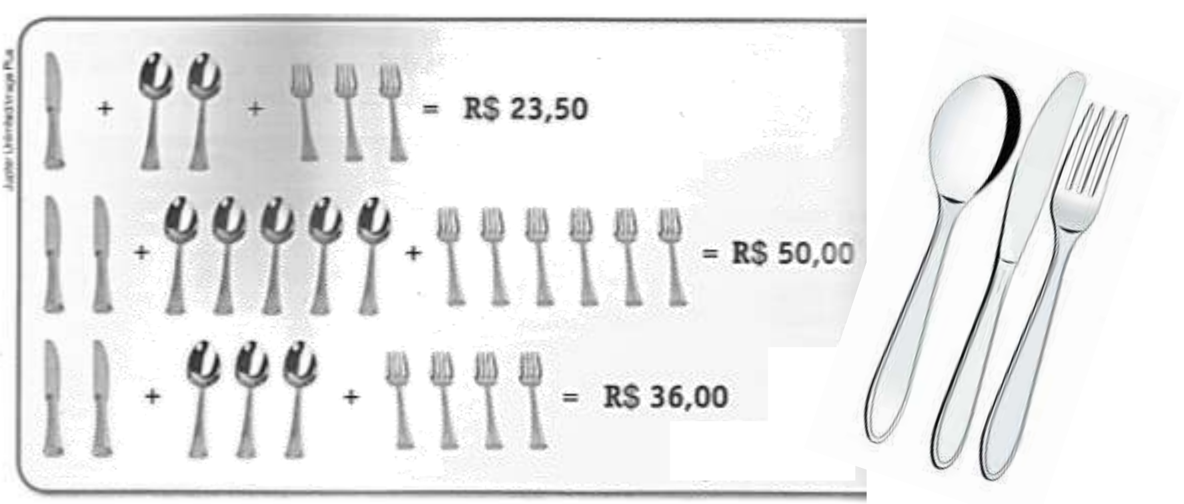
$$\begin{cases} x+2y=-1 \quad .(-2) \\ 2x+ay=b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x-4y=2 \\ 2x+ay=b \\ \hline (-4+a)y=2+b \end{array}$$

$$\boxed{y=\frac{2+b}{a-4}}$$

$a \neq 4 \Rightarrow$ S.P.D
$a=4$ e $b=-2 \Rightarrow$ S.P.I
$a=4$ e $b \neq -2 \Rightarrow$ S.I

Avaliação Formal: A partir da técnica aprendida resolva o problema do garfo, faca e colher que discutimos no início de nossa aula.



Questão com resolução:

. Numa loja, podem ser comprados: uma faca, duas colheres e três garfos por R$ 23,50; duas facas, cinco colheres e seis garfos por R$ 50,00: duas facas, três colheres e quatro garfos por R$ 36,00. Qual seria o valor pago por meia dúzia de cada?

$$\begin{cases} f + 2c + 3g = 23{,}50 & .(-2) \\ 2f + 5c + 6g = 50 & \\ 2f + 3c + 4g = 36 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2f - 4c - 6g = -47 \\ \underline{2f + 5c + 6g = 50} \\ \boxed{c = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2f - 4c - 6g = -47 \\ \underline{2f + 3c + 4g = 36} \\ -c - 2g = -11 \end{array}$$

$$c + 2g = 11$$
$$3 + 2g = 11$$
$$2g = 8$$
$$\boxed{g = 4}$$

$$f + 2c + 3g = 23{,}50$$
$$f + 6 + 12 = 23{,}50$$
$$f = 23{,}50 - 18$$
$$\boxed{f = 5{,}50}$$

$$6f + 6c + 6g = 33 + 24 + 18 = \boxed{75{,}00}$$

ATIVIDADE 4 – Vídeo e Problematizando sistemas escalonados

- HABILIDADE RELACIONADA: Trabalhar com situações problemas de sistemas
- PRÉ-REQUISITOS: Equações lineares, sistemas lineares, escalonamento.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, caderno e vídeo: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas

- OBJETIVOS:

- Apresentar um exemplo de sistema linear de equações por meio de um exemplo de dieta alimentar.
- Apresentar o método de Gauss para resolver sistemas de equações.
- Exercitar a resolução de problemas que envolvam sistemas lineares.

- METODOLOGIA ADOTADA: A partir do vídeo http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073 discutir a existência de outros métodos de resolução de sistemas bem como trabalhar problemas que envolvam a utilização de sistemas lineares.

VÍDEO Série: Matemática na Escola

Sinopse

Um jovem esportista está fazendo o seu treino e se sente muito cansado. Fala então com a nutriocionista do clube que lhe sugere uma dieta com quilocalorias, lipídios e proteínas suficientes para as atividades esportivas. Para determinar a quantidade por dia, de porções de alimentos que contenham cada um dos itens acima, ela monta um sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas. E para encontrar a solução eles usam o método de eliminação de Gauss.

40. (Unesp 2008) Uma lapiseira, três cadernos e uma caneta custam, juntos, 33 reais. Duas lapiseiras, sete cadernos e duas canetas custam, juntos, 76 reais. O custo de uma lapiseira, um caderno e uma caneta, juntos, em reais, é:
a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 17.
e) 38.

26. (Fuvest 2005) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi
a) 110
b) 120
c) 130
d) 140
e) 150

32. (Ita 2005) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50.
b) R$ 16,50.
c) R$ 12,50.
d) R$ 10,50.
e) R$ 9,50.

38. (Ufscar 2008) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja
a) R$ 30,50.
b) R$ 31,40.
c) R$ 31,70.
d) R$ 32,30.
e) R$ 33,20.

AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 4:

Atividade Formal: Escolher um dos quatro exercícios propostos para avaliação.

Implementação de mais exercícios:

1) Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$

2) Se o sistema linear $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$ é impossível, então

a) a = 0 b) a = -14/3 c) a = 3/4 d) a = 1 e) a = 28

3) Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: "Minha idade quando somada à idade de Júnior é igual a 47 anos; e quando somada à idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Júnior somam 39 anos." Qual a idade de Júnior?

a) 2 anos b) 3 anos c) 4 anos d) 5 anos e) 10 anos

4) (PUCCAMP) Um certo número de alunos fazia prova em uma sala. Em um dado momento, retiraram-se da sala 15 moças, ficando o número de rapazes igual ao dobro do número de moças. Em seguida, retiraram-se 31 rapazes, ficando na sala igual ao número de moças e rapazes. O total de alunos que fazia prova nessa sala era

a) 96 b) 98 c) 108 d) 116 e) 128

5) (Ufg 2007) Para se deslocar de casa até o seu trabalho, um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma motocicleta. Considerando que o custo do quilômetro rodado é de 21 centavos para o automóvel e de 7 centavos para a motocicleta, calcule quantos quilômetros o trabalhador deve andar em cada um dos veículos, para que o custo total mensal seja de R$ 70,00.

6) Seja o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$.

a) Verifique se (2, -1, 1) é solução de S.
b) Verifique se (0,0,0) é solução de S. Resp: a) é b) não é

7) Seja o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = k^2 - 9 \\ x - 2y = k + 3 \end{cases}$$

Calcule *k* para que o sistema seja homogêneo. Resp: k = -3

8) Calcular *m* e *n* de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$$

Resp: m = 0 e n = 1

9) Expresse matricialmente os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \text{ -1} \\ x - 3y = 0 \text{ 2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a \quad\quad + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

10) A expressão matricial de um sistema S é $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ Determine as equações de S.

11) Solucione os sistemas a seguir, utilizando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ Resp: {(1,2)} b) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ Resp: {(3,2)}

12) Calcule os valores de *x*, *y* e *z* nos sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ Resp:{(1,2,3)} b) $\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$ Resp: {(6,4,1)}

AVALIAÇÃO

A Avalição acontece em todas as aulas planejadas de maneira formal e informal. O aluno pode ser avaliado de maneira qualitativa e quantitativa.

- ✓ Na atividade 1 a avaliação vem de encontro ao item: - Identificar e representar os diferentes tipos equações lineares e validar suas soluções.
- ✓ Na atividade 2 a avaliação vem de encontro ao item: - Resolver problemas utilizando sistemas lineares, descrito no Currículo Mínimo 2012.
- ✓ Na atividade 3 a avaliação vem de encontro aos itens: - Resolver problemas utilizando sistemas lineares, descritos no Currículo Mínimo 2012
- ✓ Na atividade 4 a avaliação é feita vindo de encontro principalmente ao ítem: Resolver problemas utilizando sistemas lineares e Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática, descrito no Currículo Mínimo 2012.

-

FONTE DE PESQUISA:

- Currículo Mínimo 2012 de Matemática do Governo do Estado do Rio de Janeiro;
- Matriz do Saerjinho 2012;
- Roteiros de ação Sistemas lineares – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 01/09/2012;
- MATEMATICA IEZZI, Volume único/Gelson IEZZI – 4° Edição – São Paulo:Atual, 2007;

Endereços eletrônicos acessados entre 10/11//2012 e12/11/2012

http://m3.ime.unicamp.br/