Formação Continuada Nova Eja

Matemática Nova Eja- Módulo 1

1° Bimestre/ 2014

PLANO DE AÇÃO 4

Equações do 2° Grau

Nome: Walter Campos

Tutor: Josemeri Araújo Silva

Regional: Noroeste Fluminense

Sumário

1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste plano de trabalho e permitir que os alunos percebam, através de assuntos do cotidiano, a utilização da Matemática para resolução de problemas. Transmitir o conhecimento sobre o conteúdo denominado “Equações do 2° grau” fazendo, sempre que possível, com que os próprios alunos construam o conhecimento e enriqueçam sua “bagagem” através de atividades diferenciadas e exercícios práticos.

Além da ficha resumo, foi utilizado atividades diferenciadas que estimula o raciocínio do aluno e auxilia o mesmo na compreensão do conteúdo.

O material escolhido no plano de ação é um material que expressa os conteúdos de forma clara e inteligível buscando sempre auxiliar o aluno na compreensão do conteúdo, com o objetivo de facilitar o seu aprendizado.

É comum a dificuldade por parte de muitos alunos concernentes a interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico. Por isso, é extremamente importante mostrar em quais áreas da vida e/ou profissões o tema estudado é utilizado e mostrar que eles têm capacidade de aprender e não simplesmente “gravar” como se faz isso ou aquilo. Basta ter um pouquinho de boa vontade.

O assunto exige conhecimentos sobre conjuntos Z. Por isso, faz-se necessário revisar alguns temas ao longo do caminho, como por exemplo, operações com números inteiros.

2 - DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1: Equação 2° grau

- **Habilidade Relacionada:** resolver qualquer tipo de equação do 2° grau.
- **Pré-requisitos:** saber resolver equação do 1° grau.
- **Tempo de duração**: 400 minutos – Unidade 4
- **Recursos Educacionais Utilizados**: apostila, quadro e caneta, material para experimentos, RESUMO/EXPLICAÇÕES .
- **Organização da Turma**: individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.
- **Objetivos**: modelar problemas a partir de equações do 2° grau, solucionar equações do 2º grau a partir de diferentes métodos e interpretar geometricamente equações do 2º grau.
- **Metodologia Adotada:** introduzir o tema mostrando o objetivo dos estudos que estão por vir.. Através da ficha resumo disponibilizada para os alunos explicar o significado e a importância das equações do 2° grau e as aplicações das equações do 2° grau em situações problemas do dia a dia. Fazer com que os alunos interpretem geometricamente equações do 2° grau. Além desta ficha disponibilizamos experimentos como aulas práticas relacionadas com o conteúdo que vai auxiliar o aluno na compreensão do conteúdo.

FICHA RESUMO

Unidade 4 – Equações do 2° grau

Denomina-se **equação do 2° grau**, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, onde **x** é a incógnita e **a**, **b** e **c** são números reais, com $\mathbf{a \neq 0}$. **a**, **b** e **c** são coeficientes da equação. Observe que o maior índice da incógnita na equação é igual a dois e é isto que a define como sendo uma equação do segundo grau.

1 - Equação do 2° grau completa e equação do 2° grau incompleta

Da definição acima temos obrigatoriamente que $\mathbf{a \neq 0}$, no entanto podemos ter $\mathbf{b = 0}$ e/ou $\mathbf{c = 0}$.

Caso $\mathbf{b \neq 0}$ e $\mathbf{c \neq 0}$, temos uma equação do 2° grau completa. A sentença matemática $\mathbf{-2x^2 + 3x - 5 = 0}$ é um exemplo de equação do 2° grau completa, pois temos $\mathbf{b = 3}$ e $\mathbf{c = -5}$, que são diferentes de zero.

$\mathbf{-x^2 + 7 = 0}$ é um exemplo de equação do 2° grau incompleta, pois $\mathbf{b = 0}$.

Neste outro exemplo, $\mathbf{3x^2 - 4x = 0}$ a equação é incompleta, pois $\mathbf{c = 0}$.

Veja este último exemplo de equação do 2° grau incompleta, **$8x^2 = 0$**, onde tanto **b**, quanto **c** são iguais a zero.

Resolução de equações do 2° grau

A resolução de uma equação do segundo grau consiste em obtermos os possíveis valores reais para a incógnita, que torne a sentença matemática uma equação verdadeira. Tais valores são a **raiz** da equação.

Fórmula Geral de Resolução

Para a resolução de uma equação do segundo grau completa ou incompleta, podemos recorrer à **fórmula geral de resolução**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula também é conhecida como **fórmula de Bhaskara**.

O valor **b^2 -4ac** é conhecido como **discriminante da equação** e é representado pela letra grega **Δ**. Temos então que **$\Delta = b^2 - 4ac$**, o que nos permitir escrever a fórmula geral de resolução como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resolução de equações do 2° grau incompletas

Para a resolução de equações incompletas podemos recorrer a certos artifícios. Vejamos:

Para o caso de apenas **b = 0** temos:

Portanto para equações do tipo **$ax^2 + c = 0$**, onde **b = 0**, podemos utilizar a fórmula simplificada $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ para calcularmos as suas raízes. Observe no entanto que a equação só possuirá raízes no conjunto dos números reais se $-\frac{c}{a} \geq 0$.

Para o caso de apenas **c = 0** temos:

Portanto para equações do tipo **$ax^2 + bx = 0$**, onde **c = 0**, uma das raízes sempre será igual a zero e a outra será dada pela fórmula $x = \frac{-b}{a}$.

Para o caso de **b = 0** e **c = 0** temos:

Podemos notar que ao contrário dos dois casos anteriores, neste caso temos apenas uma única raiz real, que será sempre igual a zero.

Discriminante da equação do 2° grau

O cálculo do valor do discriminante é muito importante, pois através deste valor podemos determinar o número de raízes de uma equação do segundo grau.

Como visto acima, o discriminante é representado pela letra grega **Δ** e equivale à expressão **b^2 - 4ac**, isto é: **$\Delta = b^2 - 4ac$**.

Discriminante menor que zero

Caso **Δ < 0**, a equação não tem raízes reais, pois $\nexists \ \sqrt{\Delta} \in \Re$:

Discriminante igual a zero

Caso **Δ = 0**, a equação tem duas raízes reais e iguais, pois $+\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$:

Discriminante maior que zero

Caso **Δ > 0**, a equação tem duas raízes reais e diferentes, pois $+\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$:

Conjunto Verdade de equações do 2° grau

A partir do estudado acima, podemos esquematizar o conjunto verdade das equações do segundo grau completas e incompletas como a seguir:

Para o caso das equações completas temos:

Para o caso das equações incompletas onde somente **b = 0** temos:

Para o caso das equações incompletas onde somente **c = 0** temos:

$$V = \left\{0 \ , \ -\frac{b}{a}\right\}$$

E no caso das equações incompletas onde tanto **b = 0**, quanto **c = 0** temos:

$$V = \{0\}$$

Exemplo de resolução de uma equação do segundo grau

Encontre as raízes da equação: $2x^2 - 6x - 56 = 0$

Aplicando a fórmula geral de resolução à equação temos:

Observe que temos duas raízes reais distintas, o que já era de se esperar, pois apuramos para **Δ** o valor **484**, que é maior que **zero**.

Logo:

As raízes da equação $2x^2 - 6x - 56 = 0$ são: -4 e 7.

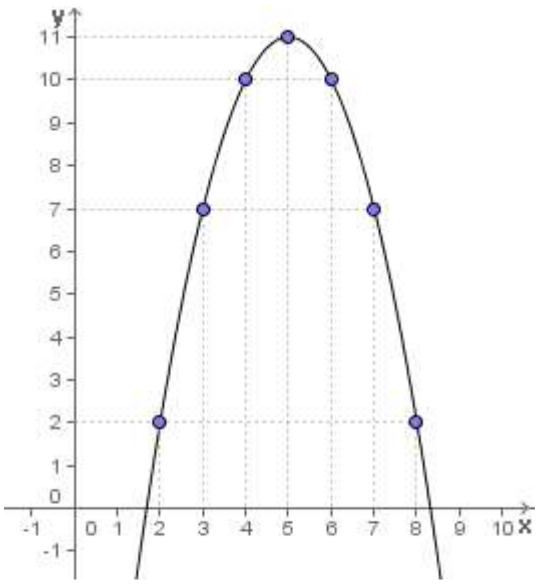
2 – Interpretação Geométrica da Equação do 2° grau

Toda equação do 2° grau representa uma parábola no plano cartesiano. O valor do a determina se a concavidade é voltada para cima ou para baixo. O discriminante Δ determina o número de raízes da equação. Observe:

- $\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes reis e distintas;
- $\Delta = 0 \rightarrow$ uma raiz real e dupla;
- $\Delta < 0 \rightarrow$ nenhuma raiz real.

Representação Gráfica de uma Função Quadrática

Devido ao fato de o gráfico de uma função polinomial do 2° grau ser uma parábola e não uma reta, como no caso de uma função afim, para montarmos o seu gráfico não nos basta conhecer apenas dois pares ordenados pertencentes à curva da função, no caso da função quadrática precisamos de mais alguns pontos para termos uma boa ideia de como ficará a curva no gráfico.



Vamos analisar o gráfico ao lado e a tabela abaixo que contém alguns pontos deste gráfico:

x	**$y = -x^2 + 10x – 14$**
2	$y = -2^2 + 10 . 2 - 14 = 2$
3	$y = -3^2 + 10 . 3 - 14 = 7$

4	y = -4^2 + 10 . 4 - 14 = 10
5	y = -5^2 + 10 . 5 - 14 = 11
6	y = -6^2 + 10 . 6 - 14 = 10
7	y = -7^2 + 10 . 7 - 14 = 7
8	y = -8^2 + 10 . 8 - 14 = 2

Na tabela temos cada um dos sete pontos destacados no gráfico.

Para traçá-lo primeiro identificamos no plano cartesiano cada um dos pontos sete pontos da tabela e depois fazemos as interligações, traçando linhas curvas de um ponto a outro seguindo a curvatura própria de uma parábola.

Normalmente é mais fácil traçarmos a parábola se a começarmos pelo seu vértice, que neste caso é o ponto (5, 11), visualmente o ponto máximo do gráfico desta parábola.

I) Ponto de Intersecção da Parábola com o Eixo das Ordenadas

De uma forma geral a parábola sempre intercepta o eixo y no ponto (0, c).

Na função y = $-x^2$ + 10x - 14, vista acima, o coeficiente c é igual a -14, portanto a intersecção da parábola do gráfico da função com o eixo das ordenadas ocorre no ponto (0, -14).

II) Raiz da Função Quadrática

Observe no gráfico anterior que a parábola da função intercepta o eixo das abscissas em dois pontos. Estes pontos são denominados raiz da função ou zero da função.

Uma função quadrática possui de zero a duas raízes reais distintas.

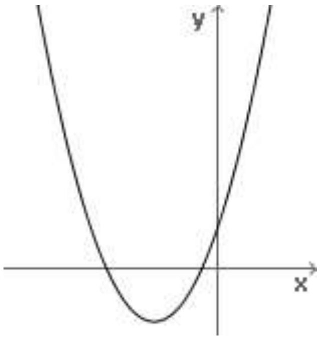
Sendo $y = -x^2 + 10x - 14$ a função, para encontramos as suas raízes basta igualarmos y a 0 e solucionarmos a equação do segundo grau obtida:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{11} \\ x_2 = 5 + \sqrt{11} \end{cases}$$

Estes são os valores de x que levam a y = 0, estes valores são portanto as raízes desta função.

III) Vértice e Concavidade da Parábola

Podemos observar que no gráfico da função $y = -x^2 + 10x - 14$ o seu vértice é o ponto máximo e que a sua concavidade é para baixo.



Agora vamos observar o gráfico da função $y = x^2 + 3x + 1$:

Como podemos perceber, esta outra parábola é côncava para cima e o seu vértice é o seu ponto mínimo.

Observando apenas a lei de formação das duas funções, qual o seu palpite para esta divergência entre os dois gráficos?

Vamos identificar os coeficientes destas funções.

Para a função $y = -x^2 + 10x - 14$ temos:

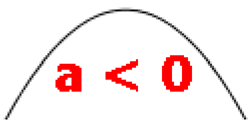
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -14 \end{cases}$$

Já para a função $y = x^2 + 3x + 1$ temos:

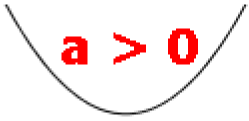
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Já tem algum palpite?

Observe que na primeira função o coeficiente a é negativo, ao passo que na segunda função este mesmo coeficiente é positivo.



O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é côncavo para baixo quando a < 0:



Por outro lado quando a > 0 o gráfico da função tem a sua concavidade voltada para cima:

IV) Coordenadas do Vértice da Parábola

A abscissa do vértice x_v é dada pela fórmula:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Já ordenada do vértice y_v pode ser obtida calculando-se $y_v = f(x_v)$, ou ainda através da fórmula:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Vamos tomar como exemplo novamente a função $y = -x^2 + 10x - 14$ e calcularmos as coordenadas do seu vértice para conferirmos com o ponto indicado na tabela inicial.

Seus coeficientes são:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -14 \end{cases}$$

Então para a abscissa do vértice x_v temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{10}{2 \cdot -1} \Rightarrow x_v = 5$$

A ordenada do vértice y_v vamos obter pelas duas formas indicadas. Primeiro utilizando a fórmula, mas para isto antes precisamos calcular o discriminante da equação $-x^2 + 10x - 14 = 0$:

Visto que o discriminante é igual a 44, a ordenada do vértice é:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{44}{4 \cdot -1} \Rightarrow y_v = 11$$

Da outra maneira o cálculo seria:

Portanto o vértice da parábola é o ponto (5, 11) como apontado inicialmente pela tabela.

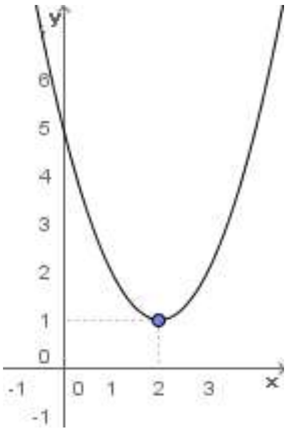
V) Valor Mínimo ou Máximo da Função Quadrática

Acima aprendemos a identificar pela lei de formação de uma função se a parábola do seu gráfico tem concavidade para cima ou para baixo e também aprendemos como calcular as coordenadas do vértice desta parábola.

Ficamos sabendo também que as funções polinomiais do 2° grau com coeficiente a < 0 possuem um valor máximo, ao ponto que quando o coeficiente a > 0 possuem um valor mínimo.

Com base nestes conhecimentos podemos calcular qual é o valor máximo ou mínimo de uma função quadrática.

Valor Mínimo e Ponto de Mínimo da Função Quadrática



Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

Os seus coeficientes são:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$$

Esta função é côncava para cima, pois o seu coeficiente a > 0.

O ponto (2, 1) é o vértice da parábola.

2 é a abscissa do vértice, isto é x_v, assim calculado:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 2$$

1 é a ordenada do vértice, ou seja y_v, que obtemos iniciando pelo cálculo do discriminante:

$$\Rightarrow \Delta = 16 - 20 \Rightarrow \Delta = -4$$

Conhecendo o discriminante podemos calcular y_v:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{-4}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_v = 1$$

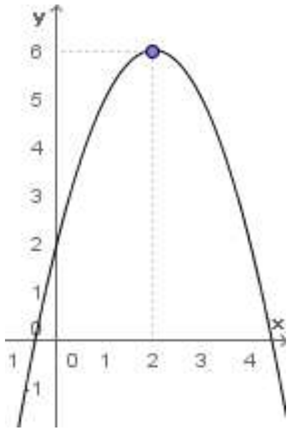
Observe que para valores de x menores que a abscissa do vértice, o valor de y vai diminuindo até atingir um valor mínimo que é a ordenada do vértice ou $f(x_v)$.

Como $x_v = 2$, então f(2) = 1 é o valor mínimo da função f e 2 é o ponto de mínimo da função f.

Para a > 0 o conjunto imagem da função polinomial do 2° grau é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$$

Valor Máximo e Ponto de Máximo da Função Quadrática



Vamos analisar agora este outro gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x + 2$:

Os coeficientes da regra de associação desta função são:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Esta função é côncava para baixo já que o seu coeficiente a < 0.

O ponto (2, 6) é o vértice da parábola.

2 é a abscissa do vértice, ou seja x_v, que calculamos assim:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{4}{2 \cdot -1} \Rightarrow x_v = 2$$

6 é a ordenada do vértice, isto é y_v, que agora vamos obter calculando $f(x_v)$ diretamente, em vez calcularmos primeiro o discriminante e a partir dele calcularmos y_v, como fizemos no caso do valor mínimo:

Neste caso veja que para valores de x menores que a abscissa do vértice, o valor de y vai aumentando até atingir um valor máximo que é a ordenada do vértice, que como sabemos é $f(x_v)$.

Visto que $x_v = 2$, então f(2) = 6 é o valor máximo da função f e 2 é o ponto de máximo da função f.

Para a < 0 o conjunto imagem da função quadrática é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}.$$

Exercícios de Fixação

1) Aplicando a fórmula de Bhaskara, resolva as seguintes equações do 2º grau.

   a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

   b) $9y^2 - 12y + 4 = 0$

   c) $5x^2 + 3x + 5 = 0$

2) Determine quais os valores de k para que a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tenha raízes reais e distintas.

3) Calcule o valor de p na equação $x^2 - (p + 5)x + 36 = 0$, de modo que as raízes reais sejam iguais.

4) Resolva a seguinte equação fracionária do 2º grau.

$$x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

5) *Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação* $x^2-2x-8= 0$*?*

6) *O número -3 é a raíz da equação* $x^2 - 7x - 2c = 0$*. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c.*

7) *Se você multiplicar um número real* **x** *por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número* **x**. *Qual é esse número?*

8) Uma tela retangular com área de 9600cm2 tem de largura uma vez e meia a sua altura. Quais são as dimensões desta tela?

ATIVIDADE 2: Experimentos

1) IMC

- ✓ **Material Necessário**: Palitos de Churrasco e sorvete.
- ✓ **Descrição Sucinta:** Esta atividade tem a intenção de introduzir a modelagem e a solução de problemas com as equações do 2° grau.
- ✓ **Divisão da Turma:** turma dividida em duplas.
- ✓ **Tempo Estimado:** 20 minutos.

2) Portão

- ✓ **Material Necessário**: palitos de churrasco e sorvete.
- ✓ **Descrição Sucinta:** esta atividade é análoga ao problema da calçada, apresentado no material do aluno no início da unidade e tem o objetivo de expor o aluno a problemas que exijam, em sua análise, a resolução de uma equação de segundo grau.
- ✓ **Divisão da Turma:** turma dividida em duplas.
- ✓ **Tempo Estimado:** 20 minutos.

3 – MATERIAL DE APOIO

- ✓ Material do Aluno: Conteúdo da Unidades 4 – Equações do 1° grau.

- ✓ Material do Professor: Unidades 4 do material do professor..

- ✓ Sites:

- InfoEscola. Disponível :<www.infoescola.com>
  Acesso em 25/03/2014.

- Brasil Escola. Disponível em <www.brasilescola.com.br>
  Acesso em 25/03/2104.

- Mundo Educação . Disponível em <www.mundoeducacao.com.br>
  Acesso em 25/03/2104.

4 – VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO

No decorre do desenvolvimento das atividades, o professor poderá analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido as informações, através das aulas práticas, dos Exercícios de Fixação realizados ao longo das aulas. Propor um trabalho em equipe (dois tempos de 50 minutos cada para organização e apresentação dos grupos), conforme o seguinte:

- separar a turma em grupos de cinco alunos, sortear dentre 10 questões de um livro (ainda não realizadas em sala), uma para cada grupo;

- definir a pontuação da atividade e um dia para realização do trabalho e indicar sites que contenham problemas com resoluções detalhadas para que os alunos possam ampliar ainda mais seus conhecimentos sobre o assunto;

- cada grupo deve solucionar seu problema e escolher um ou dois integrantes para apresentar a resolução detalhada no quadro para os demais alunos da turma na data marcada e na ordem já definida pelo professor;

Também é importante a aplicação de avaliação individual e escrita com duração de 100 minutos para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos de equações do 2° grau.

5 – BIBLIOGRAFIA

- ✓ MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, 3º Ano/ Kátia Stocco Smole & Maria Diniz – 6º Edição – São Paulo: Editora Saraiva 2010.

- ✓ Mundo Educação: Disponível em: <www.mundo educacao.com.br> Acesso em 25/03/2014.

- ✓ InfoEscola. Disponível m:<www.infoescola.com>
  Acesso em 25/03/2014.

- ✓ Brasil Escola. Disponível em <www.brasilescola.com.br>
  Acesso em 25/03/2104.