

## Plano de Ação unidade 19

Regional: Metropolitana VI

Tutor: Eli de Abreu

### Plano de Aula: A Trigonometria no triângulo retângulo (NEJA).

Escola Estadual Compositor Luiz Carlos da Vila

Período: 400 minutos (divididos em oito aulas de 50 minutos)

Responsável pelo plano: Prof. Sérgio da Silva Moreira

Público-alvo: Alunos do 2º Módulo NEJA.

Conteúdo: A trigonometria no triângulo retângulo.

Recursos necessários: Lousa e giz, caneta esferográfica, livro do aluno, vídeo aula no YouTube e Datashow.

### INTRODUÇÃO

Iniciando a Unidade 19 do material pedagógico produzido pelo CECIERJ é de suma importância destacar os objetivos específicos da unidade:

- \*Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ;
- \*Resolver problemas do cotidiano, envolvendo as razões trigonométricas;
- \*Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.
- \*Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações.
- \*Identificar e usar corretamente as relações: seno, cosseno e tangente.

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: medida dos triângulos. Dizemos então que a trigonometria é parte da Matemática cujo objetivo é o cálculo das medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

Inicialmente considerada como uma extensão da Geometria, a Trigonometria já era estudada pelos babilônios, que a utilizavam para resolver problemas práticos de Astronomia, de navegação e de agrimensura.

Aliás, foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da Trigonometria, pois sabe-se que o famoso astrônomo grego Hiparco (190 a.C. - 125 a.C.) foi quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Hiparco, considerado o pai da Astronomia, é também considerado o iniciador da Trigonometria.

No século VIII, importantes trabalhos hindus foram traduzidos para árabe, contribuindo para as notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes sobre a Trigonometria.

No século XV, foi construída a primeira tábua Trigonométrica por um matemático alemão, nascido na Baviera, chamado Purbach. Porém o primeiro trabalho sistemático sobre a Trigonometria foi o Tratado dos Triângulos, escritos pelo matemático alemão Johann Muller, também chamado Regiomontanus. Sabe-se que Regiomontanus foi discípulo de Purbach. Atualmente, a Trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como a Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil.

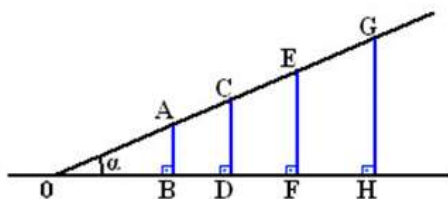
### DESENVOLVIMENTO

Estas aulas irão ser dedicadas, exclusivamente, à resolução de várias atividades sobre o assunto Trigonometria no triângulo retângulo. Para tal, eu o professor iniciarei as aulas explicando o propósito da mesma, ou seja, é retido que no fim das resoluções de todas as atividades, os alunos compreendam a aplicabilidade de trigonometria no triângulo retângulo através de problemas, reconheçam as relações fundamentais da trigonometria: seno, cosseno e tangente e identifiquem as relações seno e cosseno no triângulo qualquer, através das Leis do Seno e do Cosseno. As aulas serão desenvolvidas, a cada novo assunto, com a abordagem, quando possível de um problema para então apresentar o conteúdo desejado, sendo que na sequência será realizada a resolução de exercícios (exercícios resolvidos) para fixação do conteúdo, com isso será apresentado os exercícios propostos e também problemas que necessitem de interpretação e raciocínio para o seu desenvolvimento, donde será dado um tempo para que os alunos resolvam os mesmos ou então serão passados na forma de tarefa (quando não houver tempo para o término destes em sala de aula).

Após passarei a correção das atividades propostas, pedindo para que os próprios alunos as resolvam no quadro, mostrando a solução encontrada e também verificando se algum aluno resolveu de forma diferente, para mostrar aos alunos que não existe somente um caminho para se chegar ao resultado procurado e sendo esclarecidas as dúvidas.

### Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Consideremos um ângulo agudo qualquer de medida  $\alpha$ , levando-se em conta os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida  $\alpha$ .



Os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são todos semelhantes. Logo:

$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = r_2$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = r_3$$

Respectivamente, as razões (trigonométricas)  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  são denominadas de:

seno do ângulo  $\alpha$  ( $\text{sen } \alpha$ ),

coosseno do ângulo  $\alpha$  ( $\text{cos } \alpha$ ) e tangente do ângulo ( $\text{tg } \alpha$ )

Cosseno do ângulo agudo  $\alpha$  ( $\text{cos } \alpha$ ) é a razão entre a medida do cateto adjacente a  $\alpha$  e a medida da hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \quad \text{ou}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Seno do ângulo  $\alpha$  ( $\text{sen } \alpha$ ). A razão  $k$  é uma característica de cada ângulo  $\alpha$  e seu valor é chamado de seno do ângulo  $\alpha$  ( $\text{sen } \alpha$ ).

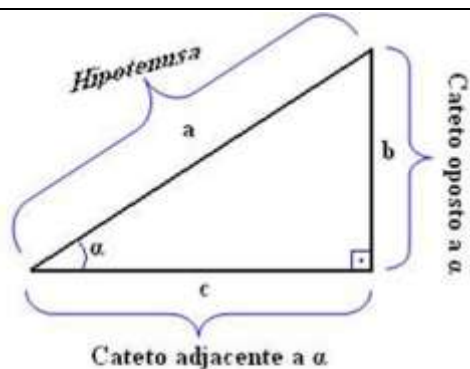
$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad \text{ou}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Tangente do ângulo  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha$ ) é razão entre a medida do cateto oposto a  $\alpha$  e a medida do cateto adjacente a  $\alpha$ .

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad \text{ou}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$



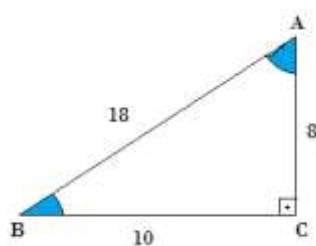
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

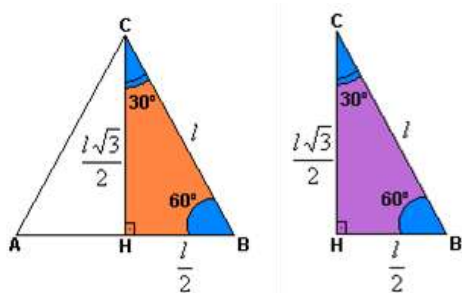
Exercício.

a) Determine os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos A e B no triângulo abaixo.



**As razões trigonométricas de 30°, 45° e 60°**

Considere as figuras:



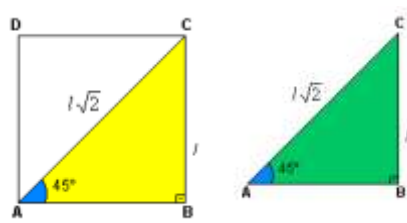
Triângulo equilátero de lado  $l$  e altura  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30° e 60°, temos:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{l}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} & \sin 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{l}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

### Seno, cosseno e tangente de 45°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 45°, temos:



$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{l}{l} = 1\end{aligned}$$

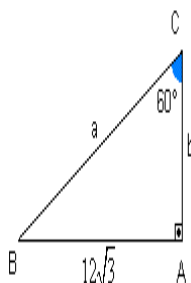
Quadrado de lado  $l$  e diagonal  $l\sqrt{2}$ .

Resumindo. TABELA TRIGONOMÉTRICA DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercício modelo.

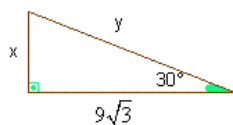
Determine os valores dos lados **a** e **b** no triângulo abaixo.



$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{12\sqrt{3}}{a} & \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{12\sqrt{3}}{a} & a &= 2 \cdot \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & a &= 24 \\ \cos 60^\circ &= \frac{b}{a} & \cos 60^\circ &= \frac{b}{24} & \frac{1}{2} &= \frac{b}{24} & b &= \frac{24}{2} \cdot 1 & b &= 12\end{aligned}$$

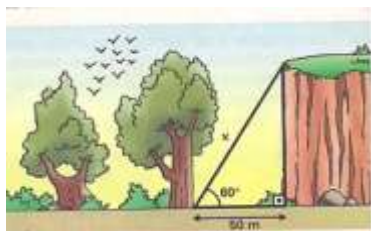
Exercício proposto.

Determine os valores dos lados  $x$  e  $y$  no triângulo abaixo.



Exercício modelo de aplicação de trigonometria.

Ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de  $60^\circ$ . Sabendo – se que a árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

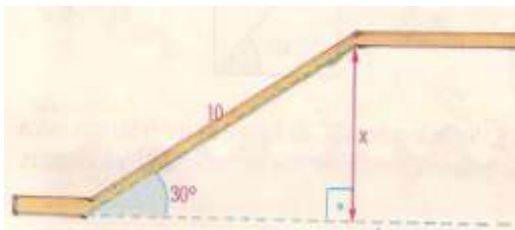


Resolução.

$$\cos 60^\circ = \frac{50}{x} \quad \frac{1}{2} = \frac{50}{x} \quad x = 50 \cdot 2 \quad x = 100 \text{ m}$$

Exercício proposto.

Uma rampa lisa com 10 m de comprimento faz ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira, eleva – se quantos metros verticalmente?



## TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em muitos casos, para resolver problemas com triângulos retângulos é necessário conhecer as razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo. Como a cada ângulo agudo está associado um único valor para o seno, para o cosseno e para a tangente, podemos elaborar uma tabela que nos forneça esses valores, evitando assim a necessidade de calculá-los a toda hora.

A tabela a seguir foi construída há séculos e nos dará os valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos de  $1^\circ$  até  $89^\circ$ , com aproximação até milésimos.

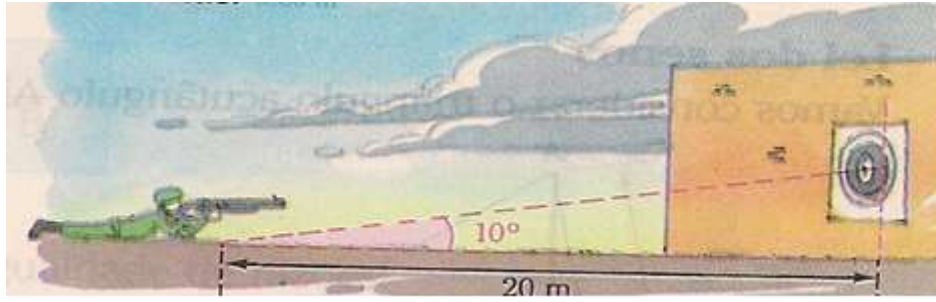
TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
$1^\circ$	0,017	1,000	0,017	$31^\circ$	0,515	0,857	0,601	$61^\circ$	0,875	0,485	1,804
$2^\circ$	0,035	0,999	0,035	$32^\circ$	0,530	0,848	0,625	$62^\circ$	0,883	0,469	1,881
$3^\circ$	0,052	0,999	0,052	$33^\circ$	0,545	0,839	0,649	$63^\circ$	0,891	0,454	1,963
$4^\circ$	0,070	0,998	0,070	$34^\circ$	0,559	0,829	0,675	$64^\circ$	0,899	0,438	2,050
$5^\circ$	0,087	0,996	0,087	$35^\circ$	0,574	0,819	0,700	$65^\circ$	0,906	0,423	2,145
$6^\circ$	0,105	0,995	0,105	$36^\circ$	0,588	0,809	0,727	$66^\circ$	0,914	0,407	2,246
$7^\circ$	0,122	0,993	0,123	$37^\circ$	0,602	0,799	0,754	$67^\circ$	0,921	0,391	2,356
$8^\circ$	0,139	0,990	0,141	$38^\circ$	0,616	0,788	0,781	$68^\circ$	0,927	0,375	2,475
$9^\circ$	0,156	0,988	0,158	$39^\circ$	0,629	0,777	0,810	$69^\circ$	0,934	0,358	2,605
$10^\circ$	0,174	0,985	0,176	$40^\circ$	0,643	0,766	0,839	$70^\circ$	0,940	0,342	2,747
$11^\circ$	0,191	0,982	0,194	$41^\circ$	0,656	0,755	0,869	$71^\circ$	0,946	0,326	2,904
$12^\circ$	0,208	0,978	0,213	$42^\circ$	0,669	0,743	0,900	$72^\circ$	0,951	0,309	3,078
$13^\circ$	0,225	0,974	0,231	$43^\circ$	0,682	0,731	0,933	$73^\circ$	0,956	0,292	3,271
$14^\circ$	0,242	0,970	0,249	$44^\circ$	0,695	0,719	0,966	$74^\circ$	0,961	0,276	3,487
$15^\circ$	0,259	0,966	0,268	$45^\circ$	0,707	0,707	1,000	$75^\circ$	0,966	0,259	3,732
$16^\circ$	0,276	0,961	0,287	$46^\circ$	0,719	0,695	1,036	$76^\circ$	0,970	0,242	4,011
$17^\circ$	0,292	0,956	0,306	$47^\circ$	0,731	0,682	1,072	$77^\circ$	0,974	0,225	4,332
$18^\circ$	0,309	0,951	0,325	$48^\circ$	0,743	0,669	1,111	$78^\circ$	0,978	0,208	4,705
$19^\circ$	0,326	0,946	0,344	$49^\circ$	0,755	0,656	1,150	$79^\circ$	0,982	0,191	5,145
$20^\circ$	0,342	0,940	0,364	$50^\circ$	0,766	0,643	1,192	$80^\circ$	0,985	0,174	5,671
$21^\circ$	0,358	0,934	0,384	$51^\circ$	0,777	0,629	1,235	$81^\circ$	0,988	0,156	6,314
$22^\circ$	0,375	0,927	0,404	$52^\circ$	0,788	0,616	1,280	$82^\circ$	0,990	0,139	7,115
$23^\circ$	0,391	0,921	0,424	$53^\circ$	0,799	0,602	1,327	$83^\circ$	0,993	0,122	8,144
$24^\circ$	0,407	0,914	0,445	$54^\circ$	0,809	0,588	1,376	$84^\circ$	0,995	0,105	9,514
$25^\circ$	0,423	0,906	0,466	$55^\circ$	0,819	0,574	1,428	$85^\circ$	0,996	0,087	11,430
$26^\circ$	0,438	0,899	0,488	$56^\circ$	0,829	0,559	1,483	$86^\circ$	0,998	0,070	14,301
$27^\circ$	0,454	0,891	0,510	$57^\circ$	0,839	0,545	1,540	$87^\circ$	0,999	0,052	19,081
$28^\circ$	0,469	0,883	0,532	$58^\circ$	0,848	0,530	1,600	$88^\circ$	0,999	0,035	28,636
$29^\circ$	0,485	0,875	0,554	$59^\circ$	0,857	0,515	1,664	$89^\circ$	1,000	0,017	57,290
$30^\circ$	0,500	0,866	0,577	$60^\circ$	0,866	0,500	1,732				



### Exercícios usando valores da tabela trigonométrica

Num exercício de tiro, o alvo se encontra numa parede cuja base está situada a 20 m do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de  $10^\circ$  em relação à horizontal, calcule a que distância o alvo se encontra do chão. (Dado:  $\sin 10^\circ = 0,17$ ;  $\cos 10^\circ = 0,98$  e  $\operatorname{tg} 10^\circ = 0,18$ ).

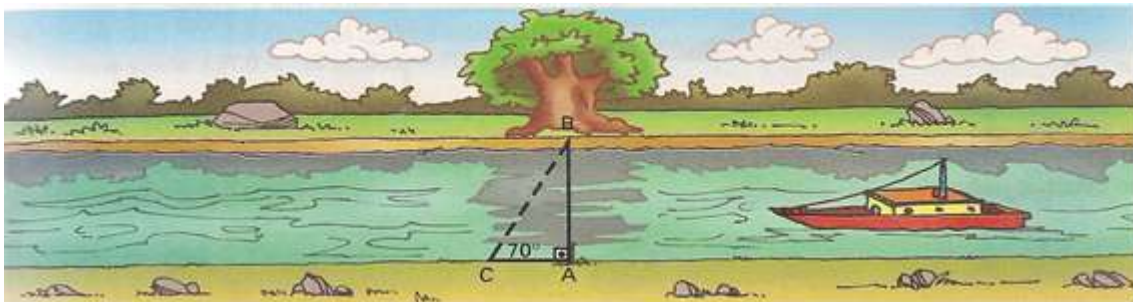


Resolução

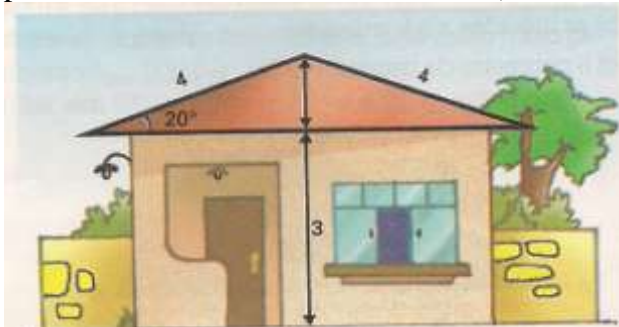
$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{x}{20} \quad 0,18 = \frac{x}{20} \quad x = 0,18 \cdot 20 \quad x = 3,6 \text{ m}$$

Exercício proposto.

Use seus conhecimentos analisando a figura para determinar a largura do rio, verifique qual a melhor opção para este cálculo, sendo: (Dado:  $\sin 70^\circ = 0,94$ ;  $\cos 70^\circ = 0,34$  e  $\operatorname{tg} 70^\circ = 2,74$ ).



Na construção de um telhado, foram usadas telhas francesas e o “caimento” do telhado é de  $20^\circ$  em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. (Use:  $\sin 20^\circ = 0,34$ ;  $\cos 20^\circ = 0,94$ ;  $\operatorname{tg} 20^\circ = 0,36$ .)



## **Conclusão**

Há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis.

Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como análise, e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil etc.

No nosso cotidiano, muitas vezes nos deparamos com situações que poderiam ser resolvidas se possuíssemos o conhecimento básico de trigonometria. Em muitas situações, poderemos chegar a conclusões e resolver determinados problemas apenas com o conhecimento desse conteúdo.

Espera-se que ao fim do estudo de relações trigonométricas no triângulo retângulo, os alunos compreendam e saibam usar os conhecimentos adquiridos em situações futuras de suas vidas seja no trabalho ou em concursos ou outra atividade qualquer.

### **Ponderações Finais.**

Algumas atividades do livro do professor e do livro do aluno unidade 18 serão amplamente exploradas, analisadas e resolvidas com a supervisão do professor, na finalidade de buscar a interação e a socialização dos alunos no desenvolvimento das mesmas.

O processo de avaliação será contínuo e diagnóstico buscando aplicar os critérios avaliativos na aprendizagem do aluno, com o objetivo de recuperar os alunos, através de:

- Trabalhos individuais e em grupo;
- Exercícios Propostos;
- Testes individuais escritos;
- Problemas matemáticos.
- Listas de exercícios envolvendo aplicações da trigonometria no cotidiano.
- Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.

### **Referências Bibliográficas:**

- Livro Matemática e suas Tecnologias: Módulo 2, elaborado pelo CECIERJ.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D. M. ; Périgo R. e Almeida N. – Matemática Ciências e Aplicações. Volume 1. Editora Atual.
- YOUSSEF, Antonio N.; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente P.,
- Matemática Ensino Médio, Volume Único, Editora Scipione, 1º Ed., São Paulo, 2009.
- DANTE, Luiz R., Matemática Dante Ensino Médio, Volume Único, Editora
- Ática, 1º Ed., São Paulo, 2009.
- GUELLI, Oscar. Matemática Série Brasil Ensino Médio, Volume Único,
- Editora Ática, 1º Ed. São Paulo. 2003
  
- Curso de Matemática – Volume Único
- Autores: Bianchini&Paccola – Ed. Moderna
- Matemática Fundamental - Volume Único
- Autores: Giovanni/Bonjorno&Givanni Jr. – Ed. FTD
- Contexto&Aplicações – Volume Único
- <http://orbita.starmedia.com/~achouhp/matematica/trigonometria.htm>
- <http://www.brasilecola.com/matematica/trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm>
- <http://tioheraclito.blogspot.com/2007/03/listas-de-trigonometria-no-tringulo.html>