Formação Continuada em Matemática

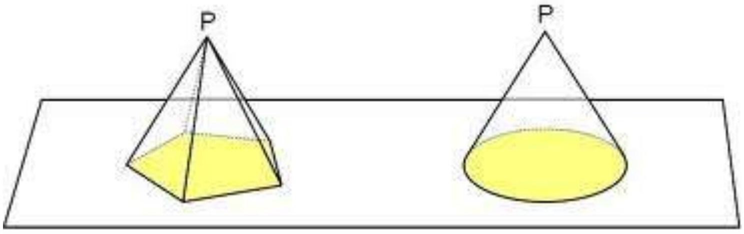
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática - Módulo 3

1º Bimestre/2014

Plano de Trabalho

Pirâmides e Cones



Tarefa PA 24

Grupo: 7 IE Prof. Manoel Marinho

Cursista: Cláudia Cristina Silva de Mattos Ferreira

Tutor: Fábio dos Santos Gonçalves

Sumário

INTRODUÇÃO

Os sólidos geométricos são encontrados nas diferentes formas existentes ao nosso redor. Uma caixa de sapatos, a caixa d'água, uma pirâmide, uma lata de óleo, a casquinha de um sorvete, entre outros, são considerados sólidos geométricos.

Este plano tem como objetivos identificar e calcular o volume e áreas laterais e totais do cone e da pirâmide o aluno também aprenderá a identificar seus principais elementos. Ao final do plano será apresentado um vídeo do Telecurso 2000 aula 65 sobre cone e pirâmide e exercícios para fixação do conteúdo.

Para início de conversa

A cidade de Gizé, também conhecida como Guizé ou Guiza, está localizada no Egito, na margem oeste do rio Nilo, distante cerca de 20 km a sudoeste da cidade de Cairo, capital do país. Gizé é famosa por abrigar um impressionante complexo monumental que remonta ao antigo Egito, atraindo turistas do mundo inteiro. Em seu território localizam-se as três grandes pirâmides e a esfinge, além de 80 pirâmides menores e vários templos.

IFigura 1 – Turistas visitando o planalto de Gizé. Em primeiro plano, a esfinge, ao fundo, uma pirâmide.

A esfinge é uma enorme escultura com corpo de leão e rosto humano, e os reais objetivos de sua construção continuam gerando muitas e acaloradas discussões na comunidade arqueológica. Já as pirâmides foram construídas com o objetivo de abrigar os túmulos dos reis, pois os egípcios acreditavam numa vida após a morte e essa vida dependia da conservação do corpo morto. Embalsamavam-se os corpos, e os objetos e valores do dia-a-dia eram colocados no túmulo para uso após a morte. A maior de todas as pirâmides é a grande pirâmide de Gizé (2.600 a. C.), cuja construção envolveu processos muito desafiadores, tanto na área da matemática quanto da engenharia. Sua estrutura, por exemplo, contém mais de 2000000 de blocos de pedra, cada um com cerca de 2,5 toneladas de peso. Os tetos de certas estruturas internas da pirâmide são feitos de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 m de comprimento por 1,2 m de largura, trazidos de uma pedreira situada a 960 quilômetros de distância e colocados a 60 m do solo.

DESENVOLVIMENTO
Atividades

- PRÉ-REQUISITOS:
  Noções de polígonos
- TEMPO DE DURAÇÃO:
  6 tempos de 50 min
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:
  Material do aluno
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA:
  Individual

O que são pirâmides ?

Matematicamente falando, uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono. Ou seja, é a reunião dos segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF,... em que A, B, C, D, E, F,... são pontos pertencentes ao polígono e V o ponto que não pertence ao polígono ABCDEF... Espera aí, para tudo ! ! ! Complexo demais?

Vamos fazer assim: dê uma olhada na figura seguinte e leia novamente o que está escrito nas linhas anteriores, procurando identificar nas figuras todos os elementos indicados. Combinado?

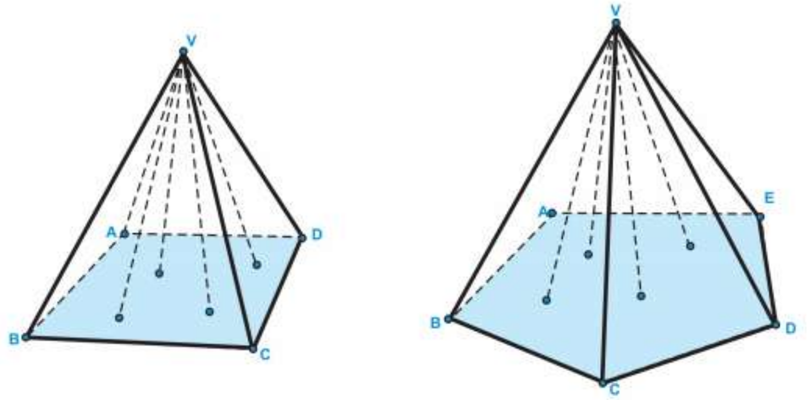


Figura 2 – Pirâmides de base quadrangular (à esquerda) e pentagonal (à direita)

Então, primeiramente, conseguiram identificar os polígonos de base? Na pirâmide da esquerda ele é o quadrilátero ABCD e, na da direita, o pentágono ABCDE. E o ponto que é exterior ao polígono. Nas duas pirâmides ele é o ponto V, para onde convergem os segmentos VA, VB, VC e VD – na pirâmide de base quadrada, da direita – e os segmentos VA, VB, VC, VD e VE, na pirâmide de base pentagonal, da esquerda. A pirâmide é sólida, inteiriça. Assim, os segmentos que vão de pontos interiores ao polígono até o vértice também pertencem à pirâmide. Isto posto, passaremos a um detalhamento dos principais elementos de uma pirâmide.

Os elementos de uma pirâmide

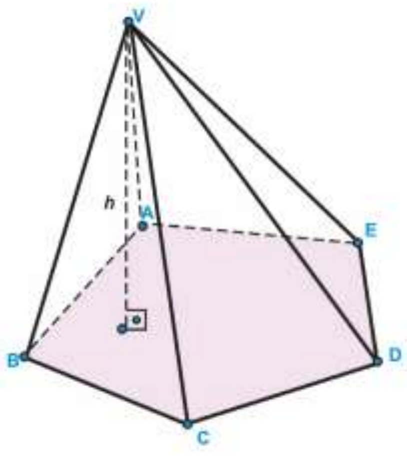


Figura 3 – Pirâmide de base pentagonal com a altura destacada.

Para simplificar nosso trabalho na hora de falar das pirâmides, vamos identificar e nomear alguns de seus ele mentos. O ponto externo ao polígono, V, será chamado de vértice da pirâmide.

- O polígono ABCDE será chamado de base da pirâmide
- Os lados desse polígono (neste exemplo: AB, BC, CD, DE e EA) são as arestas da base
- Os segmentos que têm como uma das extremidades os vértices do polígono (neste exemplo: VA, VB, VC, VD e VE) são as arestas laterais
- Os triângulos formados pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base (neste exemplo: VAB, VBC, VCD, VDE e VEA) são as faces laterais. Importante: a base é considerada como sendo uma face da pirâmide.
- A distância de V ao plano da base é a altura h da pirâmide

As pirâmides podem ser classificadas em relação à sua base. Se o polígono possuir 3 lados teremos uma pirâmide triangular (conhecida também como tetraedro), se possuir 4 lados teremos uma pirâmide quadrangular, se possuir 5 lados teremos uma pirâmide pentagonal e assim por diante. Isto tudo posto, que tal fazermos um problema?

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 6 faces. A partir deste dado encontre a) a quantidade de faces laterais que ela possui, b) como podemos classificar essa pirâmide em relação à base, c) quantas arestas laterais possui? d) quantas arestas da base possuem?

a. Quantas faces laterais possui?

Devemos notar que toda pirâmide tem uma base e faces laterais. Assim o número de faces laterais é sempre o número de faces menos 1 (base). Logo, o número de faces laterais desta pirâmide é igual a 6 – 1 = 5.

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base? (ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?)

O número de faces laterais é igual ao número de arestas da base (veja as figuras anteriores), pois as faces laterais são triângulos que tem sempre uma aresta da base como um lado. Logo, a base é um polígono de 5 lados, ou seja, é uma pirâmide pentagonal.

c. Quantas arestas laterais possui?

Como já sabemos que é uma pirâmide pentagonal podemos desenhar ou imaginar esta pirâmide e contar o número de arestas laterais. Uma figura que representa esta pirâmide está mostrada a seguir.

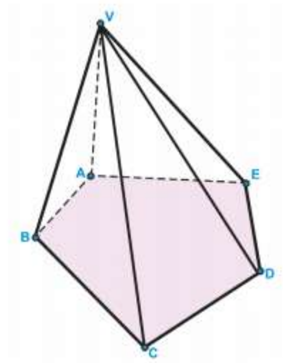


Figura 4 – Pirâmide de base pentagonal.

As arestas laterais são VA, VB, VC, VD e VE, portanto são 5 arestas laterais.

É importante percebermos que o número de arestas laterais é sempre igual ao número de lados do polígono da base, pois de cada vértice do polígono "sai" uma aresta lateral.

d. Quantas arestas da base possui?

As arestas da base (ver figura) são AB, BC, CD, DE e EA, ou seja, são 5 arestas da base..

Será que você consegue fazer um problema parecido? Tente não gravar regras e sim fazer o desenho e tirar suas conclusões.

Atividades 1 e 2 material do aluno pág. 126

Retomando o assunto, vamos falar da pirâmide regular. Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e as arestas laterais são congruentes entre si. Polígono regular, não custa lembrar, é aquele que possui todos os lados e todos os ângulos iguais. Uma característica bem interessante das pirâmides regulares é que, se a virmos de cima, o seu vértice fica bem no meio do polígono que forma a sua base. Resulta disso que a altura h da pirâmide, que faz um ângulo de 90º com o plano em que está o polígono da base, passa exatamente pelo centro deste polígono. Veja na figura

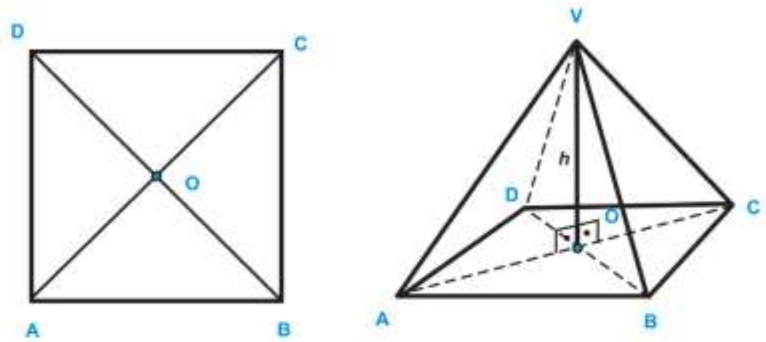


Figura 5 – Pirâmide regular de base quadrangular vista por cima (à esquerda) e de frente (à direita). Como a pirâmide é regular, o polígono da base é um quadrado e todas as arestas laterais são congruentes.

E agora, vamos fazer um problema juntos? Um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes. Qual é a altura de um tetraedro regular cuja aresta mede 1 cm?

Muito bem, a primeira providência é desenhar este tetraedro e marcar sua altura. Vejam na figura

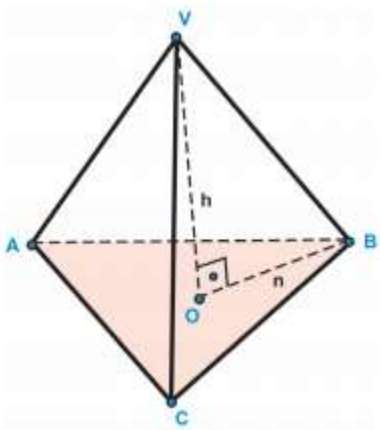


Figura 6 – Tetraedro regular

Acompanhe, então: temos que as arestas VA, VB, VC, AB, AC e BC são todas iguais entre si e de tamanho 1, confere? Muito bem! Isso faz com que as 4 faces do tetraedro sejam triângulos equiláteros, e também de lado 1, OK? Ótimo. Estão vendo o ponto O, no triângulo da base? Então, como o triângulo da base é equilátero e a pirâmide é regular, a altura H toca o plano justamente no centro do triângulo equilátero, o tal ponto O. E, relembrando nossa geometria plana, veremos que o centro de um triângulo equilátero está no ponto de encontro entre as alturas dos 3 lados. A distância desse ponto ao vértice vale 2/3 do valor da altura. Revirando mais um pouco o baú da geometria plana, encontramos que a altura de um triângulo equilátero é igual $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, onde l é o lado do triângulo. Com tudo isto em mãos, partimos para aplicar um teorema de Pitágoras no triângulo VOB. Encontraram o dito cujo na figura? Então, em frente: $(VO)^2 + (OB)^2 = (VB)^2$. VO é justamente o que queremos calcular, ou seja, o valor de h, e VB é 1, justamente porque todas as arestas tem comprimento 1. Teremos assim que $h^2 + (OB)^2 = 1^2$. Faltaria calcular o valor de OB. A partir do que resgatamos da geometria plana, o valor de OB é justamente 2/3 da altura, que vale $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Assim, $OB = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Como l=1, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Aí teremos $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2$, $h^2 + \frac{1}{3} = 1^2$, $h^2 = \frac{2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Existe, nas pirâmides regulares, um elemento bastante importante: o apótema. Chamamos de apótema de uma pirâmide regular a altura de qualquer um dos triângulos que compõem as faces laterais da pirâmide. Geralmente atribuímos a ele a letra g.

Chamamos de apótema da base de uma pirâmide regular o segmento m que equivale à menor distância do centro da base até a cada um dos lados do polígono da base, ou seja, a menor distância entre o centro da base (projeção ortogonal do vértice sobre a base) e a aresta da base.

A figura seguinte nos mostra esses elementos.

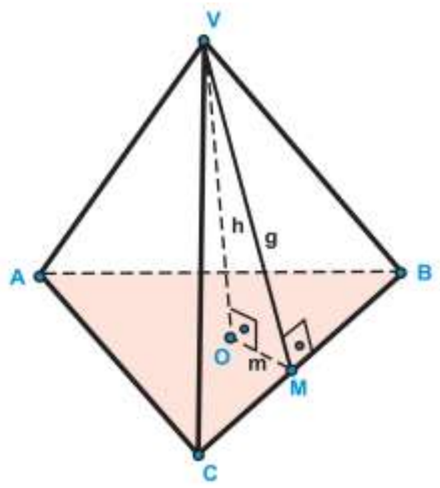


Figura 7 – Tetraedro regular com apótema da base (m) e apótema lateral (g) destacados

Observe que o triângulo VOM é um triângulo retângulo de catetos h e m e hipotenusa g. Com alguma contribuição do Teorema de Pitágoras, podemos tirar a seguinte relação: $g^2 = h^2 + m^2$

Ou seja, o quadrado do apótema da pirâmide regular é igual a soma do quadrado da altura com o quadrado do apótema da base.

Volume da Pirâmide

Abordar as demonstrações das fórmulas do volume da pirâmide e do tronco da pirâmide seria muito interessante – mas faria com que nossa aula perdesse inevitavelmente seu rumo. Assim, combinamos da seguinte maneira: no que diz ao presente assunto, interessará o fato de o volume de uma pirâmide ser 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura, ou seja,

$V = 1/3A_b \cdot h$ onde Ab é a área da base e h é a altura da pirâmide. A demonstração dessa fórmula e da fórmula do volume do tronco de pirâmide estarão nos links do box seguinte.

Área lateral e área total

A área lateral Al é a área da superfície lateral (união das faces laterais) da pirâmide. Assim a área lateral é a soma das áreas dos triângulos correspondentes à faces laterais. No caso que abordamos, era igual à soma das áreas do seis triângulos.

A área total At é a soma da área da base com a área lateral. $At = Ab + Al$

Elementos do cone

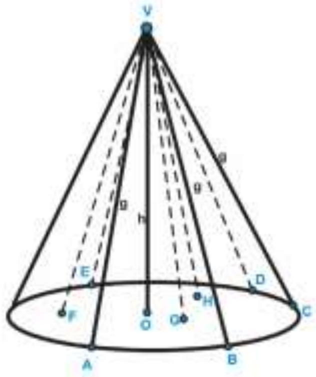


Figura 15 – Cone.

Da mesma forma que fizemos com as pirâmides,

- O ponto V que está fora do plano da base é chamado de vértice.
- O círculo de centro O é a base do cone
- Cada segmento cujas extremidades são o vértice e o ponto da circunferência (não confundir com o círculo) é uma geratriz g do cone. VA, VB, VC, VD e VE são geratrizes. VF, VG, VH e VO não são geratrizes.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de altura h do cone. Na figura, ela é representada pelo segmento VO. Ela incide sobre o centro O do círculo que serve de base ao cone e faz um ângulo de 90º com o plano em que se encontra este círculo.

Um cone pode ser classificado como cone oblíquo ou cone reto. Cone oblíquo é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo não forma um ângulo reto com a base. Cone reto é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo forma um ângulo reto com a base. Veja na figura seguinte.

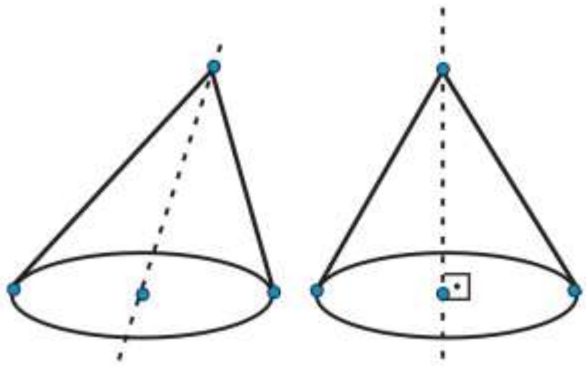


Figura 16 – Um cone oblíquo (à esquerda) e um cone reto (à direita).

Como calcular a área e o volume do cone?

Veja a figura

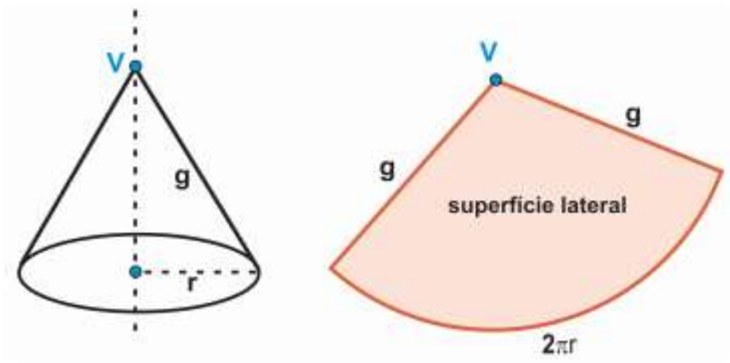


Figura 18 – Cone e superfície lateral do cone. Geratriz g e raio r destacados.

A idéia é fazer um corte no cone seguindo justamente a geratriz g, destacada no cone que está à esquerda da figura anterior. Depois desse corte, a superfície lateral terá o formato do setor circular, mostrado à direita da figura anterior. Nele, é importante observar duas coisas. A primeira delas é que o comprimento do arco subentendido por este setor circular é justamente o perímetro do círculo que serve de base ao cone. Como esse círculo tem raio r, o comprimento do arco é de $C = 2. \pi. r$. Acompanhem lá figura anterior.

Outro ponto a perceber é que o raio deste setor circular formado é igual á geratriz g do cone. Viram? Ótimo!

Não viram? Voltem lá e releiam as linhas anteriores até visualizar esta relação. Ela é importante para avançar na compreensão deste conceito. Pronto? Muito bom! Então, recapitulando e olhando para o setor circular: o comprimento do arco subentendido pelo setor é $C = 2. \pi. r$. e o raio desse setor é g. Isto posto, faremos uma regra de 3: um círculo

completo de raio g subentende um arco de comprimento e área 2 A g =π. . Já nosso setor circular tem comprimento

$C = 2. \pi. r$. e terá uma área Al – que é justamente o que nós queremos saber. Vejam só

Área do setor - Comprimento do arco

πg^2 - $2\pi g$

$A\ell$ - $2\pi r$

Assim, teremos $A_l.2\pi.g = 2\pi r.\pi g^2; A_l = \pi rg$

Assim, para calcular a área lateral, precisaremos conhecer o valor r, – que já conhecemos: 2,5 cm – e o valor de g, ainda desconhecido. Para calcular o valor de g, aplicaremos um teorema de Pitágoras envolvendo a geratriz, o raio da base, r, e a altura do cone, h. Veja na figura:

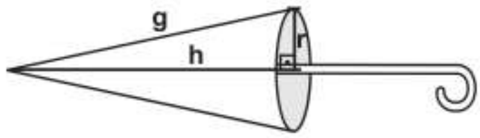


Figura 19 – Cone do guarda chuva de chocolate, com geratriz, raio da base e altura destacados.

O teorema fica assim: $r^2 + h^2 = g^2$, confere? Substituindo os valores, teremos $r^2 + h^2 = g^2; (2,5)^2 + 6^2 = g^2; 6,25 + 36 = g^2; 42,25 = g^2; g = 6,5\ cm$. Voltando à fórmula da área do setor circular – que, para lembrar, é área lateral do cone - teremos $A_l = \pi rg = \pi.2,5.6,5 = 16,25\pi\ cm^2$. E, resgatando o que dissemos no início do problema, em cada guarda chuva de chocolate a embalagem irá cobrir a base e a área lateral. A área da base, já calculamos, é $A_{base} = 6,25\pi\ cm^2$. A área lateral, acabamos de calcular, é $A_l = 16,25\pi\ cm^2$. Assim, a área total será de $A_{total} = A_{base} + A_l = 6,25.\pi + 16,25.\pi = 22,5\pi\ cm^2$. Se consideramos $\pi \cong 3,14$ teremos uma área total de aproximadamente 70,65 cm2 . De posse desse valor e do custo por centímetro quadrado de papel, o empresário poderá calcular o custo da embalagem de cada guarda chuva de chocolate.

Isto posto, a solução da segunda parte do problema – a saber, calcular o volume do cone do guarda chuva de chocolate – fica bem tranquila. Temos que $V_{cone} = \frac{1}{3}.A_{base}.h$, onde A_{base} é a área da base e h é a altura. A altura, já sabemos, é de 6 cm. A área da base também foi calculada anteriormente e vale $A_{base} = 6,25.\pi\ cm^2$. Assim, o volume do cone de chocolate é de $V_{cone} = \frac{1}{3}.6,25.\pi.6 = 12,5\pi\ cm^3$. Se consideramos $\pi \cong 3,14$, teremos que o volume de um cone de chocolate é de aproximadamente 39,25 cm³. Se lembrarmos que um centímetro cúbico é igual a um mililitro e tivermos o custo por litro de chocolate, poderemos calcular o custo de um cone.

Muito bem? Ótimo! Vamos agora então formalizar um pouco mais os conceitos com que acabamos de trabalhar

- A area da base A_b de um cone é a área do círculo de raio r. Logo $A_b = \pi r^2$.
- Área lateral A_l de um cone é a área de um setor circular cujo raio é igual a geratriz *g* do cone e o comprimento do arco é 2πr, onde r é o raio do círculo.
- Para calcularmos a área da superfície lateral do cone usaremos a regra de três

  Área do setor - Comprimento do arco

  πg^2 - $2\pi g$

  A_l - $2\pi r$
- A área total A_t é a soma das áreas da base e lateral, ou seja, $A_t = A_b + A_l$
- O volume V do cone é calculado da mesma forma que o volume da pirâmide. $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$, onde A_b é a área da base e *h* é a altura do cone.

E que tal uma atividade?

Atividades 2 material do aluno pág. 144

Resumo

- Uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono
- O polígono é chamado de base da pirâmide e o ponto externo V de vértice da pirâmide
- A área de uma pirâmide é dada pela soma da área da base com a área lateral: At = Ab +Al
- A área da base é a área do polígono e a área lateral é a soma das áreas dos triângulos que se formam conectando cada lado do polígono ao vértice.
- O volume de uma pirâmide é dado pela fórmula V =1/3 Ab.h
- Um cone é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um círculo e a outra pertence a um ponto V exterior ao círculo
- O círculo é chamado de base do cone e o ponto externo V de vértice da pirâmide
- A área de um cone é dada pela soma da área da base com a área lateral: At = Ab +A
- A área da base é a área do círculo de raio r : Ab = r. π²
- A área lateral é calculada via regra de três:
- Área do setor - Comprimento do arco

- πg^2 - $2\pi g$
- Al - $2\pi r$
- Onde g é a geratriz do cone
- O volume de um cone é dado pela fórmula V= 1/3 Ab.h

DESENVOLVIMENTO

Atividade 2

- PRÉ-REQUISITOS:

  Noções de figuras planas

- TEMPO DE DURAÇÃO:

  30 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:

  Computado e projetor

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA:

  Individual

- OBJETIVOS:

  Reconhecer e identificar pirâmides e cones

- ÁREA DE CONHECIMENTO:

  Matemática

DESENVOLVIMENTO

Atividade3

Folha de atividade – Consolidação e registros de aprendizagem – material do professor –pág. 162

Folha de atividade – Questão dissertativa material do professor pág. 165

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados pelas atividades em sala de aula e participação do trabalho em grupo, pela produção da aprendizagem dos conteúdos. A cada atividade será proposto debate através da descoberta de cada grupo, apontando os pontos deficientes e os momentos positivos, através do debate poderemos observar o processo de desenvolvimento do aluno.

Ao final de toda atividade será aplicada uma avaliação dissertativa com objetivo de verificar a formação dos conteúdos mais importantes e da capacidade de utilização do conhecimento adquiridos e raciocínio logico para resolver problemas do cotidiano envolvendo Geometria Espacial.

Todo plano foi elaborado com situações que envolva sólidos que são amplamente utilizados tanto para questões para modelagem da ciência como para questões do dia a dia, portanto, os alunos terão uma facilidade de aprendizagem devido a vivencia diária.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- RUBINSTEIN, Célia; ALVES, Daniel Portinha; OLIVEIRA, Heitor B.L.; SILVA, Leonardo Andrade; COUTINHO, Luciane de P.M.; CARVALHO, Raphael Alcaires; OLIVEIRA, Thiago Maciel. **Nova Eja Matemática e suas Tecnologias Material do aluno.** Brasília: 2013. p 43

- GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Robert. **Matemática Completa** FTD 2° edição renovada São Paulo -2005

- VÍDEO TELECURSO 2000 Disponível em: www.youtube.com/watch?v=gAe-bmj-rIQ Acesso31/03/2014