Formação Continuada Nova EJA

Plano de Ação 29 e 30

Nome: Márcia da Silva Oliveira (Grupo D)

Regional: METRO III Madureira Tutor: Maria Elizabete de Lima

INTRODUÇÃO

As matrizes surgiram com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a idéia das matrizes.

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Informática, Matemática, Física, dentre outras.

Uma matriz é um conjunto ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas representadas respectivamente por m e n, onde $n \geq 1$ e $m \geq 1$.

Para representar essas linhas e colunas devemos obedecer às regras, dependendo do número de linhas e colunas a matriz recebe um nome e podemos também aplicar a elas as quatro operações.

O estudo dos sistemas lineares levou alguns matemáticos do século XVII a **desenvolverem a teoria dos determinantes.**

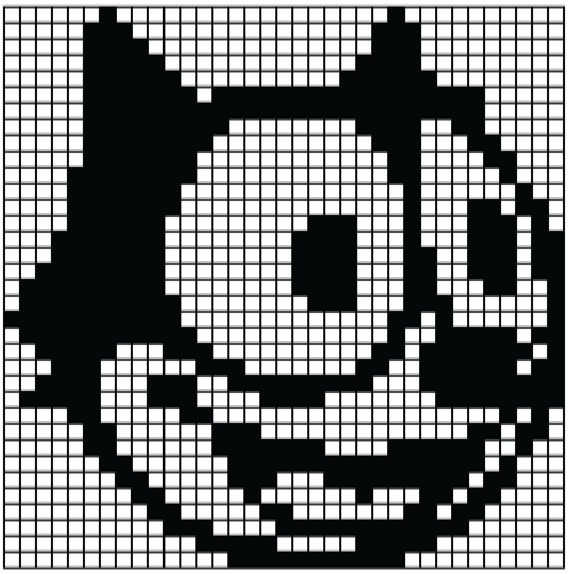
Determinante é um tipo de matriz, mas essa deverá ter **o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas, que é chamada de matriz quadrada.** O determinante é um número obtido, (também chamado de valor numérico de um determinante) por meio de multiplicações e adições dos coeficientes de um sistema linear. Nele aplicamos suas propriedades, como achar o valor numérico de um determinante.

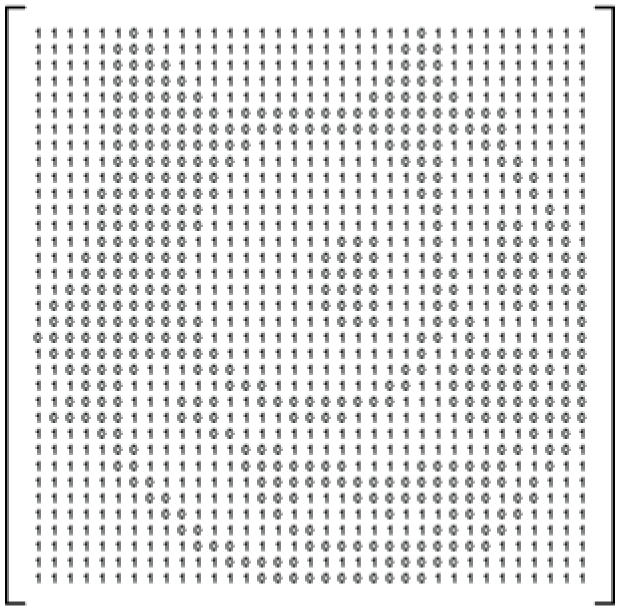
Certamente o ramo mais prodigioso do campo das Matrizes é o computacional em que o uso de vetores e operações matriciais é indispensável, seja na elaboração e desenvolvimento de softwares às imagens geradas de filmes e fotos. Cada filme ou foto carrega uma quantidade incrível de **pixels**, que **são calculadas por matrizes** e que, por sua vez, são mais bem transportadas por matrizes linhas ou colunas (vetores). Não obstante elas também têm aplicabilidade na vida prática, não sendo necessariamente apenas nas ciências aplicadas. A computação gráfica é baseada em multiplicação de matrizes. Outra **fácil aplicabilidade das Matrizes consiste no estudo das Equações Lineares.**

Existe uma relação muito importante entre os pixels e as matrizes, exemplos:

1º) Uma tela de computador com 640 x 480 pixels. Esses números indicam que a tela é formada por uma tabela com 307.200 pontos, ou pixels. Essa tabela tem 480 pontos de altura e 640 pontos de largura. Para localizar um ponto nessa tabela, você pode simplesmente dar como endereço um par (a,b), onde A seria a linha e B a coluna. Pois é assim que funcionam as matrizes. Elas organizam números em forma de tabela, e permitem localizar um número por meio de um par (a,b), tal como na tela do computador. E o que essa matriz de pixels guarda em cada posição? A resposta é simples: sua cor. Numa tela com 256 cores, cada pixel guarda um número entre zero e 255. Isso dá 256 possibilidades - ou 2 elevado a 8.

2º) A pequena imagem do Gato Félix  pode ser representada por uma matriz 35 × 35 cujos elementos são os números 0 e 1, que especificam a cor do pixel. O número 0 indica a cor preta e o número 1, indica a cor branca. Imagens digitais que usam apenas duas cores (em geral, preta e branca) são denominadas *imagens binárias* (ou *imagens booleanas*). A figura (estática) abaixo apresenta uma versão ampliada da imagem do Gato Félix, onde cada quadrado representa um pixel. A matriz correspondente é apresentada ao lado.





35x

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de m incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal. Observe o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 9y = -20 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$$

Representação Matricial deste sistema: $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 \\ 6 \end{vmatrix}$

A resolução de determinantes (D) de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, da matriz dos coeficientes do sistema. Quanto à resolução de determinantes (D) de ordem 3, utilizamos a regra de Sarrus, criada pelo matemático francês Pierre Frederic Sarrus. Em ambos determinantes, se D ≠ 0, concluímos que o sistema é possível e determinado, mas se D = 0, ficamos entre duas alternativas: SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema Indeterminado). Nesse caso, o escalonamento nos auxilia a identificar a classificação correta.

ATENÇÃO: Não devemos esquecer que matriz e determinantes são entes distintos: matriz é uma tabela e determinante é um número.

DESENVOLVIMENTO

A cada unidade aplicada em sala de aula, nos deparamos com novas deficiências de nossos alunos e, com um cronograma impossível de ser cumprido. É bom lembrar que, embora o "NEJA" seja uma política educacional com livros didáticos próprios (materiais do aluno e do professor), cabe a nós, professores, fazermos as adaptações necessárias para adequar nossas aulas não só à realidade de cada turma, mas também adequarmos duas unidades em um único Plano de Ação. Assim, este Plano terá início com o estudo de matrizes e determinantes, finalizando com Sistemas Lineares. Iniciarei a aula falando um pouco sobre matrizes.

Consideremos agora, uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{cc} \text{linha} \rightarrow & \begin{pmatrix} \boxed{8\ \ 7\ \ 9\ \ 8} \\ 6\ \ 6\ \ 7\ \ 6 \\ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 9 \end{pmatrix} \end{array} \ \text{ou}\ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8&7&9&8\\ 6&6&7&6\\ 4&8&5&9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow \\ \text{3ª linha} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \end{array} \end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.
Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.
Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

Matriz linha: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

Matriz coluna: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

Matriz quadrada: matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1. Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal i = j

diagonal secundária i + j = n + 1

Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1
$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

Matriz nula: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $O_{m x n}$.

$$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$$a)\ A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}],\ a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Matriz transposta: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.
Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

Matriz simétrica: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$ **.** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ij}$.

Matriz oposta: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, $Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\, para \;\; \text{todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A = B, \text{ então } c = 0 \text{ e } b = 3$$

Operações envolvendo matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m \times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A
b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n
d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

B = x.A

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x . (yA) = (xy) . A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y) . A = xA + yA

d) elemento neutro : xA = A, para x=1, ou seja, A=A

Neste instante, farei no quadro, alguns exercícios junto com tuema, para uma melhor compreensão do conteúdo aplicado.

Exercício 1

Os elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 x 3 são dados por a_{ij}, onde: i + j, se i ≠ j

0, se i = j, Determine M + M.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M + M = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+0 & 3+3 & 4+4 \\ 3+3 & 0+0 & 5+5 \\ 4+4 & 5+5 & 0+0 \end{vmatrix}$$

$$M + M = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercício 2

(PUC–SP–Adaptada) São dadas as matrizes A = (aij) e B = (bij), quadradas de ordem 2, com aij = 3i + 4j e bij = – 4i – 3j. Considerando C = A + B, calcule a matriz C.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 3*1+4*1 & 3*1+4*2 \\ 3*2+4*1 & 3*2+4*2 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow B = \begin{vmatrix} -4*1-3*1 & -4*1-3*2 \\ -4*2-3*1 & -4*2-3*2 \end{vmatrix} \Rightarrow B = \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -11 & -14 \end{vmatrix}$$

$$C = A + B$$

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -11 & -14 \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} 7+(-7) & 11+(-10) \\ 10+(-11) & 14+(-14) \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 7-7 & 11-10 \\ 10-11 & 14-14 \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercício 3

(PUCC–SP–Adaptada) Seja a matriz $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{2 \times 2}}$, em que $\boldsymbol{a_{ij}}$ = i + j, se i = j e i – j, se i ≠ j. Determine a matriz respeitando essas condições e calcule A + A + A.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow A = \begin{vmatrix} 1+1 & 1-2 \\ 2-1 & 2+2 \end{vmatrix} \rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{vmatrix} 2+2+2 & -1+(-1)+(-1) \\ 1+1+1 & 4+4+4 \end{vmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$$

Exercício 4

Determine a matriz C, resultado da soma das matrizes A e B.

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 12 \\ 45 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

Resposta:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & -9 & 12 \\ 45 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3+(-8) & 5+(-9) & 2+12 \\ 6+45 & 4+6 & 8+(-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & -4 & 14 \\ 51 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} -11 & -4 & 14 \\ 51 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercício 6

Adicione as matrizes e determine os valores das incógnitas.

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 \\ t & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x+x=10 & y+3=-1 \\ 3+t=4 & 2z+z=18 \end{vmatrix}$$

Resposta: x + x = 10

2x = 10

x = 5

y + 3 = – 1

y = – 1 – 3

y = – 4

3 + t = 4

t = 4 – 3

t = 1

2z + z = 18

3z = 18

z = 18/3

z = 6

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos sus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 . (-1) + 2.4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ & \end{bmatrix}$$

-
- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1) + 4.4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3.3 + 4.2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$A.B = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1 + 3.3} & \boxed{(-1).2 + 3.4} \\ \boxed{4.1 + 2.3} & \boxed{4.2 + 2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B$.A, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m \times p} . B_{p \times n} = (A.B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A . B)_{3 \times 5}$
- Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A . B)_{4 \times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:
a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)
b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A .

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, A .B =$0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que A = $0_{m \times n}$ ou B = $0_{m \times n}$.
Neste momento, farei juntamente com a turma, alguns exercícios de multiplicação de matrizes para melhor fixação desta operação.

Exercícios Resolvidos:

01. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$,calcular :

a) A . B

$$\begin{bmatrix} 1.1+2.2+3.3 & 1.1+2.4+3.0 \\ 0.1+(-1).2+2.3 & 0.1+(-1).4+2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+9 & 1+8+0 \\ 0-2+6 & 0-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}_{2x2}$$

b) B . A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+1.0 & 1.2+1.(-1) & 1.3+1.2 \\ 2.1+4.0 & 2.2+4.(-1) & 2.3+4.2 \\ 3.1+0.0 & 3.2+0.(-1) & 3.3+0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 14 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

02. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,calcular :

a) A . B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$$

b) B . A

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$$

c) $A^2 = A . A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

d) $B^2 = B . B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 19 \end{pmatrix}$$

04. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}$, calcule:

a) A . B

$$\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\end{bmatrix}_{1x3}.\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}_{3x1}=\begin{bmatrix}-13\end{bmatrix}_{1x1}$$

b) B . A

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}_{3x1}.\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\end{bmatrix}_{1x3}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\\-2 & -14 & 0\\5 & 35 & 0\end{bmatrix}_{3x3}$$

05. Obter a matriz inversa da matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\11 & 3\end{pmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\11 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}4a+c=1 & .(-3)\\11a+3c=0\end{cases}\qquad\begin{cases}4b+d=0 & .(-3)\\11b+3d=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-12a-3c=-3\\11a+3c=0\end{cases}\qquad\begin{cases}-12b-d=0\\11b+3d=1\end{cases}$$

$$-a=-3\qquad -b=1$$

$$\boxed{a=3}\qquad\boxed{b=-1}$$

$$11.3+3c=0\qquad 4.(-1)+d=0$$

$$\boxed{c=-11}\qquad\boxed{d=4}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\-11 & 4\end{bmatrix}$$

06. Verifique se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é inversa da matriz B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \,.\, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ A é inversa de B, pois A . B = I

07. Seja $A = (a_{ij})_{2x2}$ com $a_{ij} = 2j - i^2$. Determinar a matriz inversa da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} \overset{a_{11}}{1} & \overset{a_{12}}{3} \\ \overset{a_{21}}{-2} & \overset{a_{22}}{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ -2a = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{3}}$$

$$b + 3d = 0 \qquad -\frac{1}{2} + 3d = 0$$

$$-2b = 1 \qquad 3d = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{2}} \qquad \boxed{d = \frac{1}{6}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Vamos falar um pouquinho (pois, o tempo é curtíssimo!), **dos Determinantes.**

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo **n x n**).
A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de ***determinante*.**

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M=[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

- $M = [5] \Rightarrow \det M = 5$ ou $|5| = 5$
- $M = [-3] \Rightarrow \det M = -3$ ou $|-3| = -3$

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$$Sendo\ M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, temos:$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2 \cdot 5} - \underbrace{4 \cdot 3} = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Podemos dizer que determinante de uma matriz quadrada é o seu valor numérico.

Os elementos de uma matriz podem ser colocados entre parênteses, colchetes ou entre duas barras duplas; e os elementos dos determinantes são colocados entre duas barras.

Matriz de ordem 1

Quando uma matriz possui apenas um elemento ou possui apenas uma linha e uma coluna, dizemos que essa matriz é de ordem 1. Veja alguns exemplos:

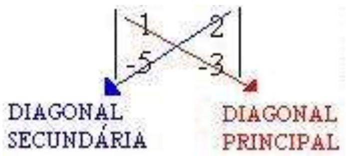
Se A = [10], então o seu determinante será representado assim: det A = |10| = 10

Se B = (-25), então o seu determinante será representado assim: det B = |-25| = -25
Assim, podemos concluir que o determinante de ordem 1 terá o seu valor numérico sempre igual ao seu elemento..

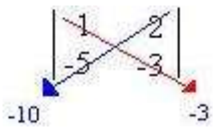
Matriz de ordem 2

Dada a matriz A de ordem dois A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$, o seu determinante será calculado da seguinte forma:

O determinante de ordem dois possui uma diagonal principal e uma diagonal secundária.



O cálculo do seu valor numérico é feito pela diferença do produto da diagonal principal com o produto da diagonal secundária.

det A = 

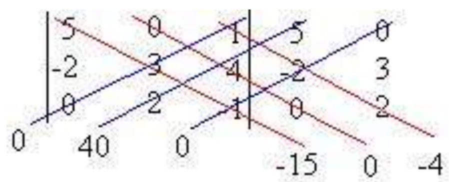
= - 3 – (- 10) = - 3 + 10 = 7

Matriz de ordem 3

Dada a matriz de ordem 3, B = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ o valor numérico do seu determinante é calculado da seguinte forma:
Primeiro representamos essa matriz em forma de determinante e repetimos as duas primeiras colunas.

det B = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}$

Depois calculamos os produtos das diagonais principais e os produtos das diagonais secundárias.

det B = 

Deve-se pegar o oposto dos produtos das diagonais secundárias e somar com os produtos das diagonais principais.
Det B = 0 – 40 + 0 – 15 + 0 – 4 = -59

Essa regra utilizada no cálculo do determinante de matriz de ordem 3 é chamada *de Regra de Sarrus.*

Agora, faremos exercícios para cálculo de determinantes:

01 — Calcule o determinante da matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: Como é de 2ª ordem, det A = – 1 . 1 – (– 1) . (1/2) =

det A = – 1 + 1/2 = – 1/2.

02 — Obtenha o menor complementar do elemento a_{23} da matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -8 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Resposta: M_{23} = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ = 1 . (– 1) – 1 . (– 1) = – 1 + 1 = 0.

03 — Encontre o valor de "x" para que o determinante da matriz abaixo seja 5.

M = $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$

Resposta: det M = x . x – 2 . 2 = x^2 – 4. Como se deseja o que determinante seja 5, tem-se: $x^2 - 4 = 5$ ou $x^2 - 4 - 5 = 0$ ou $x^2 - 9 = 0$
Logo, se x = – 3 ou x = 3, o determinante de M será 5.

04 — Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Resposta: $x \cdot 1 - x^2 \cdot 4 = 0$
$x - 4x^2 = 0$
$x \cdot (1 - 4x) = 0$
$x = 0$ ou $1 - 4x = 0$
$1 = 4x$
$x = 1/4$
Logo: $S = \{ x \in \mathbb{R} ; x = 0 \text{ ou } x = 1/4 \}$

05 — Resolva a equação $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & -2 & x \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$

Utilizando a regra de Sarrus tem-se: $\begin{matrix} 3 & 2 & x & 3 & 2 \\ 1 & -2 & x & 1 & -2 \\ 2 & -1 & x & 2 & -1 \end{matrix}$

Resolução: = – 6x + 4x – x – (– 4x – 3x + 2x) = – 6x + 4x – x + 4x + 3x – 2x =
= 4x + 4x + 3x – 6x – x – 2x = 11x – 9x = 2x.
= 2x = 8, e daí, x = 4. Logo: S = { 4 }.

06 — Determine o valor de "x" para que exista a inversa da matriz A dada abaixo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ -2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Resposta: Utilizando a regra de Sarrus tem-se: $\begin{matrix} 3 & -3 & 2 & 3 & -3 \\ x & -1 & 0 & x & -1 \\ -2 & 1 & x & -2 & 1 \end{matrix}$

$= -3x - 0 + 2x - 4 - 0 + 3x^2 = 3x^2 - x - 4$
Para existir a inversa o determinante tem que ser diferente de zero, logo:
$3x^2 - x - 4 \neq 0$
Encontrando as raízes tem-se: $3x^2 - x - 4 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 1 + 48 = 49$

Logo, as raizes são: x' = (1 + 7) / 6 = 8/6 = 4/3 e x" = (1 – 7) / 6 = – 6/6 = – 1.
$S = \{ x \in \mathbb{R} ;\ x \neq 4/3 \ \text{ e } \ x \neq -1 \}$

07 — Calcule o determinante utilizando o teorema de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Resposta: Escolhendo a 1ª coluna, pois não precisa fazer as que tem zero, fica apenas:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Cabe ressaltar que os conteúdos das unidades 29 e 30 são extensos, e não é nada didático, fazermos um único Plano de Ação.

Resumirei para a turma o conteúdo da unidade 30 (Sistemas Lineares), a seguir, faremos alguns exercícios para facilitar o aprendizado.

Sistemas Lineares

Definição

É todo sistema que pode ser definido em que se têm “m” equações a “n” incógnitas do tipo a seguir:

$$
S: \quad
\begin{array}{l}
A_{11} + A_{12}X_2 \; \ldots\ldots + A_{1n}X_n = b1 \\
A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \; \ldots\ldots + A_2nXn = b2 \\
A_{31}X_1 + A_{32}X_2 \; \ldots\ldots + A_3nXn = b3 \\
\;. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\
\;. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\
\;. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\
A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 \; \ldots\ldots + AmnXn = bm
\end{array}
$$

Exemplos de fixação de definição

1) O sistema S1, informado abaixo, é um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis de primeiro grau.

$$
S1 = \quad
\begin{array}{r}
2x + 4y - z = 4 \\
-2x + 3y + 4z = 7 \\
x + y + 5z = 9
\end{array}
$$

2) O sistema S2, informado abaixo, é considerado um sistema linear com 04 equações e 3 variáveis.

$$
S2 = \quad
\begin{array}{r}
5x + 4y + z = 5 \\
-3x + 7y + 3y = 6 \\
x + y + 4z = 8 \\
4x + 2y - 5z = 15
\end{array}
$$

3) O sistema S3, informado abaixo, é considerado um sistema linear homogêneo com 3 equações e variáveis.

S3 = $2x + 5y - z = 0$

$-3x + 2y + 2z = 0$

$x + y + 5z = 0$

Este sistema é considerado homogêneo porque todos os termos do sistema são nulos ou igual 0.

Soluções de um Sistema Linear

Podemos dizer que um sistema de equações lineares com "n" incógnitas, que podem ser colocadas como X1, X2, X3, X4...., admite como sua solução uma seqüência em ordem definida como r1, r2, r3, r4, se e somente nesta condição, substituindo X1 = r1, X2 = r2, X3 = r3, X4, r4, Xn = rn, e em todas as equações do sistema informado, elas se tornarem todas verdadeiras.

Exemplos de fixação de definição

Observe o sistema:

$x + y = 12$

$x - y = 4$

Temos aqui uma solução igual a (8, 4), pois se substituindo x = 8 e y = 4 em cada equação dada do sistema temos o cálculo:

(8) + (4) = 12 (afirmação verdadeira)

(8) – (4) = 4 (afirmação verdadeira)

Observe o sistema abaixo:

$x + y = 16$

$x - y = 2$

Temos aqui uma solução igual a (7, 9), pois se substituindo x = 9 e y = 9 em cada equação dada do sistema temos o cálculo:

(7) + (9) = 16 (afirmação verdadeira)

(7) – (9) = 2 (afirmação verdadeira)

Um outro exemplo de solução:

x + y = 42

x – y = 8

Temos aqui uma solução igual a (25, 17), pois se substituindo x = 25 e y = 17 em cada equação dada do sistema temos o cálculo:

(25) + (17) = 42 (afirmação verdadeira)

(25) – (17) = 8   (afirmação verdadeira)

Um sistema linear pode ter mais de uma solução ou mesmo pode não possuir nenhuma solução.

Tipos de sistema linear

Conforme as soluções os sistemas lineares podem ser definidos como:

- Uma única solução: Pode ser chamado de sistema linear determinado.

- Várias soluções: Pode ser chamado de sistema linear indeterminado.

Obs. Se ao buscar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo:

3 = 3 ou 0 = 0

Ou qualquer outra expressão que tenha uma sentença que seja sempre verdadeira, o sistema terá infinitas soluções e poderemos chamá-lo de **possível, mas indeterminado**.

- Não tem solução: Pode ser chamado de sistema linear impossível

Obs. Se ao buscar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo:

0 = 3 ou 2 = 5

Ou qualquer outra expressão que tenha uma sentença que seja sempre falsa, o sistema não terá qualquer solução e poderemos chamá-lo de **impossível**.

O conjunto solução de um sistema chamado de impossível é vazio.

Sistema possível e determinado (SPD) é todo sistema linear que admite uma única solução. Exemplo: $x + y = 5$

$y = 2$

Esse sistema linear admite uma única solução, que é o par ordenado (3,2). Por isso, é classificado como SPD.

Sistema possível e indeterminado (SPI) é todo sistema linear que admite mais de uma solução. Exemplo: $2x + y = 5$

$4x + 2y = 10$

Esse sistema linear admite mais de uma solução: (2,1), (4,-3), (0,5) etc. Por isso , é classificado como SPI.

Sistema impossível (SI) é todo sistema linear que não admite solução alguma. Exemplo: $x + y = 5$

$x + y = 8$

Esse sistema é impossível (SI), pois não existem dois números x e y cuja soma seja igual a 8 e também igual a 5.

Propriedades de um Sistema Linear

1) Um sistema linear chamado de homogêneo tem sempre pelo menos uma solução, pois :

X1 = 0

X2 = 0

X3 = 0, Xn = 0

Sempre terá todas as sentenças do sistema verdadeiras.

A solução (0,0,0,0....) é chamada de solução trivial.

2) Um sistema com n equações e n variáveis terá uma solução única (chamado de sistema determinado) se, e somente na condição de, que o determinante formado pelos coeficientes do sistema for diferente de zero ($\neq 0$).

Operações elementares com sistema linear

Existem 03 tipos de operações que podemos chamar de "elementares" e que podem ser feitas no cálculo de um sistema linear de equações, de forma que transforme este sistema em outro equivalente, porém mais simples.

Observe abaixo um exemplo de como trabalhar com estas operações elementares sobre linhas. O sistema que está à direta na tabela já é o resultado da ação de cálculo da operação elementar.

1. Troca de posição de duas equações do sistema

Troca a Linha 1 com a Linha 3	
$x + 2y - z = 8$	$4x + y - 5z = 7$
$2x - 3y + 2z=5$	$2x - 3y + 2z=5$
$4x + y - 5z = 7$	$x + 2y - z = 8$

2. Multiplicação de uma equação por um número não nulo

Multiplica a Linha 1 pelo número 3	
$x + 2y - z = 8$	$3x + 6y - 3z = 24$
$2x - 3y + 2z=5$	$2x - 3y + 2z=5$
$4x + y - 5z=7$	$4x + y - 5z=7$
A equação resultante fica na linha 1	

3. Adição de duas equações do sistema

Adição da Linha 2 com a Linha 3	
$x + 2y - z=8$	$3x + 6y - 3z=24$
$2x -3y + 2z = 5$	$2x - 3y + 2z=5$
$4x + y - 5z = 7$	$6x - 2y - 3z = 12$
A equação resultante fica na linha 3	

A seguir, faremos algumas resoluções de sistemas lineares por escalonamento do 1º tipo:

01. Resolva os sistemas escalonados abaixo:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \quad\quad 5z = 10 \end{cases}$

$5z = 10$

$\boxed{z = 2}$

$y + 2z = 3$

$y + 2.2 = 3$

$\boxed{y = -1}$

$2x + y - z = 7$

$2.x + (-1) - 2 = 7$

$2x = 7 + 3$

$2x = 10$

$\boxed{x = 5}$

$S = \{(5;-1;2)\}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z - w = 1 \\ \quad y + z + w = 4 \\ \quad\quad 2z - w = 0 \\ \quad\quad\quad -w = 4 \end{cases}$

$-w = 4$

$\boxed{w = -4}$

$2z - w = 0$

$2z - (-4) = 0$

$2z + 4 = 0$

$\boxed{z = -2}$

$y + z + w = 4$

$y + (-2) + (-4) = 4$

$\boxed{y = 10}$

$x - y + 2z - w = 1$

$x - 10 - 4 + 4 = 1$

$x = 1 + 10$

$\boxed{x = 11}$

$S = \{(11;10;-2;-4)\}$

02. Resolva os sistemas abaixo por escalonamento:

a) $\begin{cases} x+y-2z=-1 \;\; .(-2)\;\; .(-1) \\ 2x+y+z=0 \\ x+4y-6z=4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x-2y+4z=2 \\ 2x+\;y\;+z\;=0 \\ \hline -y+5z=2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x-y+2z=1 \\ x+4y-6z=4 \\ \hline 3y-4z=5 \end{array} \qquad \begin{cases} -y+5z=2.(3) \\ 3y-4z=5 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -3y+15z=6 \\ 3y-4z=5 \\ \hline 11z=11 \\ \boxed{z=1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3y-4z=5 \\ 3y-4.1=5 \\ 3y=9 \\ \boxed{y=3} \end{array}$$

$x+y-2z=-1$

$x+3-2=-1$

$x+1=-1$

$\boxed{x=-2}$ $\qquad\qquad S=\{(-2;3;1)\}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2 \;\; .(2) \\ x+3y=2 \\ 3x+2y-2z=-5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 2x+2y+2z=4 \\ 3x+2y-2z=-5 \\ \hline 5x+4y=-1 \end{array} \qquad \begin{cases} x+3y=2 \;\; .(-5) \\ 5x+4y=-1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -5x-15y=-10 \\ 5x+4y=-1 \\ \hline -11y=-11 \\ \boxed{y=1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+3y=2 \\ x+3=2 \\ \boxed{x=-1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ z+1+(-1)=2 \\ \boxed{z=2} \end{array} \qquad S=\{(-1,1,2)\}$$

c) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \;\; .(-2)\;\; .(-3) \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x+4y-6z=-2 \\ 2x+\;y-z=\;0 \\ \hline 5y-7z=-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3x+6y-9z=-3 \\ 3x-\;y\;+2z=4 \\ \hline 5y-7z=1 \end{array} \qquad \begin{cases} 5y-7z=-2 \;\; .(-1) \\ 5y-7z=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -5y+7z=2 \\ 5y-7z=1 \\ \hline 0=3 \end{array} \text{ (impossível)}$$

$S=\varnothing$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \;\; .(-2)\;\; .(-5) \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+8y+5z=8 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x-4y-6z=-8 \\ 2x+3y+z=2 \\ \hline -y-5z=-6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5x-10y-15z=-20 \\ 5x+8y+5z=8 \\ \hline -2y-10z=-12 \end{array} \qquad \begin{cases} -y-5z=-6 \;\; .(-2) \\ -2y-10z=-12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2y+10z=12 \\ -2y-10z=-12 \end{cases} \\ \hline 0=0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -y-5z=-6 \;\; .(-1) \\ y+5z=6 \\ \boxed{y=6-5z} \end{array}$$

$x+2y+3z=4$

$x+2.(6-5z)+3z=4$

$x+12-10z+3z=4$ $\qquad\qquad S=\{(7z-8;\ 6-5z;\ z)\,/\,z\in$

$x=10z-3z+4-12$

$\boxed{x=7z-8}$

03. O valor de x no sistema $\begin{cases} 2x+2y-2z=6 & \div(-2) \\ x-y+3z=3 & \\ -y+z=2 & \end{cases}$ é: ↵

a) 4
b) 8
c) -1
d) 0
e) nda

$$\begin{array}{l} -x-y+z=-3 \\ \underline{x-y+3z=3} \\ -2y+4z=0 \quad \div(-2) \\ y-2z=0 \\ \underline{-y+z=2} \\ -z=2 \\ \boxed{z=-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -y+z=2 \\ -y-2=2 \\ -y=4 \\ \boxed{y=-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-y+3z=3 \\ x+4-6=3 \\ x-2=3 \\ \boxed{x=5} \end{array}$$

Existem apenas dois tipos de sistema linear escalonado:

. 1º tipo: com o número de equações igual ao número de incógnitas;

. 2º tipo: com o número de equações menor que o número de incógnitas;

Achei conveniente, não aplicar nenhum exercício de sistema linear escalonado do 2º tipo, por apresentar maior grau de dificuldade, o que poderia dificultar ainda mais o andamento da matéria.

Resolução de Sistema Linear por Determinantes

Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, temos:

$D \neq 0 \leftrightarrow$ SPD

$D = 0 \leftrightarrow$ SPI ou SI

A regra de Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

Portanto, ao resolvermos um sistema linear de n equações e n incógnitas para a sua resolução devemos calcular o determinante (D) da equação incompleta do sistema e depois substituirmos os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes e assim aplicar a regra de Cramer que diz:
Os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D2}{D}$$

$$x_3 = \frac{D3}{D} \quad \ldots \quad x_n = \frac{Dn}{D}$$

Veja no exemplo abaixo de como aplicar essa regra de Cramer:

Dado o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$, para resolvê-lo podemos utilizar da regra de Cramer, pois ele possui 3 equações e 3 incógnitas, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Devemos encontrar a matriz incompleta desse sistema linear que será chamada de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante que será representado por D.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

D = 1 + 6 + 2 + 3 – 1 + 4

D = 15.

Agora devemos substituir os temos independentes na primeira coluna da matriz A, formando assim uma segunda matriz que será representada por Ax.

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calcularmos o seu determinante representado por Dx.

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Dx = 8 + 4 + 3 + 2 – 8 + 6

Dx = 15

Substituímos os termos independentes na segunda coluna da matriz incompleta formando a matriz Ay.

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calcularmos o seu determinante Dy.

$$Dy = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Dy = -3 + 24 +4 – 9 – 2 + 16
Dy = 30

Substituindo os termos independentes do sistema na terceira coluna da matriz incompleta formaremos a matriz Az.

$$Az = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante representado por Dz.

$$Dz = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

Depois de ter substituído todas as colunas da matriz incompleta pelos termos independentes, iremos colocar em prática a regra de Cramer.

A incógnita $x = \frac{Dx}{D} = \frac{15}{15} = 1$

A incógnita $y = \frac{Dy}{D} = \frac{30}{15} = 2$

A incógnita $z = \frac{Dz}{D} = \frac{45}{15} = 3$

Portanto, o conjunto verdade desse sistema será V = {(1,2,3)}.

Neste momento faremos mais exercícios:

01. Resolver o sistema abaixo pela Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Resposta: (2,3)

02. Resolver o sistema abaixo pela Regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Resposta: (1,2,3)

03. O sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$

a) é impossível;
b) é possível e determinado;
c) é possível e indeterminado;
d) admite apenas a solução (1; 2; 3);
e) admite a solução (2; 0; 0)

Resposta: letra c

04. (UEL) O sistema abaixo, de incógnitas **x** e **y**, é:

$$\begin{cases} 6x + ky = 9 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$$

a) impossível, para todo **k** real diferente de -21;
b) possível e indeterminado, para todo **k** real diferente de -63;
c) possível e determinado, para todo **k** real diferente de -21;
d) possível e indeterminado, para todo **k** real diferente de -3;
e) possível e determinado, para todo **k** real diferente de -1 e -63.

Resposta: letra c

CONCLUSÃO

Até o presente momento, minha conclusão permanece inalterada: não teremos tempo suficiente para aplicação das dez unidades em apenas um semestre, situação agravada, principalmente, por conta da programação da Copa do Mundo, que alterou todo calendário escolar. É notório que o Módulo 3, com exceção das unidades 22 a 25, apresenta conteúdos prioritários, que de maneira algum poderiam ser aplicados em apenas 2 Planos de Ação, onde o primeiro abrangeria as unidades 26, 27 e 28 e o segundo, as unidades 29 e 30. Esta triste situação, é a realidade que nossos alunos do NEJA, enfrentarão neste bimestre. Será que o Governo sabe o que é Educação, parece que só sabem "o que é enrolação!". Em tantos anos de magistério, nunca pensei enfrentar tanto descaso e desrespeito.

Espero que os alunos consigam realizar, por ordem de aplicação, as atividades contidas neste Plano e do meu livro Didático, pois não utilizarei nenhum exercício do material NEJA neste bimestre. Estas atividades serão ministradas de forma tradicional e resumida, individualmente ou em grupos de até 4 alunos, pois o trabalho em conjunto proporciona aos alunos:

- ✓ ***ouvir***, discutir e refletir sobre a opinião dos colegas;
- ✓ ***respeitar*** as diferenças individuais quanto ao tempo de compreensão e assimilação dos conteúdos;
- ✓ ***socializar*** diferentes pontos de vista e resoluções diversas para um mesmo problema;
- ✓ ***promover*** situações de ajuda e de ensino-aprendizagem entre os colegas;
- ✓ ***dividir*** tarefas e responsabilidades;
- ✓ ***maior*** integração social.

Mais uma vez, não serão utilizados laboratórios de informática, filmes, Datashow pois, é muito difícil a utilização destas técnicas numa escola compartilhada com uma do Município e com um cronograma surreal que dificulta a aplicação de atividades extras (Manual do Professor).

Novamente afirmo que: o conteúdo é muito extenso, os alunos são muito fracos e o tempo é muito curto, nem mágica fará com que consigamos cumprir o cronograma. Não estou preocupada em cumprir o cronograma, meu objetivo é fazer com que os alunos consigam construir algum conhecimento, estimulados por condições exteriores criadas por mim, pois não tem sentido jogarmos todo o conteúdo de cada unidade em cima dos alunos, se eles não terão condição de construir nenhum conhecimento.

Relação por ordem de aplicação, das atividades deste **Plano de Ação** que serão ministradas em sala de aula:

01. (UNIFORM) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz A . B é:

a) 64 b) 8 c) 0 d) 4 e) -64

02. Para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{bmatrix}$ seja nulo, o valor de a deve ser:

a) 2 ou -2 b) 1 ou 3 c) -3 ou 5 d) -5 ou 3 e) 4 ou -4

03. O produto M . N na matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = (111)$:

a) não se define;
b) é uma matriz de determinante nulo;
c) é a matriz identidade de ordem 3;
d) é uma matriz de uma linha e uma coluna;
e) não é matriz quadrada.

04. Sabendo-se que o determinante associado à matriz $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ é nulo, concluímos que essa matriz tem:

a) duas linhas proporcionais;
b) duas colunas proporcionais;
c) elementos negativos;
d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas;
e) duas filas paralelas iguais.

05. (UESP) Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & 2 & 2 \\ p & 4 & 4 \\ p & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a -18, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ p & -2 & 4 \\ p & -2 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) -9 b) -6 c) 3 d) 6 e) 9

06. (UESP) Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a 10, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

é igual a:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

07) Calcule o valor do $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, utilizando a regra de Sarrus.

08) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Calcule o determinante, usando a Regra de Sarrus, de cada uma das matrizes a seguir:

a) A b) B c) A + B d) A.B

09) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Calcule o determinante, usando a Regra de Sarrus:

a) A^t b) B^t c) $(A - B)^t$

10) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 1 \\ 1 & x+3 & 4 \\ 3 & x+1 & 5 \end{vmatrix} = 56.$

Relação por ordem de aplicação, das atividades do livro Didático descrito na bibliografia:

I. Exercícios de Matrizes: R1, R2, R3 – pág. 118
II. Exercícios de Matrizes: 12 e 13 – pág. 119
III. Exercícios de Determinantes e Sistemas Lineares: R1, 1 e 4 - pág. 144
IV. Exercícios de Determinantes e Sistemas Lineares: R1, R2, R3 e R5 – pág. 146
V. Exercícios de Sistemas Lineares: 9 - pág. 136
VI. Exercícios de Sistemas Lineares: 2 (letras a e b) e 6 – pág. 137
VII. Exercícios de Sistemas Lineares: R1, 1, 2, e 4 – pág. 144

Ao término destas unidades, os alunos deverão:

- Compreender e usar a linguagem matricial;
- Reconhecer matrizes especiais, como a matriz nula, as matrizes quadradas, etc;
- Operar com matrizes a adição, subtração e multiplicação;
- Identificar equações lineares, bem como, suas soluções;
- Reconhecer a regra prática para cálculo do determinantes de uma matriz quadrada de ordem 2 no contexto da discussão de um sistema linear 2 x 2, por meio de seus coeficientes;
- Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e de ordem 3;
- Discutir um sistema linear (quadrado) de até três equações e três incógnitas;

MATERIAL DE APOIO

Utilizarei apenas o Material de Apoio Livro Didático descrito na bibliografia. Não serão utilizadas nenhuma atividade dos materiais do NEJA, para a aplicação das unidades 29 e 30, não só pelo cronograma apertado, mas também pela má qualidade dos conteúdos destas unidades.

VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO

A verificação da aprendizagem significativa e bimestral de conteúdos relevantes, será feita em três etapas: A 1ª etapa englobará o somatório de todas as atividades realizadas em sala de aula, a 2ª será a participação no Saerjinho (se houver para o Módulo 3) e a terceira etapa será uma prova objetiva e individual a ser aplicada ao final do bimestre. A média do bimestre será o somatório de todos os pontos adquiridos nos trabalhos + participação no Saerjinho + nota da prova objetiva.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

Matemática Paiva – volume 2   -   1ª Edição
Autores: Gelson Iezzi/Osvaldo Dolce/David Degenszajn/Roberto Périgo/
Nilze de Almeida
Editora Moderna   -   São Paulo / 2009