

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

COLÉGIO: Ciep 244 – Oswaldo Aranha

PROFESSORA: Angela Saida Alvarez Jacob.

GRUPO 1

MATRÍCULA: 0918165-2

TURMA: 1º ano.

TUTOR: Rodolfo Gregório de Moraes.

**Plano de Trabalho Refeito sobre Razões Trigonométricas no**  
**Triângulo Retângulo**

Angela Saida Alvarez Jacob.

angelajacob@ig.com.br

## **1-Introdução:**

*O conteúdo Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo faz parte do Campo Geométrico e deve ser trabalhado no 1º ano do ensino médio. Através das atividades propostas, espero atingir a dedução das fórmulas e a sua compreensão, bem como através dos exemplos citados e dos exercícios de fixação.*

Sendo assim, a sua compreensão a partir das atividades propostas favorece o aprofundamento do conhecimento e a fixação das habilidades para além do ato de decorar as fórmulas. E isto se reflete na possibilidade de aplicação deste conhecimento no cotidiano dos alunos.

Enfim, as habilidades e competências a serem desenvolvidas por este trabalho no estudo sobre Função polinomial do 2º grau, que constam no CURRÍCULO MÍNIMO (p.15) são:

- Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, co-seno e tangente, dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$
- Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.
- Utilizar os teoremas do seno e do co-seno para resolver problemas significativos.

Para tanto, a princípio, é necessário que o aluno tenha os seguintes pré-requisitos:

- Identificar os lados de um triângulo retângulo; saber utilizar o transferidor e régua para efetuar medições; efetuar cálculos com números reais; reconhecer triângulos semelhantes, saber aplicar o Teorema de Pitágoras.
- Reconhecer e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo; resolver sistema de equações do 1º grau.

## **2-Desenvolvimento:**

### **Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:**

O presente trabalho foi desenvolvido para 8 horas-aula, assim distribuído:

- Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, co-seno e tangente, dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$

- 2 horas-aula.

- Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.

- 2 horas-aula.

- Utilizar os teoremas do seno e do co-seno para resolver problemas significativos.

- 2 horas-aula.

- Avaliação. – 2 horas – aula.

E o seu desenvolvimento contempla as seguintes atividades:

### **Atividade 1:**

#### **• Habilidades relacionadas:**

- Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, co-seno e tangente, dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$

#### **• Pré-requisitos:**

- Identificar os lados de um triângulo retângulo; saber utilizar o transferidor e régua para efetuar medições; efetuar cálculos com números reais; reconhecer triângulos semelhantes, saber aplicar o Teorema de Pitágoras.

• **Tempo de Duração:**

2 horas-aula

• **Recursos Educacionais Utilizados:**

- Folha de atividades com problemas, régua de 30 cm, caneta e calculadora simples.

• **Organização da turma:**

- Turma organizada em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

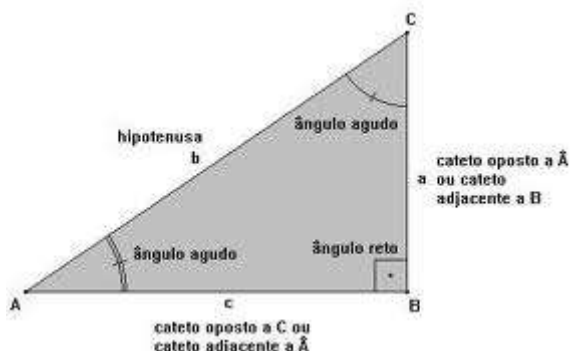
• **Objetivo:**

- Relembrar os conceitos de semelhança de triângulos. Compreender o conceito de razões trigonométricas nos triângulos retângulos e as suas principais propriedades. Perceber que os valores das razões trigonométricas dependem exclusivamente do ângulo.

• **Metodologia adotada:**

**Abordagem teórica:**

Através de uma rápida abordagem, serão revistos o triângulo retângulo e seus lados e as fórmulas de seno, cosseno e tangente, conforme figuras abaixo:

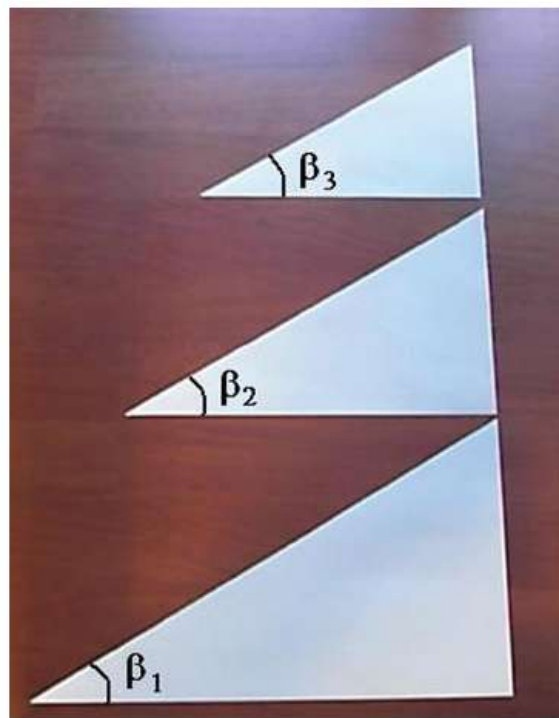


$$\begin{aligned} \text{Seno} &= \frac{\text{cateto\_oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{Cosseno} &= \frac{\text{cateto\_adjacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{Tangente} &= \frac{\text{cateto\_oposto}}{\text{cateto\_adjacente}} \end{aligned}$$

Fonte:

<<https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt->

Cada dupla receberá três triângulos retângulos semelhantes tais como a figura abaixo. A partir da sua observação e da medição dos valores dos seus lados e da aplicação das fórmulas do seno, cosseno e tangente, espera-se atingir os objetivos propostos. Os alunos deverão preencher uma tabela para cada triângulo.



#### TABELA

Medida do cateto oposto ao ângulo  $\beta$  (cm) =

Medida do cateto adjacente ao ângulo  $\beta$  (cm) =

Medida da hipotenusa (cm)

**Seno de  $\beta = \text{sen } (\beta) = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{Medida da hipotenusa}}$**

**Medida da hipotenusa**

**Coseno de  $\beta = \text{cos } (\beta) = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}{\text{Medida da hipotenusa}}$**

**Medida da hipotenusa**

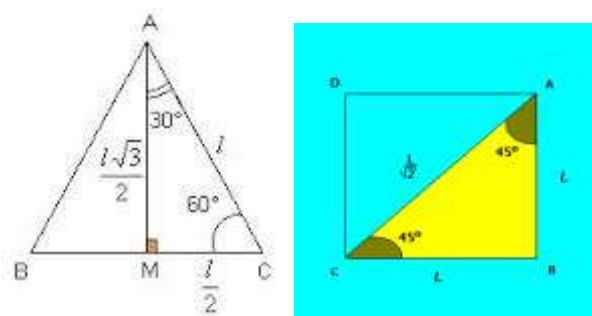
**Tangente de  $\beta = \text{Tg } (\beta) = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}$**

**medida do cateto adjacente ao ângulo**

Fonte: < <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>

Através desta atividade, os alunos serão orientados a perceberem a semelhança entre os triângulos e a fazerem aproximações com as medidas encontradas.

A partir de triângulos eqüiláteros e de quadrados entregues aos grupos, os alunos serão incentivados a deduzir os valores de sen, cos e tg dos ângulos notáveis.

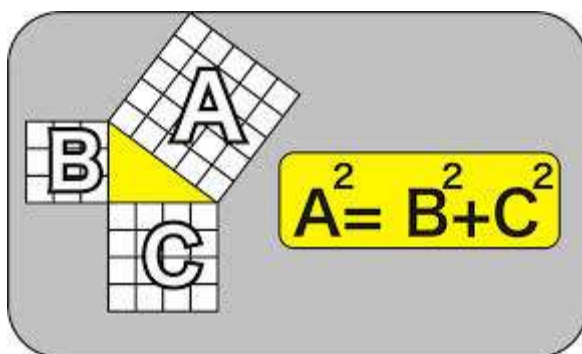


	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte:

<[https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U\\_n\\_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620](https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U_n_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620)>

E, por fim, será lembrado o teorema de Pitágoras.

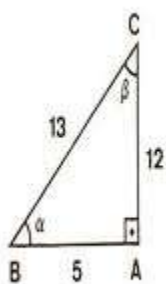


Fonte:

<[https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U\\_n\\_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620](https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U_n_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620)>

### **Abordagem prática:**

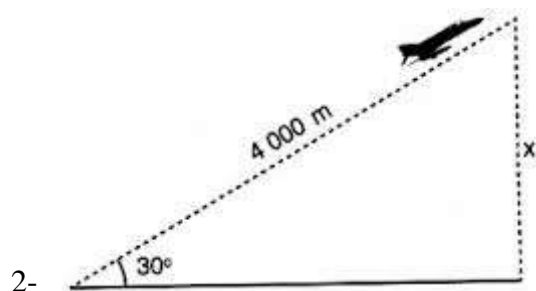
As duplas farão atividades tais como os exemplos abaixo:



a)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$       d)  $\sin \beta = \frac{5}{13}$

b)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$       e)  $\cos \beta = \frac{12}{13}$

c)  $\tan \alpha = \frac{12}{5}$       f)  $\tan \beta = \frac{5}{12}$



### Descritores:

H05 – Identificar figuras semelhantes, mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

H35 - Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

### Exercício de aprofundamento, para casa:

Será entregue uma folha de atividades, com problemas a serem resolvidos.



## **Atividade 2:**

- **Habilidade relacionada:**

- Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.

- **Pré-requisitos:**

- Reconhecer e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo; resolver sistema de equações do 1º grau.

- **Tempo de Duração:**

2 horas-aula

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

- Folha de atividades, papel, caneta e calculadora simples, Tabela Trigonométrica.

- **Organização da turma:**

- Turma organizada em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

- **Objetivos:**

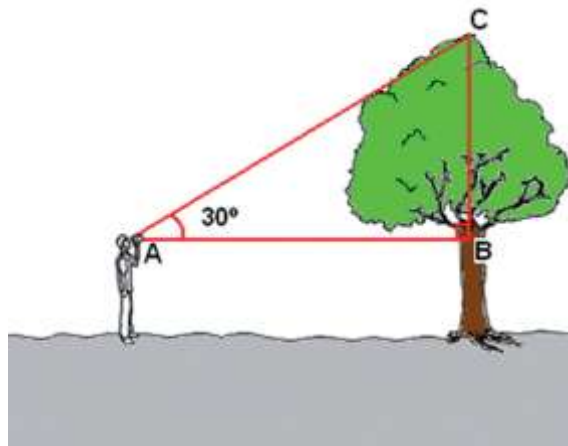
- Aplicar os conceitos sobre as razões trigonométricas em problemas do cotidiano.

- **Metodologia adotada:**

### **Abordagem teórica:**

Será proposta a seguinte questão:

Observe a Figura abaixo e perceba que podemos considerar o triângulo retângulo indicado na figura, pois é razoável considerar que a árvore faz um ângulo reto com o plano horizontal.

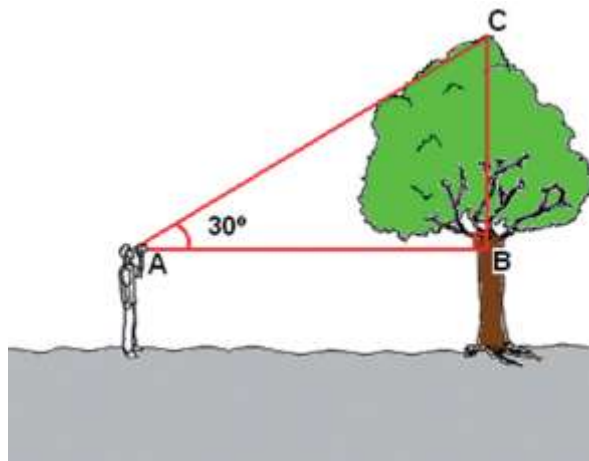


Nela, temos indicado o ângulo de  $30^\circ$ . Esse ângulo pode ser obtido com o auxílio de um teodolito.

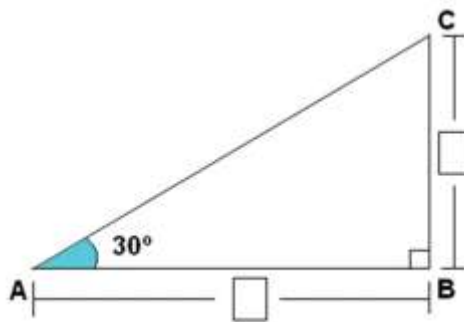
Responda:

- Conhecendo a medida de AB, você acha que é possível determinar a altura da árvore? Como? Discuta com seus colegas e registre.
- Você acha que a razão trigonométrica  $\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$  pode ser útil na determinação dessa altura? Como? Discuta com seus colegas e registre.

Suponha que uma pessoa com 1,80 m de altura, localizada a 10 m do tronco de uma árvore, consiga observar o topo desta árvore sob um ângulo de elevação de  $30^\circ$ , como mostra a figura 3.



- Com estes dados, complete os retângulos vazios da figura abaixo, colocando x no local da medida desconhecida.



- d) Considerando o triângulo ABC, qual razão trigonométrica do ângulo de  $30^\circ$  é definida pela fração  $10/x$ ?
- e) Consulte a Tabela Trigonométrica e indique o valor aproximado da razão trigonométrica obtida no item anterior.
- f) Determine o valor de  $x$ , igualando a fração  $10/x$  ao valor obtido na Tabela Trigonométrica.
- g) O valor encontrado representa a medida aproximada da altura da árvore? Por quê? Discuta com seus colegas.
- h) Qual é o valor aproximado desta altura?

Fonte: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>.

### **Abordagem prática:**

Serão propostas as questões abaixo:

#### **• Questão 1**

(Cefet – PR)

A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de  $30^\circ$ . O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?

#### **• Questão 2**

(Unisinos – RS)

Um avião levanta voo sob um ângulo constante de  $20^\circ$ . Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize:  $\sin 20^\circ = 0,342$ ;  $\cos 20^\circ = 0,94$  e  $\tan 20^\circ = 0,364$ )

### • Questão 3

(UF – PI)

Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de  $30^\circ$  (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

### • Questão 4

De um ponto A, um agrimensor enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de  $45^\circ$ . Ao se aproximar 50 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de  $60^\circ$ . Determine a altura do morro.

Fonte: <<http://exercicios.brasile scola.com/matematica/exercicios-sobre-trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm>>

### Descritores:

H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).

### Exercício de aprofundamento, para casa:

Será entregue uma folha de atividades, com problemas a serem resolvidos.

### **Atividade 3:**

- **Habilidade relacionada**

- Utilizar os teoremas do seno e do co-seno para resolver problemas significativos.

- **Pré-requisitos:**

- Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, cálculos com números reais.

- **Tempo de Duração:**

2 horas-aula

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

- Folha de atividades com problemas, folha de atividade, calculadora científica

- **Organização da turma:**

- Turma organizada em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

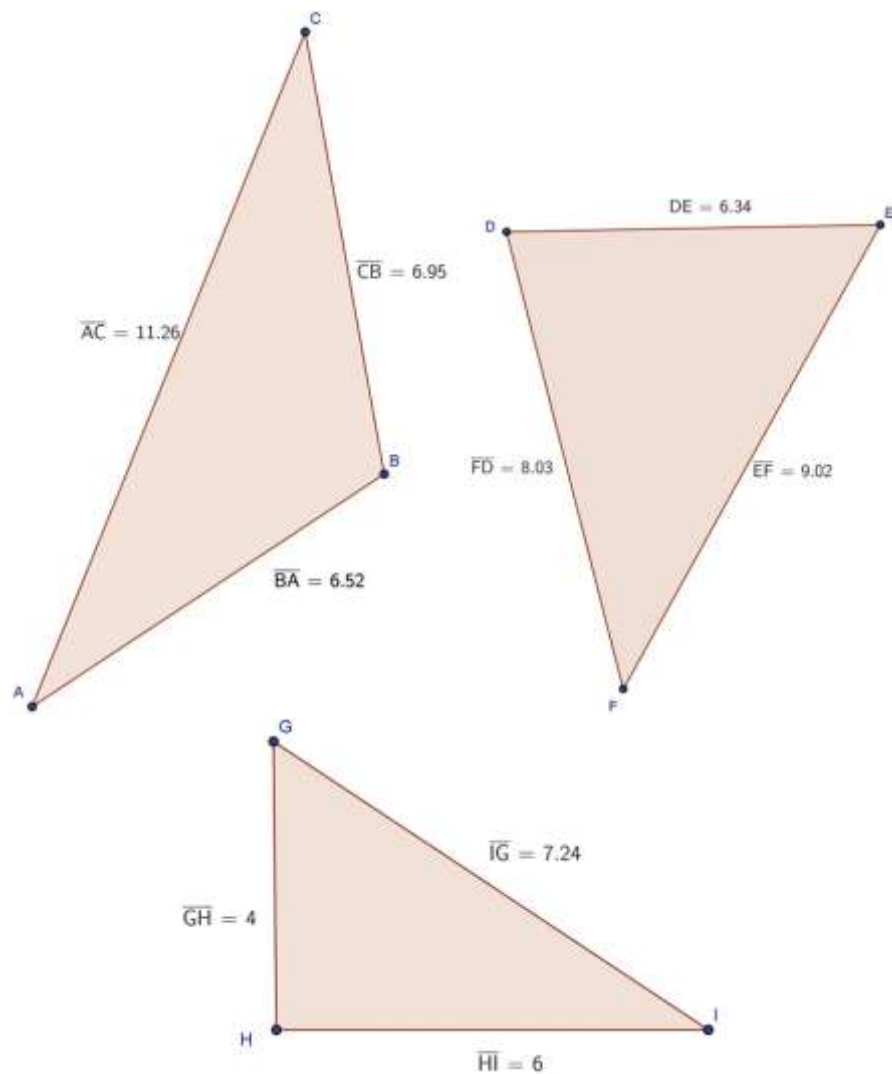
- **Objetivos:**

- Apresentar a Lei dos Cossenos e dos Senos como uma generalização do Teorema de Pitágoras que pode ser usada em qualquer triângulo.

- **Metodologia adotada:**

### **Abordagem teórica:**

Serão apresentados os seguintes triângulos aos alunos:



A partir deles, as tabelas abaixo serão preenchidas, demonstrando o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos.

Triângulo 1		Triângulo 2		Triângulo 3	
AC	11,26	EF	9,02	IG	7,24
CB	6,95	FD	8,03	GH	4
BA	6,52	DE	6,34	HI	6
$AC^2$		$IG^2$		$IG^2$	
$CB^2 + BA^2$		$FD^2 + DE^2$		$GH^2 + HI^2$	

**Tabela 1**

<b>Triângulo 1</b>	$AC^2 - (CB^2 + BA^2)$
<b>Triângulo 2</b>	$EF^2 - (FD^2 + DE^2)$
<b>Triângulo 3</b>	$IG^2 - (GH^2 + HI^2)$

**Tabela 2**

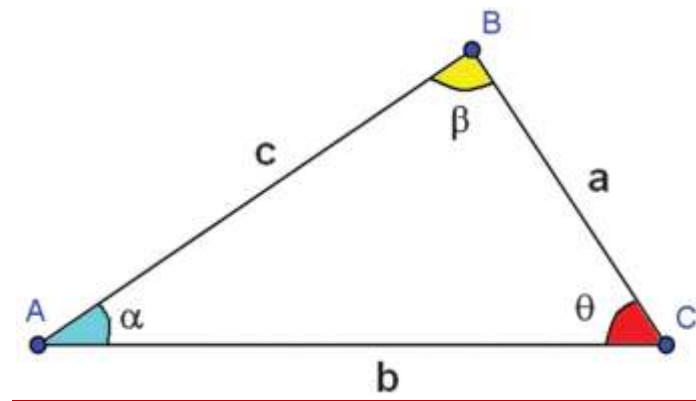
<b>Triângulo 1</b>	$\cos(113,38)$
<b>Triângulo 2</b>	$\cos(76,81)$
<b>Triângulo 3</b>	$\cos(90,57)$

**Tabela 3**

<b>Triângulo 1</b>	$2CB \times BA \cos(B)$
<b>Triângulo 2</b>	$2FD \times DE \cos(D)$
<b>Triângulo 3</b>	$2GH \times HI \cos(H)$

**Tabela 4**

Depois desta atividade, espera-se que os alunos entendam as fórmulas abaixo:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

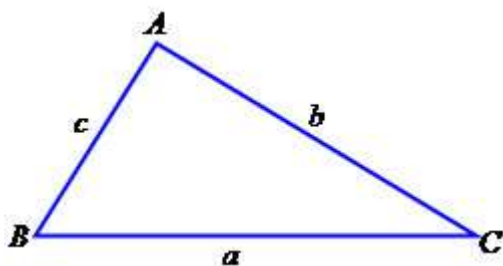
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Fonte: < <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>.

Por fim, será apresentada a lei dos senos:

Na lei dos senos utilizamos relações envolvendo o seno do ângulo e a medida oposta ao ângulo. Fórmula que representa a lei dos senos:

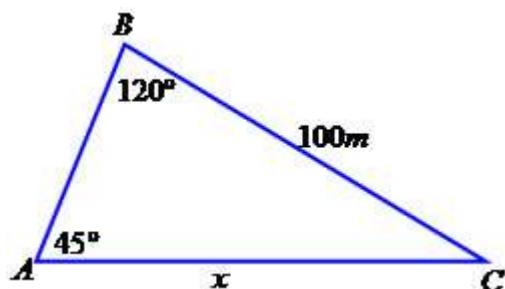


$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$



### Exemplo 1

Determine o valor de  $x$  no triângulo a seguir.



$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } 0,865$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } 0,705$$

$x$	$=$	$\frac{100}{\sin 45^\circ}$
$0,866$	$=$	$\frac{100}{0,707}$
$0,707x$	$=$	$86,6$
$x$	$\approx$	$122,5$

Fonte: < <http://www.brasilecola.com/matematica/lei-dos-senos.htm> >

### Abordagem prática:

Os alunos receberão uma folha contendo problemas, para serem resolvidos em sala, em dupla.

### **Descritores:**

H13 – Resolver problemas, envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.

### **3-Avaliação:**

- **Tempo de Duração:**

2 horas-aula.

Formativa: Durante as aulas, o aluno será observado quanto ao interesse, à participação e ao exercício feito, o que me possibilitará ter um feedback da metodologia usada e de suas dúvidas. Pontos extras serão concedidos por dedicação e participação.

Somativa: A avaliação sobre Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo será um teste valendo 2 pontos na média.

A nota obtida será somada às duas outras avaliações do bimestre, a primeira no valor de 2 pontos (Função Polinomial do 1º grau) e a última, valendo 5 pontos (matéria acumulativa).

Finalmente, os alunos que não alcançarem a metade da nota para cada avaliação, serão submetidos a avaliações de Recuperação, relativas às que não foram alcançadas.

#### **4-Referências bibliográficas:**

BRASIL ESCOLA. Disponível em:

< <http://exercicios.brasilecola.com/matematica/exercicios-sobre-trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm>>. Acesso em: mai. 2014.

CURRÍCULO MÍNIMO. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

IMAGENS. Disponível em:

<[https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbn=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U\\_n\\_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620](https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+triangulo+retangulo&newwindow=1&client=firefox-a&hs=Kbm&rls=org.mozilla:pt-BR:official&channel=sb&tbn=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=OmR7U_n_BcOUqAaa94HwDQ&ved=0CCsQsAQ&biw=1024&bih=620)>. Acesso em: mai. 2014.

MATRIZ DO SAERJINHO. Disponível em:

<<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS (OCN). Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 1. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 2. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 3. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 4. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 5. Disponível em:

< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=193>>. Acesso em: mai. 2014.

