FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

CURSO: MATEMÁTICA 1º ANO do ENSINO MÉDIO
2º BIMESTRE DE 2014

Tarefa 2: Trigonometria no triângulo retângulo

Cursista: Waine Vieira Junior
Tutor: Rodolfo Gregorio de Moraes

Rio de Janeiro
Maio de 2014

Sumário

Introdução:

O intuito deste trabalho é apresentar as razões trigonométricas em triângulo retângulo. Neste sentido, considerando a versatilidade e a riqueza de abordagens que este conteúdo oferece, este plano propôs a adoção da história da matemática por compreender que esta abordagem possibilita a construção de um espectro mais amplo para a profunda construção de sentido por parte do aluno, o que contribuirá sobremaneira com o processo ensino-aprendizagem.

Após investigarmos as origens do conteúdo em questão, o plano apresenta a definição formal do conteúdo. Considerando que a linguagem formal matemática apresenta um nível de abstração (que embora necessário) representa uma dificuldade a mais para os alunos de matemática deste nível, o plano propõe então atividades que levem o aluno a trabalhar com material concreto. Essa relação entre o aspecto formal, e a percepção do aspecto formal em contextualização concreta também será de suma importância para um salutar desenvolvimento no processo ensino-aprendizagem.

Embora não tenhamos a intenção de negligenciar a importância entre as relações das identidades trigonométricas, e tampouco com relação às identidades triangulares, que irão nos levar às leis do seno e do cosseno – importantíssimas relações para o processo de generalização da trigonometria; há que se reconhecer que o foco deste plano reside nos aspectos fundamentais de trigonometria. Esta opção é, em certa medida, estratégica. Tomando o fato de que este será um bimestre atípico – dado o calendário atípico relacionado aos grandes eventos sediados em nosso país – entende-se que uma forte base conceitual em trigonometria, aliada a uma forte desenvoltura algébrica, facilitaria em muito o processo de dedução (obviamente demonstrativo) relacionado às relações de identidades trigonométricas e triangulares.

Assim imaginamos ser necessário, para uma boa implementação deste plano, 8 tempos de 50 minutos cada.

Viagem no tempo

O termo "trigonometria" deriva do grego "τριγωνομετρία" ("Trigonometria"), que significa "medição triângulo".

Os antigos egípcios e babilônios já tinham conhecimento de alguns teoremas sobre as razões dos lados de triângulos semelhantes. No entanto, como não haviam ainda formulado o conceito de ângulo mensurável, eles se limitaram a estudar as medidas dos lados desses triângulos. Ainda assim, astrônomos babilônicos mantiveram registros detalhados sobre o movimento de estrelas, planetas e dos eclipses solares e lunares, os quais exigidos familiaridade com distâncias angulares medidos na esfera celeste. Há ainda quem defenda que os antigos babilônicos tinham uma mesa de secantes, mas há muito debate quanto ao fato de esta ser uma tabela de trios pitagóricos, uma solução de equações quadráticas ou uma tabela trigonométrica.


Papiro de Rhind

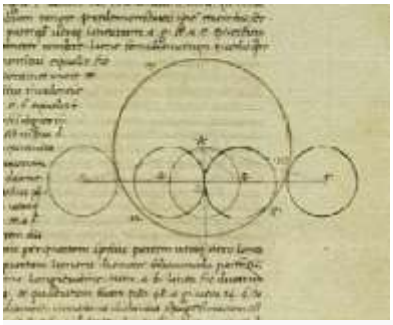
Os egípcios por outro lado, usaram uma forma primitiva de trigonometria para a construção de pirâmides. O papiro de Rhind, escrito pelo escriba egípcio Ahmes (c. 1680-1620 aC), contém o seguinte problema relacionado com a trigonometria:

"*Se uma pirâmide possui 250 côvados de altura e ao lado de sua base possui 360 côvados de comprimento, qual é a medida de sua seked (superfície inclinada)?”*

A solução de Ahmes para o problema é a proporção de metade do lado da base da pirâmide para a sua altura. Em outras palavras, a medida encontrada para a seked é a co-tangente do ângulo da base da pirâmide e a sua face inclinada.


Hiparco de Nicéia

Já na Grécia Clássica, por volta de 180 a 125 a.C., o astrônomo Hiparco de Nicéia (chamado "o pai da Trigonometria") fez um tratado em doze livros, nos quais se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica – incluindo uma tábua de cordas. Hiparco havia se empenhado nesses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia, e suas principais contribuições à Astronomia se constituíram na organização de dados empíricos observados já pelos babilônicos, bem como a elaboração de um catálogo estelar, aperfeiçoamento nas aproximações em constantes astronômicas importantes - duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, etc - e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios, as quais fizeram de Hiparco uma importante figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra do grande astrônomo Ptolomeu de Alexandria.



Tradução do Almagesto em latim, de 1451

Mas a mais importante obra sobre trigonometria da antigüidade foram os 13 livros da *Syntaxis mathematica*, escrita por **Cláudio Ptolomeu de Alexandria**. Este tratado (famoso por sua elegância) recebeu a alcunha de *magiste* ("o maior"), o que causou seu nome árabe tardio: Almajesto. A partir de então a obra é conhecida por esse nome.Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou como aproximação para o número π o número 377/120. Embora não fizesse uso dos termos **seno** e **cosseno**, mas de cordas, utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental $sen^2x + cos^2x = 1$. De maneira muito semelhante, Ptolomeu conhecia as propriedades que, em linguagem atual, são as relações:

- $sen(x+y) = sen(x)\cdot cos(y) + sen(y)\cdot cos(x)$
- $sen(x-y) = sen(x)\cdot cos(y) - sen(y)\cdot cos(x)$
- $cos(x+y) = cos(x)\cdot cos(y) – sen(y)\cdot sen(x)$
- $cos(x-y) = cos(x)\cdot cos(y) + sen(y)\cdot sen(x)$
- $\dfrac{a}{\text{Sen}\,\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{Sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{Sen}\,\hat{C}}$

Durante seis séculos, O Almajesto, foi a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Somente no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo que sempre surpreendera o mundo com sua matemática original e criativa: os Hindus.

A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde sem dúvida elas surgiram. Seus anônimos inventores conheciam as idéias matemáticas gregas e babilônias transmitidas graças ao comércio romano com o sul da Índia, através do Mar Vermelho e o Oceano Índico. O *Surya Siddhanta* ("sistemas de Astronomia"), era um conjunto de textos matemáticos e regras poéticas e enigmáticas sobre Astronomia.

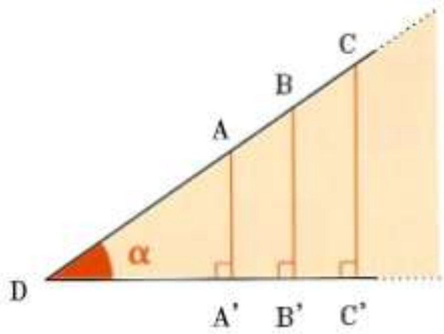
Lá também ocorreu o primeiro aparecimento real do seno de um ângulo, nos trabalhos de Aryabhata, por volta do ano 500 (que, no original ainda não possuíam o nome seno, mas jiva). Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de Brahmagupta, em 628, bem como um método detalhado para a construção de uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150.

A palavra hindu *jiva* – ("meia corda") foi traduzida para o árabe como *jiba*, (cuja pronúncia, em árabe, é idêntica). Mas aí, *jiba* virou *jaib* ("bolso") nos escritos árabes.

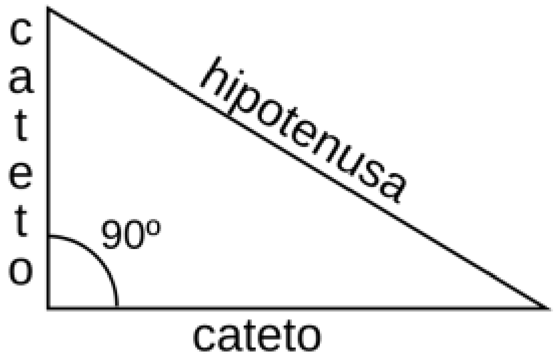
Já o nome seno vem do latim *sinus* que significa seio, volta, curva, cavidade, mas embora possamos imaginar que este nome deriva do fato de o gráfico da função seno apresentar infinitamente curvas (o que é um anacronismo, pois a função seno sequer existia ainda), na verdade, *sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib* e não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. É apenas um engano que perdurou por séculos, como a brincadeira do telefone sem fio, até hoje.

Definindo as coisas

Sabemos que dois triângulos são chamados *semelhantes* quando um pode ser obtido pela proporção dos lados e ângulos do outro. Claro, isso só ocorrerá se seus ângulos correspondentes são iguais. Por isso, a *razão* entre o maior lado e o menor lado do primeiro triângulo será *necessariamente* a mesma razão do maior lado e o menor lado do outro triângulo.



Assim, as relações trigonométricas se definem partindo de triângulos retângulos. Mas o que são mesmo triângulos retângulos? Esta é bastante simples: são todos os triângulos com um ângulo reto (90 graus). Então, o maior lado deste triângulo (na verdade, em qualquer triângulo) é sempre o lado oposto ao maior ângulo – justamente o ângulo reto. Chamamos este lado de *hipotenusa*. Aos demais lados, damos o nome de *catetos*.



Dois triângulos retângulos que compartilham um segundo ângulo α são necessariamente *semelhantes*, e a *proporção* entre o comprimento do lado oposto a α e o comprimento da hipotenusa será, portanto, a mesma *nos dois triângulos*. Este valor é chamado de ***seno de*** $\boldsymbol{\alpha}$ (sen(α)) e varia de acordo com a medida de α.

Agora podemos definir as relações trigonométricas de um ângulo não nulo α, considera-se um triângulo retângulo que possui um ângulo α. As relações são:

a. **Seno:** É a razão entre o cateto **oposto** ao ângulo α e a **hipotenusa**.

b. **Co-seno:** É a razão entre o cateto **adjacente** ao ângulo α e a **hipotenusa**.

c. **Tangente:** É a razão entre o cateto **oposto** e o cateto **adjacente** ao ângulo α.

Logo, temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Atividade 1

- **Habilidade Relacionada: H11** – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos; **H45** – Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.
- **Pré-Requisitos:** Triângulo retângulo.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Barbante; fita métrica, folha de exercício e transferidor.
- **Organização da turma:** Grupos de 4 integrantes.
- **Objetivos:** Compreender empiricamente as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
- **Metodologia:**

1) Junte-se a seus colegas e, utilizando uma mesma unidade de medidas (palmos, por exemplo), dê 12 nós eqüidistantes no barbante.
2) Construa com este barbante um triângulo, de modo que um lado tenha 3 nós, um lado tenha 4 nós e o último tenha 5 nós. Prenda bem as pontas.
3) Em seguida, cada integrante deverá puxar um dos vértices do triângulo, de modo a mantê-lo bem esticado.
4) O outro, utilizando o transferidor, deve medir cada um dos ângulos, em graus, e registrá-lo na folha de exercício (nomeie cada um dos ângulos com letras gregas)

Medida de α:	**Medida de β:**	**Medida de γ (maior):**
Com base na medida dos seus ângulos, diga que tipo de triângulo é esse?		

5) Em seguida, utilizando uma fita métrica, meça também em centímetros o tamanho dos lados do triângulo (nomeie cada um dos lados com letras maiúsculas). Registre na folha de exercício.

Medida de A:	**Medida de B:**	**Medida de C (maior):**

6) Adotando cada um dos ângulos como referência, responda:

Qual o cateto oposto do ângulo α?
Qual o cateto adjacente do ângulo α?
Qual o cateto oposto do ângulo β?
Qual o cateto adjacente do ângulo β?
Qual a hipotenusa?

7) Agora, com o auxílio de uma calculadora, registre:

Qual o valor do seno de α em palmos? Resp:	Qual o valor do cosseno de α em palmos? Resp:	Qual o valor da tangente de α em palmos? Resp:
Qual o valor do seno de α em centímetros? Resp:	Qual o valor do cosseno de α em centímetros? Resp:	Qual o valor da tangente de α em centímetros? Resp:
Qual o valor do seno de β em palmos? Resp:	Qual o valor do cosseno de β em palmos? Resp:	Qual o valor da tangente de β em palmos? Resp:
Qual o valor do seno de β em centímetros? Resp:	Qual o valor do cosseno de β em centímetros? Resp:	Qual o valor da tangente de β em centímetros? Resp:

8) O que se pode dizer com relação aos resultados encontrados em palmos e em centímetros?

Atividade 2

- **Habilidade Relacionada: H11** – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos; **H45** – Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.
- **Pré-Requisitos:** Triângulo retângulo.
- **Tempo de duração:** 50 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** folha de exercício.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender empiricamente as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
- **Metodologia:**

Resolva rapidamente os exercícios abaixo:

1) Dado o triângulo ABC, retângulo em A, calcule:

a) sen B

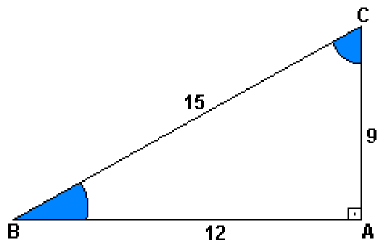
b) cos B

c) tg B

d) sen C

e) cos C

f) tg C



2) Dado o triângulo CDE, retângulo em C, calcule:

a) sen D

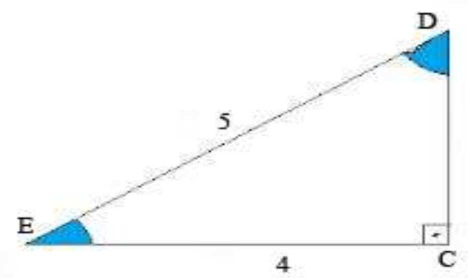
b) cos D

c) tg D

d) sen E

e) cos E

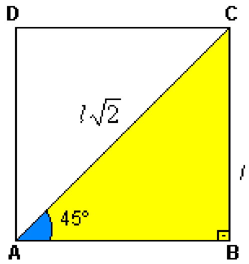
f) tg E



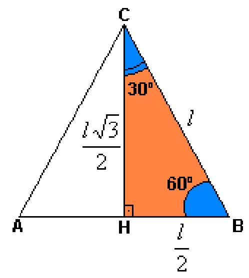
Os ângulos especiais: 30º, 45º e 60º

Considerando que as figuras geométricas de uso mais corrente são o quadrado e o triângulo (basta ver como essas figuras se encaixam com muita utilidade desde a organização de terrenos para construção, até a feitura de uma pipa), temos que:

- O ângulo formado entre a diagonal de um quadrado e seu lado (o que criará um triângulo retângulo isósceles) é igual a **45º**



- O triângulo retângulo formado ao dividirmos um triângulo eqüilátero ao meio (tomando sua altura como um dos lados do triângulo resultante) possuirá os ângulos agudos de **60º** e **30º**.



Temos aí os três principais ângulos para o estudo da trigonometria clássica: **30º**, **45º** e **60º**.

Assim, temos que:

30º
$\text{sen } 30^{\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$ $\cos 30^{\circ} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 30^{\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}.2}{2.\cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45º
$\text{sen } 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg } 45^{\circ} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$
60º
$\text{sen } 60^{\circ} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^{\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$ $\text{tg } 60^{\circ} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$

Que pode ser resumido pela tabelinha:

x	**sen** x	**cos** x	**tg** x
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Atividade 3

- **Habilidade Relacionada: H45** – Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional; **H12** – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).
- **Pré-Requisitos:** Habilidades operatórias envolvendo frações, regra de três, equações.
- **Tempo de duração:** 150 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Barbante e fita métrica, Papelão, transferidor (de 360º), 1 copo de requeijão vazio, tesoura, cola branca e cola bastão,clipes e uma caneta.
- **Organização da turma:** Grupos de 4 integrantes.
- **Objetivos:** Apresentar aos alunos a utilidade da trigonometria dos ditos ângulos clássicos, através da construção de um teodolito rudimentar, e da mensuração de elementos de sua escola.
- **Metodologia:**

1) Cada grupo de fazer uma pequena pesquisa sobre o que é, e pra que serve um teodolito.

2) Todos os alunos devem assistir juntos ao vídeo: Trabalho de Matemática - O Teodolito, disponível em *https://www.youtube.com/watch?v=gv7PhUDaa-w*

3) Seguindo as orientações do vídeo, cada grupo deve confeccionar seu teodolito.

4) Construído o teodolito, posicione-se em frente à porta de sua sala de aula, de modo que, com o teodolito no chão, a ponta da caneta esteja diretamente direcionada para o topo da porta, a uma angulação de **45º**

5) Meça a distância, com a fita métrica e/ou o barbante, entre o teodolito e a porta.

6) Meça agora diretamente a altura da porta e compare as duas medidas. O que se pode dizer sobre elas?

7) Considerando 3 pontos: o teodolito, a base da porta e o topo da porta, e considerando também que o ângulo que o teodolito está marcando é de 45º, responda: que tipo especial de triângulo foi formado?

8) Com base na resposta anterior, responda: qual será o ângulo formado pela porta e o eixo imaginário que vai da ponta do teodolito até o topo da porta?

9) Utilizando a tabela dos ângulos especiais, tente adequar este procedimento utilizando os ângulos de 30º e seu seno, e 60º e seu cosseno.

Atividade 4

- **Habilidade Relacionada: H45** – Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional; **H12** – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).
- **Pré-Requisitos:** Habilidades operatórias envolvendo frações, regra de três, equações.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Barbante e fita métrica, Papelão, transferidor (de 360º), 1 copo de requeijão vazio, tesoura, cola branca e cola bastão,clipes e uma caneta.
- **Organização da turma:** Grupos de 4 integrantes.
- **Objetivos:** Apresentar aos alunos a utilidade da trigonometria dos ditos ângulos clássicos, através da construção de um teodolito rudimentar, e da mensuração de elementos de sua escola.
- **Metodologia:** Agora utilizando a tabela abaixo, e seguindo as orientações do vídeo, vamos partir para planos mais ambiciosos. Que tal medir:

1) Um poste?
2) O teto da sala?
3) A altura do mastro da bandeira nacional?
4) A altura da escola?

Avaliação:

Para a avaliação deste plano de trabalho, temos como foco a familiarização do aluno com as relações trigonométricas fundamentais (seno, co-seno e tangente), bem como sua aplicação direta na resolução de problemas de ordem prática. Nesse sentido, as duas primeiras atividades apresentam exercícios que irão guiar nossas avaliações a respeito do que nos propomos.

Para a terceira e quarta atividade, além dos exercícios propostos, devemos observar a maneira com que o aluno se apropria das informações e relações presentes na construção do círculo trigonométrico. Assim, a avaliação se dará em concomitância à execução das atividades propostas, na observância do rendimento, participação e colaboração cooperativa do aluno para com seus colegas.

Bibliografia:

BERLINGHOFF, William P. e GOUVÊA, Fernando Q. *A matemática através dos tempos*. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Volume único. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, vol. 3. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo e MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade, 9º ano*. São Paulo: Atual, 2009.

ROTEIRO DE AÇÃO 4: Razões Trigonométricas. 1º Ano | 2º Bimestre | 2º Ciclo

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. Saerjinho 2012 – Matriz de Referência. Rio de Janeiro, 2012.