Formação Continuada em Matemática

Função Polinomial do 2º grau

Tarefa 1

Júlio César da Silva Pinto

Tutor: Yania Molina Souto

SUMÁRIO

Introdução

O estudo das funções quadráticas é o primeiro momento em que o aluno vai entrar em contato com um outro tipo de relação matemática. Na maioria dos problemas enfrentados envolve relações lineares, e, quando não envolvem, tentamos transformar ou adaptar o problema para que ele possa ser tratado como linear. É o primeiro passo para perceber que existem outras possibilidades. A função não será mais simplesmente crescente ou decrescente, será importante distinguir onde ela se comporta de cada maneira.

A finalidade deste plano de trabalho é discutir a introdução do estudo de Funções Quadráticas, em 5 atividades, de forma contextualizada, focando na sua utilização em várias situações e construir um conhecimento vivo, participativo e prazeroso, levando os alunos a terem contato com mais uma ferramenta que o possibilitará a entender, utilizar e enxergar as possibilidades do seu uso para solução de problemas e a utilização de conhecimentos já adquiridos como a noção de função e resolução de Equações do 2º grau como requisitos importantes para este estudo.

E tem como objetivo discorrer sobre a prática pedagógica que será utilizada para o melhor entendimento sobre Função Polinomial do 2º grau. Prática essa, que deverá levar o aluno a perceber a aplicabilidade do assunto e a construção do seu próprio conhecimento com situações problemas e questionamentos feitos por eles.

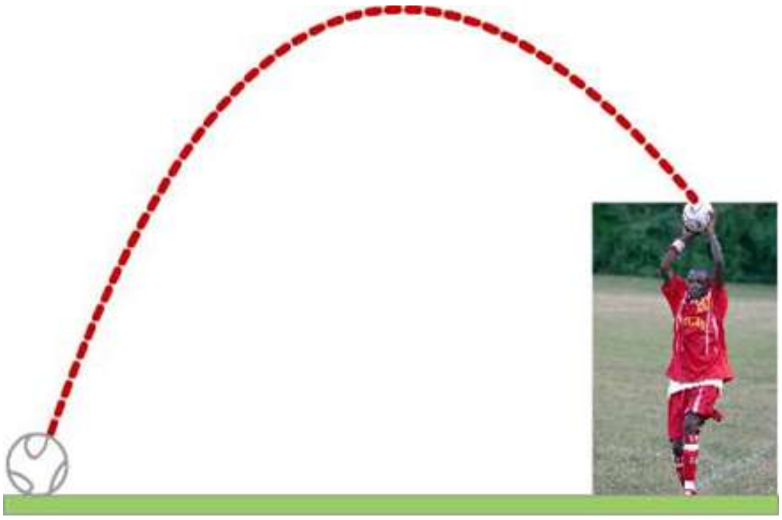
Desenvolvimento

ATIVIDADE 1- Função de Segundo Grau

OBJETIVO: Reconhecer uma função de segundo grau, de forma contextualizada.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Identificar uma função polinomial do 2º grau. Utilizar e reconhecer a linguagem algébrica necessária para expressar relações entre variáveis dependentes.

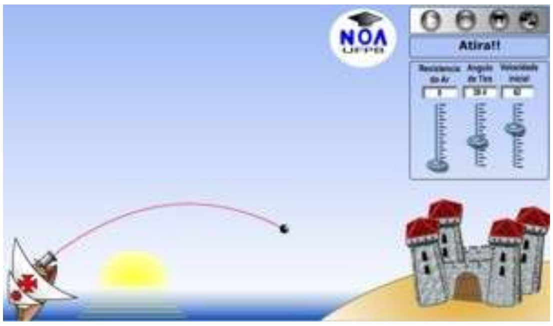
METODOLOGIA: O objetivo dessa aula é criar condições para que o aluno trabalhe com a função quadrática e atinja um nível de entendimento adequado e despertar o interesse pelo assunto. Para isso usaremos um objeto de aprendizagem que apresenta uma aplicação prática e mostraremos como podem ser criados gráficos que representam essa importante função.



Fonte:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soccer_throw_in_nch.jpg (modificada pelo autor)

1º Momento: Apresentação do vídeo: O Viajante da Estrelas. (4 min). Logo após colocar para os alunos a questão investigadora: “Lançamento de projéteis, antenas parabólicas, campeonato de futebol e voleibol; o que eles têm em comum?” Após discussão apresentar algumas situações problemas que caracterizam uma Função Quadrática.

2º Momento: Refletir sobre o Lançamento de Projéteis: Quando se lança um objeto no espaço (pedra, tiro de canhão...) visando alcançar a maior distância possível, tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar não existe ou é pequena. O lançamento de projéteis é modelado por uma função quadrática porque é um movimento acelerado pela ação do campo gravitacional.



Fonte:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soccer_throw_in_nch.jpg (modificada pelo autor)

3º Momento: Definição da Função Quadrática

Uma função quadrática ou do 2º grau é aquela cujo o gráfico é uma parábola. Essa função é representada por $f(x)= ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais.

Alguns exemplos de função quadrática:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$
$f(x) = x^2$

RECURSOS: Apresentação do vídeo da cena do amistoso do Vôlei entre Brasil e União Soviética, realizado no Rio de Janeiro. O saque que ficou conhecido como "jornada nas estrelas", usado por Bernard, descreve, aproximadamente, um arco de parábola.
https://www.youtube.com/watch?v=NSktghjvUcUhttps://www.youtube.com/watch?v=NSktghjvUcU

ATIVIDADE 2- Construção Gráfica da Função e Zeros da Função Quadrática

OBJETIVO: Compreender o comportamento do gráfico da função quadrática a partir da manipulação dos parâmetros a, b e c em $f(x)=ax^2+bx+c$. Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2º grau;

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Representar graficamente uma função do 2º grau.

METODOLOGIA: AULA expositiva com participação dos alunos.

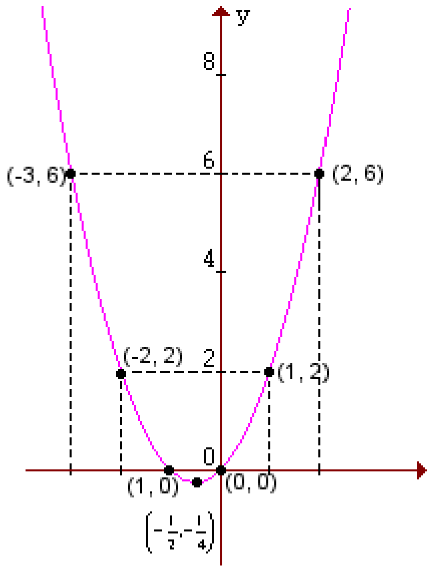
1º Momento:

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y=ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$: Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observações:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

2º Momento: Zero e Equação do 2º Grau

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observações:

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

3º Momento: Atividades propostas:

Propor a construção de gráficos de funções do 2º grau, um com concavidade voltada para cima e outro com concavidade voltada para baixo.

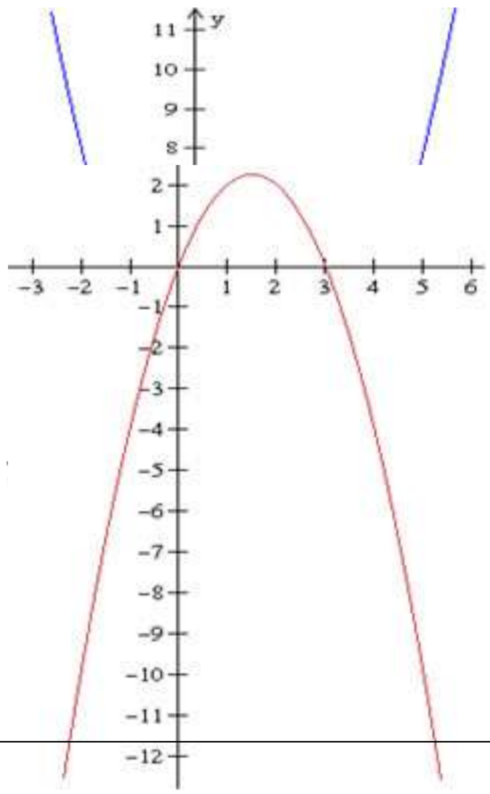
y = x² – 2x (a > 0)

Chamar a atenção para os valores de x e y, onde os números de x podem ser escolhidos aleatoriamente, os quais são substituídos um a um na função, encontrando os valores correspondentes a y.

y = -x² + 3x (a < 0)

x	$y = x^2 - 2x$
−3	15
−2	8
−1	3
0	0
1	−1

x	$y = -x^2 + 3x$
−3	−18
−2	−10
−1	−4
0	0
1	2
2	2
3	0
4	−4
5	−10
6	−18



RECURSOS: Papel quadriculado

ATIVIDADE 3- Vértice da Parábola e Valor Máximo ou Mínimo da Função.

OBJETIVO: Resolver problemas de máximos e mínimos da função do 2º grau;

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Compreender o significado dos coeficientes de uma função quadrática. Resolver problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos.

METODOLOGIA: Na função do 2º grau já percebemos que seu gráfico é uma parábola e que esse gráfico apresenta pontos notáveis e de bastante aplicação na vida cotidiana e no estudo de outras ciências como já foi visto e discutido. Esses pontos são: as raízes da função e o vértice da parábola. As raízes determinam quais os pontos onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas (eixo x); o vértice pode ser o ponto de máximo absoluto ou de mínimo absoluto da função, ou seja, o maior ou o menor valor que a função pode assumir em todo o seu domínio.

1º Momento: Fazer um estudo dos pontos de máximo e mínimo absolutos da função do 2º grau e compreender sua utilidade nos contextos mais diversos.

Considere uma função do 2º grau qualquer, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Sabemos que seu gráfico é uma parábola e que a concavidade da parábola varia de acordo com o coeficiente **a**. Ou seja,

Se $a < 0 \rightarrow$ a concavidade da parábola é voltada para baixo;
Se $a > 0 \rightarrow$ a concavidade da parábola é voltada para cima;

Vimos anteriormente que o vértice da parábola pode ser um ponto de mínimo absoluto ou de máximo absoluto, e o que determina um caso ou outro é a concavidade da parábola.

Se a concavidade for voltada para baixo, a função apresenta ponto de máximo absoluto.

Se a concavidade for voltada para cima, a função apresenta ponto de mínimo absoluto.

As coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

$V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

2º Momento: Apresentar exemplos:

Exemplo 1: Dadas as funções abaixo, determine se elas possuem ponto de máximo ou mínimo absoluto e as coordenadas desses pontos.
a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Solução:
Observando a função, podemos afirmar que a = 3 > 0. Portanto, o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para cima. Isso implica que a função apresenta um ponto de mínimo absoluto. Vimos que esse ponto é o vértice da parábola e para determinar suas coordenadas utilizamos as fórmulas:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1]}{4 \cdot 3} = \frac{-(16-12)}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

Dessa forma, o ponto de máximo absoluto, que é o vértice da parábola, tem coordenadas:

$$V\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Exemplo 2. O lucro de uma fábrica na venda de determinado produto é dado pela função
$L(x) = -5x^2 + 100x - 80$, onde x representa o número de produtos vendidos e L(x) é o lucro em reais. Determine:

a) O lucro máximo obtido pela fábrica na venda desses produtos.

Solução:
Como a função que determina o lucro da fábrica, $L(x) = -5x^2 + 100x - 80$, é uma função do 2º grau, percebemos que $a = -5 < 0$. Isso implica que a parábola que representa essa função tem a concavidade voltada para baixo, tendo, portanto, um ponto de máximo absoluto, que é o vértice da parábola. O lucro máximo da empresa será dado pelo Y_v (coordenada y do vértice). Assim, teremos:

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[100^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-80)]}{4 \cdot (-5)} = \frac{-(10000 - 1600)}{-20} = \frac{-8400}{-20} = 420$$

Portanto, o lucro máximo da fábrica será de R$ 420, 00.

b) Quantos produtos precisam ser vendidos para obtenção do lucro máximo.

Solução: O número de produtos a serem vendidos para obtenção do lucro máximo será dado pelo X_v (coordenada x do vértice). Teremos:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-5)} = \frac{-100}{-10} = 10$$

Concluímos que a fábrica precisa vender 10 produtos para obter o lucro máximo desejado.

RECURSOS: Lista de Atividades, Desafios e Livro Texto
ATIVIDADE 4- Resolução de Problemas na Função Quadrática

OBJETIVO: Utilizar a função do 2º grau para resolver problemas relacionados à Física e problemas do cotidiano.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Utilizar a função do 2º grau para resolver problemas relacionados à Física.

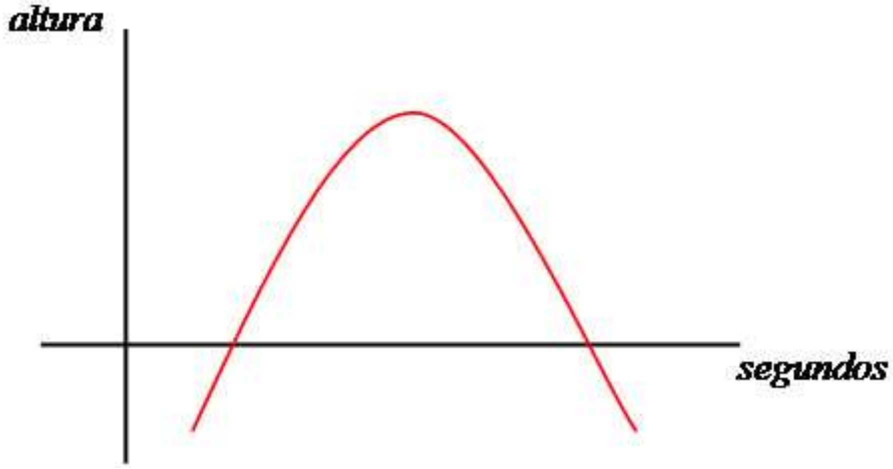
METODOLOGIA: Apresentação de situações problemas e propor uma discussão e lançamento de ideias e hipóteses para sua solução.

1º MOMENTO: Resolver problemas relacionados a Função Quadrática.

Exemplo . O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y = -40x^2 + 200x$. Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar correspondem, respectivamente, a:

Solução:

Veja o gráfico do movimento:



Na expressão $y = -40x^2 + 200x$ os coeficientes são a = –40, b = 200 e c = 0.

Utilizaremos a expressão Yv para obter a altura máxima atingida pelo objeto:

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow -\frac{200^2 - 4*(-40)*0}{4*(-40)} \Rightarrow -\frac{40000}{-160} \Rightarrow 250 metros$$

O objeto atingiu a altura máxima de 250 metros.

Utilizaremos a expressão Xv para obter o tempo de subida do objeto:

$$Xv = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{(200)}{2*(-40)} \Rightarrow -\frac{200}{(-80)} \Rightarrow 2{,}5s$$

2º Momento: Reunir a sala em grupos e propor a solução de várias situações problemas apresentados pelo Livro Texto e pelo professor.

RECURSOS: Livro Texto, Dinâmica de Grupo e Lista de Atividades.

ATIVIDADE 5- Inequações Polinomiais do 2º Grau

OBJETIVO: Estabelecer semelhanças e diferenças entre os princípios da igualdade e desigualdade. Resolver inequações em problemas e expressões.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Resolver problemas significativos envolvendo inequações e sistemas simples de inequações do 1º e 2º graus

METODOLOGIA: Desenvolver o interesse do aluno pelo tema, despertando a vontade de saber mais e suas habilidades individuais (maior compreensão, domínio do conteúdo, raciocínio.
1º Momento: Revisar o Estudo das Inequações do 1º grau.

2º Momento: Introduzir o Estudo das Inequações do 2º Grau.

Inequação do 2º Grau

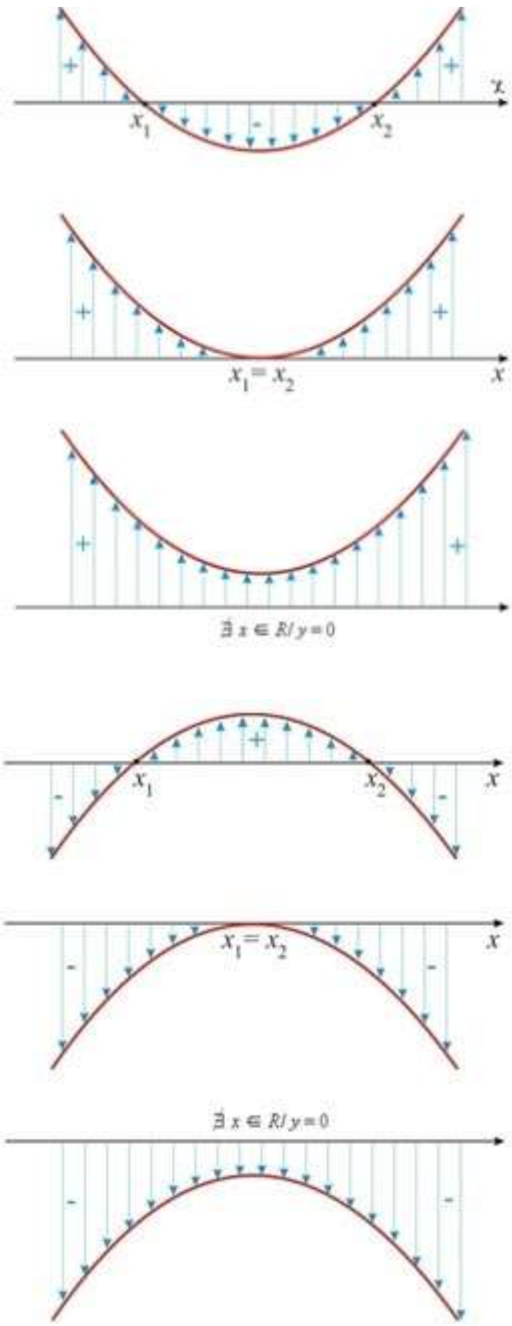
Uma inequação do 2º grau na incógnita x é uma expressão do 2º grau que pode ser escrita numa das seguintes formas:

$ax^2 + bx + c > 0$;
$ax^2 + bx + c < 0$;
$ax^2 + bx + c \geq 0$;
$ax^2 + bx + c \leq 0$.

Para resolvermos uma inequação do Segundo grau devemos estudar o sinal da função correspondente equação.

1. Igualar a sentença do 2º grau a zero;

2. Localizar e (se existir) as raízes da equação no eixo x.
3. Estudar o sinal da função correspondente, tendo-se como possibilidades:
$a > 0$ $a < 0$



RECURSOS: Problemas Propostos Pelo Professor e Livro Texto

Avaliação

A ação avaliativa não deve se reduzir a um único instrumento, a um só momento ou uma única forma. É necessário haver uma diversidade de instrumentos, a serem utilizados durante todo o processo de ensino-aprendizagem.

É por meio de observações contínuas da participação dos alunos nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas não descartando seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção será avaliada a evolução em relação aos objetivos propostos e ao alcance das competências e habilidades trabalhadas.

Fontes de Pesquisa

Livros Consultados

MATEMÁTICA CONTEXTO & APLICAÇÕES, 1º Ano/Luiz Roberto Dante – 2º Edição – São Paulo: Ática, 2014.

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA, 1º Ano/Fábio Martins Leonardo – 2º Edição – São Paulo: Moderna, 2013.

Endereços Eletrônicos

http://portaldoprofessor.mec.gov.br

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soccer_throw_in_nch.jpg

http://www.somatematica.com.br/emedio

http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2010/12/inequacao-do-2-grau.html