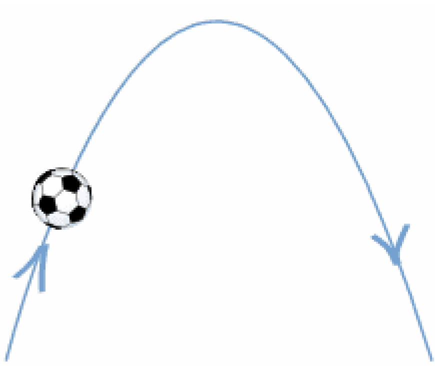
# Formação Continuada em MATEMÁTICA

# Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

## Matemática 1º Ano – 3º Bimestre/2014

## Plano de Trabalho

## Função Polinomial do 2º Grau



**Tarefa 1**

**Cursista: Wendel do Nascimento Pinheiro**

**Tutor: Rodolfo Gregório de Moraes**

# S U M Á R I O

# INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade dos conteúdos denominados “Função Polinomial do 2º Grau” para resolução de problemas que através de assuntos do cotidiano visando um melhor entendimento.

Frequentemente presenciamos situações que de uma forma ou de outra é inserido o conceito de função quadrática, imaginemos as seguintes situações: o chute de um jogador numabola de futebol, o lançamento de uma moeda no ar, o disparar de uma bala de canhão, o formato de uma antena parabólica, o formato das curvas de uma Montanha Russa, dentre outras situações descrevem uma curva de formato parecido chamada de parábola.

O estudo da parábola aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos, conhecer e analisar os seus principais elementos se faz necessário na compreensão e tomada de decisões.

No geral, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para explicações e fixação da aprendizagem aliado a realização de avaliação escrita.

# DESENVOLVIMENTO

**Atividade 1** : Conhecendo a função polinomial do 2º grau.

- **Habilidade Relacionada**: Identificar uma função polinomial do 2º grau

- **Pré-requisitos**: Equação do 2º grau.

- **Tempo de Duração**: 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.

- **Organização da turma**: Individual.

- **Objetivos:** Permitir que os alunos conheçam uma função polinomial do 2º grau e seus coeficientes.

- **Metodologia adotada**: Serão apresentados conteúdos e exemplos de função quadrática e situações de aplicação e ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

**Função quadrática**

**Observe as figuras:**

O formato das figuras revela o comportamento de uma função quadrática determinada por uma curva chamada Parábola.

**Definição**

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e a ≠ 0.

Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1
2. $f(x) = x^2 -1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
4. $f(x) = - x^2 + 8x$, onde a = -1, b = 8 e c = 0
5. $f(x) = -4x^2$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

**Zero e Equação do 2º Grau**

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ , a ≠ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- quando $\Delta$ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando $\Delta$ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando $\Delta$ é negativo, não há raiz real.

Exemplos:

Dada a função f(x) = $x^2$ -7x + 10, calcule:
a) f(2) =

b) f(0) =

a) Nesse primeiro exemplo vamos calcular o valor de f(2), para isso temos que substituir o x pelo número 2 na função, observe.

f(2) = $x^2$ -7x + 10
f(2) = $2^2$ -7.2 + 10
f(2) = 4 - 14 + 10
f(2) = 0

b) Repetindo o processo para f(0).
f(0) = $x^2$ -7x + 10
f(0) = $0^2$ -7.0 + 10
f(0) = 0 – 0 + 10
f(0) = 10

Exercícios de fixação:

1) As seguintes funções são definidas em R verifique quais delas são funções quadráticas e identifique em cada uma os valores de a, b e c:

a) $f(x) = 2x (3x - 1)$

b) $f(x) = (x + 2) (x - 2) – 4$

c) $f(x) = 2(x + 1)^2$

2) Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, determine:

a) $f(1)$ c) $f(\sqrt{2})$ e) $f(h + 1)$

b) $f(0)$ d) $f(-2)$

3) Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 3x$ c) $f(x) = -x^2 +2x + 8$

b) $f(x) = x^2 +4x + 5$ d) $–x^2 +3x – 5$

**Atividade 2** : Construindo o gráfico de uma função polinomial do 2º grau

- **Habilidade Relacionada**:
  - Representar graficamente uma função do 2º grau.
  - Compreender o significado dos coeficientes de uma função do 2º grau.
- **Pré-requisitos**: Plano cartesiano, construção de gráficos, Coeficientes, Raízes e vértices da função quadrática.

- **Tempo de Duração**: 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.

- **Organização da turma**: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

- **Objetivos:** representar graficamente o gráfico de uma função quadrática.

- **Metodologia adotada**: Será fornecido ao aluno o conhecimento necessário para construir o gráfico de uma função do 2º grau. Ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

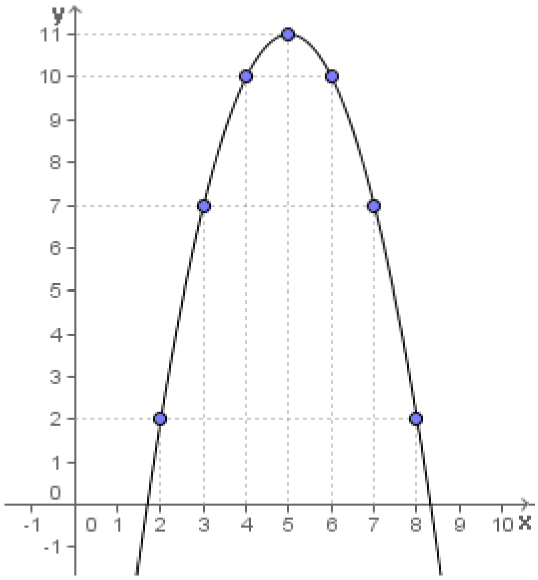
Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Devido ao fato de o gráfico de uma função polinomial do 2° grau ser uma parábola e não uma reta, como no caso de uma função afim, para montarmos o seu gráfico não nos basta conhecer apenas dois pares ordenados pertencentes à curva da função, no caso da função quadrática precisamos de mais alguns pontos para termos uma boa ideia de como ficará a curva no gráfico.

Vamos analisar o gráfico abaixo e a tabela abaixo que contém alguns pontos deste gráfico:

| x | $y = -x^2 + 10x - 14$ |
|---|---|
| 2 | $y = -2^2 + 10 . 2 - 14 = 2$ |
| 3 | $y = -3^2 + 10 . 3 - 14 = 7$ |
| 4 | $y = -4^2 + 10 . 4 - 14 = 10$ |
| 5 | $y = -5^2 + 10 . 5 - 14 = 11$ |
| 6 | $y = -6^2 + 10 . 6 - 14 = 10$ |
| 7 | $y = -7^2 + 10 . 7 - 14 = 7$ |
| 8 | $y = -8^2 + 10 . 8 - 14 = 2$ |




Na tabela temos cada um dos sete pontos destacados no gráfico.

Para traçá-lo primeiro identificamos no plano cartesiano cada um dos pontos sete pontos da tabela e depois fazemos as interligações, traçando linhas curvas de um ponto a outro seguindo a curvatura própria de uma parábola.

Normalmente é mais fácil traçarmos a parábola se a começarmos pelo seu vértice, que neste caso é o ponto(5, 11), visualmente o ponto máximo do gráfico desta parábola.

Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

Ponto de Intersecção da Parábola com o Eixo das Ordenadas

De uma forma geral a parábola sempre intercepta o eixo y no ponto (0, c).

Na função $y = -x^2 + 10x - 14$, vista acima, o coeficiente c é igual a -14, portanto a intersecção da parábola do gráfico da função com o eixo das ordenadas ocorre no ponto (0, -14).

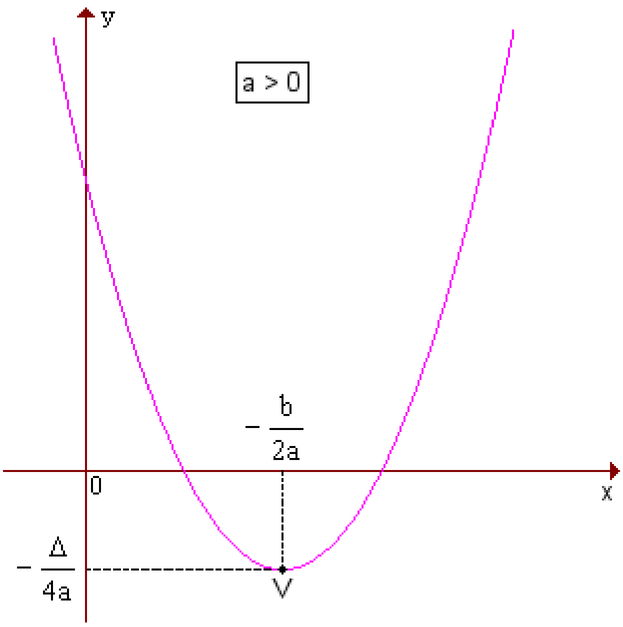
Raiz da Função Quadrática

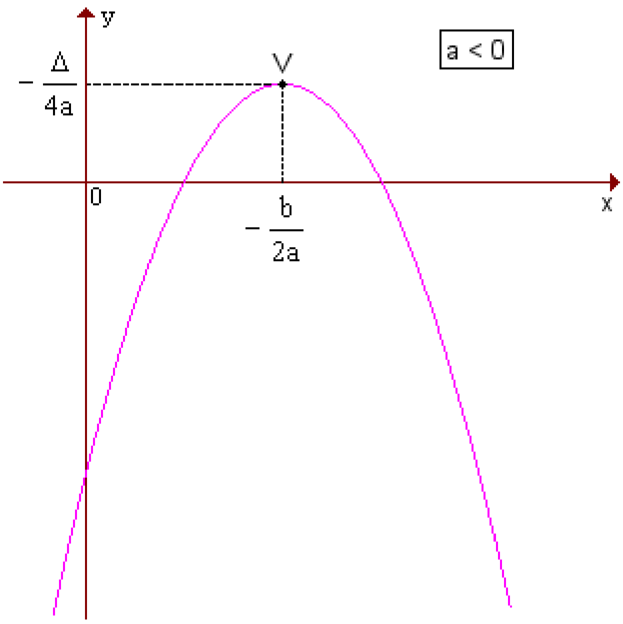
Observe no gráfico anterior que a parábola da função intercepta o eixo das abscissas em dois pontos. Estes pontos são denominados raiz da função ou zero da função.

Coordenadas do vértice da parábola

Quando a > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V; quando a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Veja os gráficos:



Construção da Parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observação seguinte:

1. O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola;
2. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x;
3. O vértice V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se a > 0), ou máximo (se a< 0);
4. A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola;
5. Para x = 0 , temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

Examine os exemplos:

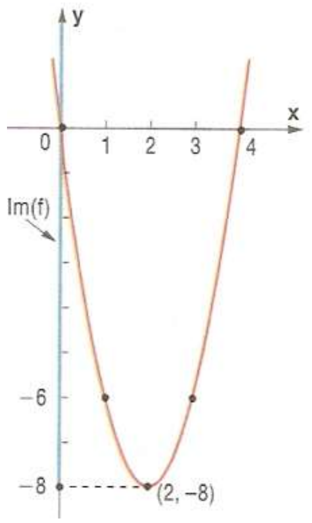
1º) $f(x) = 2x^2 - 8x$

Obtendo as raízes, teremos $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Portanto, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$

Substituindo $x_v = 2$ na função, obtemos a ordenada do vértice:

$y_v = f(x_v) = 2(x_v)^2 - 8(x_v)$

$y_v = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8$



* O vértice é o ponto (2, 8).

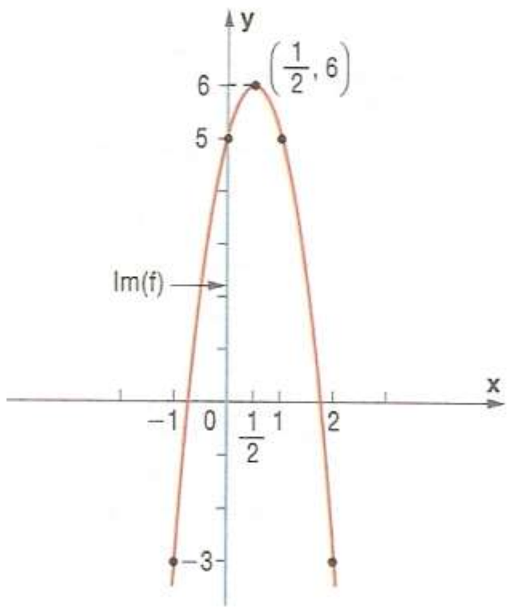
* A função assume valor mínimo -8 quando x = 2

* Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

* Essa função não tem valor máximo.

2º) $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Sabemos que o vértice V de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, também pode ser calculado assim: $V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.




Neste caso, temos:

f(x) = -4x + 4x + 5

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(16+80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$

V = (1/2, 6)

* O vértice é o ponto (1/2, 6).

* A função assume valor máximo 6 quando x = 1/2

* Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$

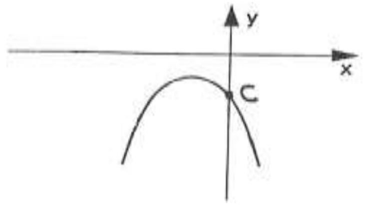
* Essa função não tem valor mínimo.

Exercícios de fixação:

1) Esboce o gráfico da função f cuja parábola passa pelos pontos (3, -2) e (0, 4) e tem vértice no ponto (2, -4); em seguida, verifique qual das seguintes sentenças corresponde a essa função:

a) $f(x) = -2x^2 - 8x + 4$ b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$

2) O gráfico abaixo representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$.




Pode se afirmar que:

a) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$

b) $a < 0$, $b = 0$ e $c < 0$

c) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

d) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$

e) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$

3) Dada a função quadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 9$, determine:

a) Se a concavidade da parábola esta voltada para cima ou para baixo;

b) Os zeros da função;

c) O vértice **V** da parábola definida pela função;

d) A intersecção com o eixo x e com o eixo y;

e) Os intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante;

f) O esboço do gráfico.

**Atividade 3** : Utilizando a função do 2º grau para resolver problemas.

- **Habilidade Relacionada**:
  - Utilizar a função do 2º grau para resolver problemas.
  - Resolver problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos.

- **Pré-requisitos**: Funções Quadráticas. Reconhecimento do gráfico da função quadrática e de suas propriedades.

- **Tempo de Duração**: 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.

- **Organização da turma**: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

- **Objetivos:** Resolver problemas que envolvam funções quadráticas e seus pontos notáveis, como extremos ou raízes.

- **Metodologia adotada**: Serão apresentadas situações que envolvam a aplicação dos conceitos das funções quadráticas na resolução de problemas. Ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

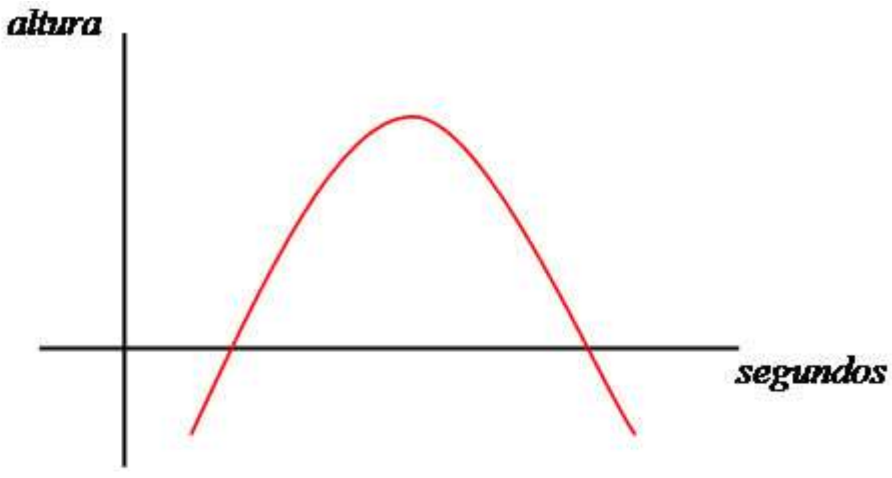
As funções do 2º grau possuem diversas aplicações na Matemática e auxiliam a Física em diversas situações nos movimentos de corpos na área da Cinemática e Dinâmica. A sua lei de formação, onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, descreve uma trajetória parabólica de concavidade voltada para cima (decrescente - ponto mínimo) ou concavidade voltada para baixo (crescente – ponto máximo). Observe a resolução de situações problemas a seguir:

***Exemplo 1***

O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação
$y = -40x^2 + 200x$. Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar correspondem, respectivamente, a:

Resolução:

Veja o gráfico do movimento:




Na expressão $y = -40x^2 + 200x$ os coeficientes são $a = -40$, $b = 200$ e $c = 0$.

*Utilizaremos a expressão Yv para obter a altura máxima atingida pelo objeto:*

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow -\frac{200^2 - 4*(-40)*0}{4*(-40)} \Rightarrow -\frac{40000}{-160} \Rightarrow 250 metros$$

O objeto atingiu a altura máxima de 250 metros.

*Utilizaremos a expressão Xv para obter o tempo de subida do objeto:*

$$Xv = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{(200)}{2*(-40)} \Rightarrow -\frac{200}{(-80)} \Rightarrow 2{,}5s$$

O projétil levou 2,5s para atingir altura máxima, levando mais 2,5s para retornar ao solo, pois no movimento vertical o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Portanto, o projétil permaneceu por 5 s no ar.

***Exemplo 2***

Um objeto foi lançado do topo de um edifício de 84 m de altura, com velocidade inicial de 32 m/s. Quanto tempo ele levou para chegar ao chão? Utilize a expressão matemática do 2º grau ***d = 5t² + 32t***, que representa o movimento de queda livre do corpo.

**Resolução:**

O corpo percorreu a distância de 84 m que corresponde à altura do edifício. Portanto, ao substituirmos d = 84, basta resolvermos a equação do 2º grau formada, determinando o valor do tempo t, que será a raiz da equação.

$$5t^2 + 32t = 84$$
$$5t^2 + 32t - 84 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 32^2 - 4*5*(84)$$
$$\Delta = 1024 + 1680$$
$$\Delta = 2704$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-32 \pm \sqrt{2704}}{2*5}$$
$$t = \frac{-32 \pm 52}{10}$$
$$t' = \frac{-32 - 52}{10} = \frac{-84}{10} = -8{,}4$$
$$t'' = \frac{-32 + 52}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Exercícios de fixação:

1) Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, calcule:

a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo;
b) o valor mínimo do custo.

2) Um veículo tem o seu movimento descrito pela equação $S = 5\text{-}6t\text{+}t^2$ com Espaço (S) em metros e Tempo (t) em segundos. Pede-se :

a) Qual a posição inicial do veiculo
b) A posição do veículo em 2 e em 6 segundos
c) O tempo em que o veículo passa pela origem do sistema
d) O tempo e a posição de retorno do veículo
e) Represente graficamente, sob aspecto matemático e físico o movimentos desse móvel

3) Um canhão na cidade A atira um projétil para atingir um avião que sobre voa perto da cidade. O projétil percorre uma trajetória descrita pela equação $h = 10x – 1/2x^2$ onde h = altura do projétil em km e x distância horizontal percorrida pelo projétil, até atingir o avião. Com esses dados pede-se:

a) a altura em relação ao solo que o avião foi atingido( o avião foi atingido na máxima distancia de percurso do projétil).
b) a que distancia horizontal,em relação ao canhão o avião caiu.

4) Um foguete caiu depois de lançado, devido a uma pane no sistema de navegação, a trajetória do foguete até sua queda e representada pela equação $h= 12,5 +30t – 2,5t^2$. Pede-se:

a) a altura máxima (m)atingida pelo foguete, após quanto tempo(mim) isso ocorreu
b) Após quantos minutos, ao partir, o foguete atingiu o solo.

5)Uma bala de canhão é atirada do solo e descreve uma trajetória parabólica de equação $y=-3x^2+60x$(sendo x e y medidos em metros) . Vamos determinar:

a) a altura máxima atingida pela bala
b) a alcance do disparo

# AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas (exercícios de fixação), a ser realizadas em dupla ou individual, são meios para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser pontuada.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) servirá para a investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio logico para resolver problemas do cotidiano que envolva funções quadráticas e os outros tópicos estudados.

## OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

*Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas 1001 e 1003 do Colégio Estadual Amazonas no ano letivo em curso (2014) e o grau de conhecimento dos alunos. Informo que, infelizmente, não consta de atividades que envolvam programas de geometria ou utilização do computador porque momentaneamente esses recursos estão indisponíveis na instituição o que dificulta trabalhos desse tipo.*

# FONTES DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Função Polinomial do 2º Grau – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=243

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010

Endereços eletrônicos acessados de 13/08/2014 a 26/08/2014:

http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/cm_materia.asp?M=10

http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoQuadratica.aspx

http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao2/funcao2.php

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq2g/quadratica.htm

http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap103.html

http://www.brasilescola.com/matematica/funcao-segundo-grau.htm

http://www.brasilescola.com/matematica/problemas-envolvendo-funcoes-2-grau.htm