Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 1° ano – 3° bimestre/2014

Plano de Trabalho

Trigonometria na Circunferência

Tarefa 2

Cursista: Agnaldo José de Sá

Tutor: Rodolfo Gregório de Moraes

Grupo: 1

Sumário

INTRODUÇÂO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos conheçam os conceitos trigonométricos e suas aplicações notáveis; sendo a principal delas no estudo de fenômenos periódicos: oscilação de um pêndulo, movimento dos planetas em torno do sol, movimento ondulatório, etc.

Realizaremos nossos estudos através de situações-problemas do dia-a-dia que motivem os alunos e favoreça a construção do conhecimento por parte dos mesmos.

Para a totalização do plano, serão necessários oito tempos de cinqüenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e para avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

<u>Habilidade relacionada:</u> Introduzir a trigonometria no círculo

<u>Pré- requisitos:</u> Conhecimento de *sen, cos*, e *tg* extraídos do triângulo retângulo.

<u>Tempo de duração:</u> 100 minutos

<u>Recursos educacionais utilizados:</u> vídeos sobre fenômenos periódicos.

<u>Organização da turma:</u> Em pequenos círculos

<u>Objetivos:</u> Iniciar o estudo da trigonometria no círculo

<u>Metodologia adotada:</u>

Apresentar o vídeo para a turma com o objetivo de informar sobre os fenômenos periódicos (Aplicação na medicina: ciclo menstrual das mulheres; fenômenos das marés; as fases da lua,etc.).

Discutir com os alunos o vídeo.

Vocês podem enriquecer com mais algum exemplo de fenômeno periódico?

Após isso, abordar os tópicos descritos abaixo.

Estudaremos a trigonometria, tal qual ela apareceu há milhares de anos, com o objetivo de resolver triângulos. Agora vamos fazer um estudo mais abrangente de seno, cosseno e tangente, uma necessidade mais recente da Matemática. Nesse novo contexto, o triângulo retângulo é insuficiente para as definições necessárias e temos a necessidade de definir um novo “ambiente” para a trigonometria: a circunferência unitária ou círculo unitário (também chamado circunferência trigonométrica).

Veremos agora conceitos necessários para esse novo estudo.

Vamos recordar alguns conceitos já conhecidos da geometria plana:

• Arco geométrico: É uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive. Se os dois pontos coincidirem, teremos um ângulo nulo ou arco de uma volta.

•Arco e ângulo central: Todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

•Comprimento da circunferência de raio r: $C = 2\pi r$.

•Comprimento e medida de arco: A medida de um arco é a medida do ângulo central que o subtende, independentemente do raio da circunferência que contém o arco. Usam-se geralmente unidades como o grau e o radiano para medir arcos.

•O comprimento do arco é a medida linear do arco, sendo usadas unidades como “metro”, “centímetro”, etc.

Nesse momento, não haverá exercícios e sim uma discussão sobre os vídeos e a introdução do conteúdo.

Atividade 2:

<u>Habilidade relacionada:</u> Transformar grau em radiano ou vice-versa (H21)

<u>Pré-requisitos:</u> Conceito de arcos, ângulos e circunferência

<u>Tempo de duração:</u> 100 minutos

<u>Recursos educacionais utilizados:</u> Livro didático adotado pela escola e lousa

<u>Organização da turma:</u> individual

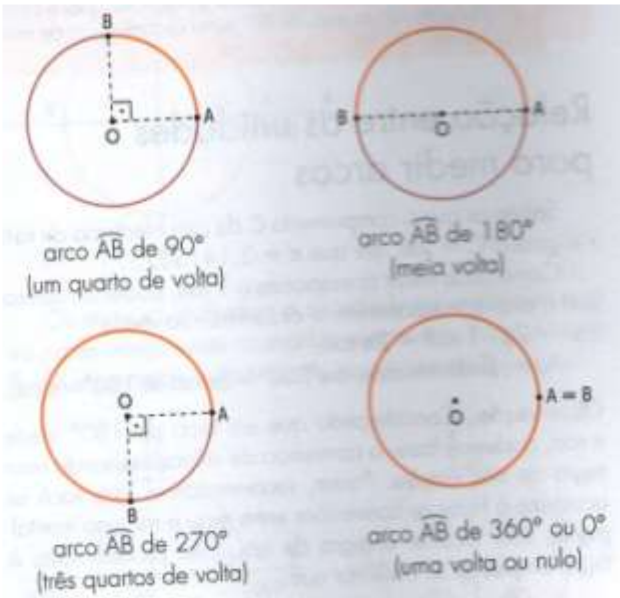
<u>Objetivos:</u> Conhecer unidades para medir arcos de circunferência e converter graus em radianos, e vice-versa.

<u>Metadologia adotada:</u> Abordar os seguintes tópicos

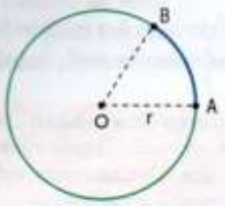
Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)

As unidades mais usadas para medir arcos de circunferência (ou ângulos) são o grau e o radiano.

•**Grau**: quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°). Considere o arco AB, que vai de **A** para **B** no sentido anti-horário.



•**Radiano**: Um arco de um radiano (1 rad)é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência. Isso deve ser interpretado da seguinte forma: se temos um ângulo central de medida 1 radiano, então ele subtende um arco de medida 1 radiano (lembre-se que a medida do arco é igual à medida do ângulo central) e comprimento de 1 raio. Se temos um ângulo central de medida 2 radianos, então ele subtende um arco de medida 2 radianos e comprimento de 2 raios. Se temos um ângulo central de medida α radianos, então ele subtende um arco de medida α radianos e comprimento de α **r**aios. Assim**, L =** $\boldsymbol{\alpha}$**r** se a medida α do arco for dada em radianos.



comprimento do arco $\widehat{AB}$ = comprimento de $\overline{OA}$ (r)

ou

$m(\widehat{AB}) = 1$ rad

Observação: A relação entre o comprimento ℓ e a medida α (em graus) do arco é dada por: $\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, pois $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\ell}{\alpha}$. Com α em radianos temos $\ell = \alpha r$, pois $\frac{r}{1} = \frac{\ell}{\alpha}$.

Relação entre as unidades para medir arcos

Sabemos que o comprimento C da circunferência de raio r é igual a C = 2πr, em que π = 3,141592...

Como cada raio r corresponde a 1 rad, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi \mathrm{r} = 2\pi.1rad = 2\pi rad$

Assim, podemos dizer que 360°= $2\pi rad$ ou 180°=πrad

Observação: Considerando que um arco de 180° mede πrad, podemos fazer a conversão de unidades usando uma regra de três simples. Porém, recomendamos que você se acostume a fazer as conversões entre grau e radiano mentalmente, sem recorrer à regra de três. Esse procedimento é muito simples se se observar que:

- 90° é $\frac{1}{2}$ de 180°; logo, é $\frac{1}{2}$ de π rad $\rightarrow$ 90° = $\frac{\pi}{2}$ rad
- 30° é $\frac{1}{6}$ de 180°; logo, é $\frac{1}{6}$ de π rad $\rightarrow$ 30° = $\frac{\pi}{6}$ rad
- 60° é $\frac{1}{3}$ de 180°; logo, é $\frac{1}{3}$ de π rad $\rightarrow$ 60° = $\frac{\pi}{3}$ rad
- 45° é $\frac{1}{4}$ de 180°; logo, é $\frac{1}{4}$ de π rad $\rightarrow$ 45° = $\frac{\pi}{4}$ rad

Exercícios de fixação:

-Utilizar exercícios do livro didático para fixação da conversão de graus para radianos e de radianos para graus.

Livro: Matemática Dante – Página: 211 (números: 1e 2)

-Utilização de questões de Saerjinhos anteriores.

Atividade 3

<u>Habilidade relacionada:</u> Determinar o Comprimento de arco

<u>Pré-requisitos:</u> diferenciar raio de diâmetro e conhecer unidades de medidas (radianos)

<u>Tempo de duração:</u> 100 minutos

<u>Recursos educacionais utilizados:</u> Livro didático adotado pela escola e lousa

<u>Organização da turma:</u> individual

<u>Objetivos:</u> Fazer um breve comentário sobre o surgimento da Trigonometria e calcular o comprimento de arco

<u>Metodologia adotada:</u> *Iniciar com a poesia "Pôr do sol".*

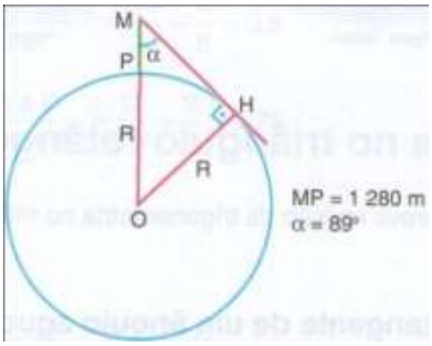
Abordar os seguintes assuntos:

Qual é o raio médio aproximado da Terra? Essa questão deixava curiosos e intrigados os matemáticos e astrônomos da antiguidade.

Uma solução interessante foi imaginada na Grécia Antiga. A ideia era obter essa distância, absolutamente inacessível, a partir de distâncias e ângulos que pudessem ser medidos diretamente.

Na época, eles não tinham instrumentos muitos precisos, principalmente para medir ângulos. Mesmo assim, acharam aproximações razoáveis para a medida do raio da Terra. Veja um procedimento que eles imaginaram.

Uma pessoa sobe no alto de um morro próximo ao mar, de onde ela possa ver a linha do horizonte.



Na figura anterior, supomos a Terra esférica. Veja o que representam os vários pontos e segmentos.

O→Centro da Terra

H→Linha do horizonte

P→Pé do morro

M→Alto do morro

PM→Altura do morro

OP e OH→Raios da Terra, de medida R

Pode-se obter, com facilidade, a altura PM do morro. Além disso, há instrumentos que ajudam a medir o ângulo **α.** Ele é o ângulo de visão da linha do horizonte, em relação à altura do morro. Sabemos, também, da geometria plana, que o ângulo H é reto.

Como poderíamos, a partir desses dados, obter o raio da Terra? É aí que surge um dos ramos mais fascinantes da matemática: A trigonometria.

A palavra **trigonometria** vem do grego. É a junção de trigon(=triângulo) e metron(=medida).

A trigonometria tem suas raízes na Astronomia. O astrônomo grego Hiparco de Nicéia costuma ser considerado seu fundador. Ele viveu por volta do ano 120 a.C.

Hiparco foi o primeiro a determinar, com alguma precisão, o nascer e o ocaso de várias estrelas. Para isso, elaborou tabelas relacionando comprimentos de arcos e cordas em circunferência.

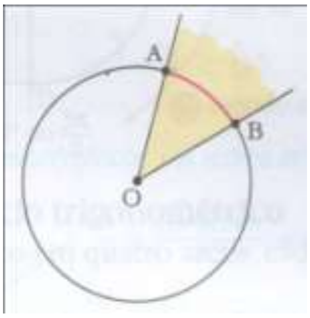
Mais tarde, por volta de 150 a.C., a trigonometria grega atingiu seu apogeu. Foi quando Ptolomeu, a partir das teorias de Hiparco, publicou o trabalho denominado *A Sintaxe Matemática,* também conhecido como Almagesto. Nesse trabalho, Ptolomeu defendia a teoria geocêntrica. Segundo ele, a Terra seria o centro do sistema solar.

As teorias de Ptolomeu perduraram até o século XV, quando Nicolau Copérnico lançou a teoria heliocêntrica, que considerava o Sol como centro. Nesse momento, a necessidade de refazer os cálculos da astronomia posicional levou a importantes avanços nos estudos de trigonometria.

Entre o final do século XVI e o início do século XVII, os estudos de Galileu, Descartes e Fermat ampliaram os conceitos trigonométricos. Seu uso passou a ser de grande importância no estudo de certas funções, principalmente aquelas que representam fenômenos periódicos.

Abordar também: Comprimento de arco

Considerado uma circunferência com centro O e raio medindo *r,* um ângulo central AOB de medida γ, em radianos, e o correspondente arco AB contido nesse ângulo, podemos estabelecer a seguinte regra de três:



r__1

$med\ (AB)$__γ

$$\frac{r}{med\ AB} = \frac{1}{\gamma}$$

$$r.\gamma = \mathrm{med\ (AB)}.1$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{med\ AB}}{\mathrm{r}} \mathrm{ou\ med\ AB} = \gamma.\mathrm{r}$$

A medida do ângulo central AOB=γ, em radianos é determinada pelo quociente entre o comprimento do arco AB e a medida do raio da circunferência que o contém.

Exemplo:

Para determinar, em radianos, a medida do arco AB de comprimento 20 cm contido numa circunferência de diâmetro 20 cm, fazemos:

$$r = \frac{diâmetro}{2} = \frac{20\ cm}{2} = 10cm$$

Logo, a medida de γ, em radianos, é obtida por:

$$\gamma = \frac{\mathrm{med\ arcAB}}{\mathrm{r}} => \gamma = \frac{20\mathrm{cm}}{10\mathrm{cm}} => \gamma = 2\mathrm{rad}$$

Exercícios de fixação:

-Utilizar exercícios do livro didático para fixação da fórmula para se calcular o comprimento de arco.

Livro: Matemática Dante – Página: 211 (números: 3 e 4)

-Utilização de questões de Saerjinhos anteriores.

AVALIAÇÃO

- O aluno será avaliado durante todo o processo de ensino-aprendizagem, através das atividades propostas, participação e argumentação.
- Aplicação de avaliação escrita individual para sondagem da capacidade de utilização dos conteúdos adquiridos bem como leitura e interpretação dos problemas aplicados.
- Auto-avaliação feita pelos alunos e pelo professor a fim de diagnosticar possíveis falhas durante o processo buscando o aperfeiçoamento do mesmo.
- Utilizar exercícios do livro didático com testes de vestibular assim como questões do Saerjinho.
- Verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com os temas que constarão no Saerjinho.

Descritores que serão avaliados em avaliações durante o 3º bimestre:

H21- Transformar grau em radiano ou vice-versa.

C1 - Converter em graus a medida de um arco dado em radianos, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária.

C2 - Converter em radianos a medida de um arco dado em graus, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Este plano de trabalho foi elaborado de acordo com a estrutura disponibilizada pela escola, a realidade da turma, o tempo disponível e o planejamento realizado com o grupo de professores da instituição.

Informo que, infelizmente, não constam atividades com computador, pois não disponibilizamos de nenhum laboratório de informática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, L.R. Matemática: Contextos e aplicações: São Paulo: Ática, 2008.

SOUZA, J.R.Matemática: Coleção Novo Olhar. São Paulo: FTD, 2010

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo: Moderna, 2009.

Fundação CECIERJ – Consórcio Cederj