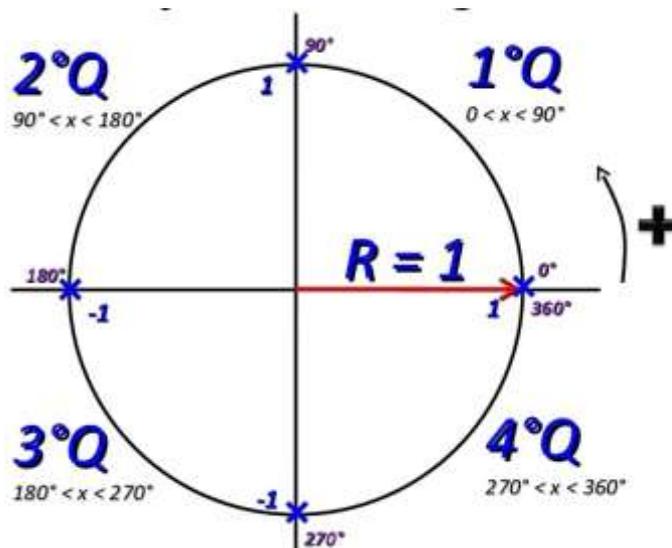


**Formação Continuada em MATEMÁTICA**  
**Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ**

**Matemática 1º Ano – 3º Bimestre/2014**  
**Plano de Trabalho**

**Trigonometria na circunferência**



**Tarefa 1**

**Cursista: Wendel do Nascimento Pinheiro**

**Tutor: Rodolfo Gregório de Moraes**

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	03
DESENVOLVIMENTO .....	04
AVALIAÇÃO .....	20
FONTES DE PESQUISA .....	21

## **INTRODUÇÃO**

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade dos conteúdos denominados “Trigonometria na Circunferência” para resolução de problemas que através de assuntos do cotidiano visando um melhor entendimento.

Frequentemente presenciamos situações que de uma forma ou de outra é inserido o conceito de trigonometria na circunferência, imaginemos as seguintes situações: movimentos do Sol e da Lua, que fazem com que aconteçam o dia e a noite, as fases da lua, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz solar e dos pêndulos, todos esses são exemplos de periódicos, em vista disso se torna necessário um estudo detalhado sobre as características e comportamento desses fenômenos já que os mesmos são úteis para medir a passagem do tempo.

Esse estudo também direcionado para expor as características do círculo trigonométrico, a identificação do Radiano como unidade de medida de arco, bem como as transformações da medida de um arco de Grau para Radiano e vice-versa.

No geral, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para explicações e fixação da aprendizagem aliado a realização de avaliação escrita.

# DESENVOLVIMENTO

**Atividade 1** : Conhecendo os fenômenos que se repetem de forma periódica.

- **Habilidade Relacionada:** Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica.
- **Pré-requisitos:** Noções de periodicidade.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** vídeo aula, Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Turma disposta em duplas.
- **Objetivos:** Apresentar aos alunos fenômenos que apresentam padrões periódicos de comportamento.
- **Metodologia adotada:** Será apresentado um vídeo mostrando exemplos fenômenos de comportamento periódico em seguida serão ministrados conteúdos discriminando a importância e conhecimento desses estudos e ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

## **Apresentação de vídeo sobre fenômenos periódicos**

### **Fenômenos Periódicos**

Chamamos de fenômenos periódicos tudo que se repete da mesma forma, em um mesmo intervalo de tempo. O dia e a noite, por exemplo, são fenômenos periódicos, pois todos os dias o sol raia no mesmo horário, dando início ao dia, e se põe, também no mesmo horário, dando início à noite.

Veremos agora a importância desses fenômenos na matemática e no dia-a-dia, além de alguns exemplos.

#### **A Importância dos Fenômenos Periódicos**

Esses fenômenos periódicos são muito importantes para a contagem do tempo. Nosso calendário, por exemplo, foi construído a partir de corpos celestes que executam movimentos periódicos. O movimento da Lua também é um fenômeno periódico. Todos os dias ela dá uma volta em torno da Terra, periodicamente, ou seja, todos os dias e la faz o mesmo trajeto, em um mesmo período.

Esses fenômenos periódicos também são muito usados em construção de gráficos.

#### **Exemplos de Fenômenos Periódicos**

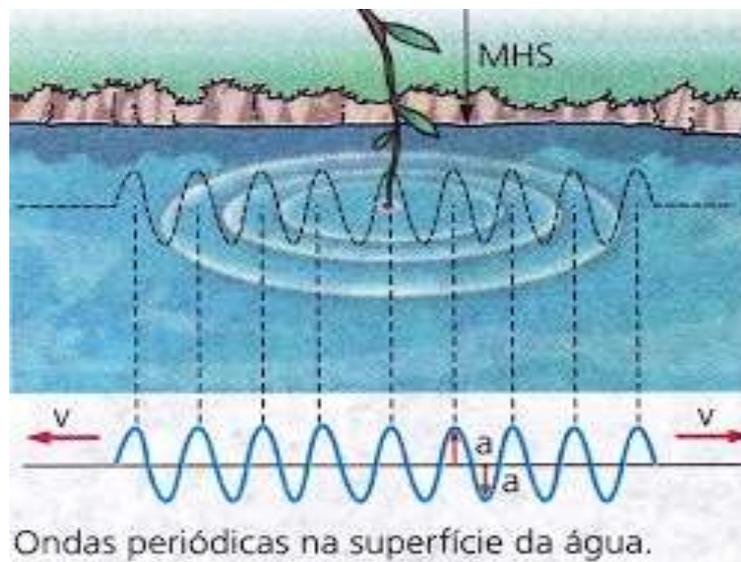
Além dos movimentos do Sol e da Lua, que fazem com que aconteça o dia e a noite, existem muitos outros fenômenos periódicos no nosso dia-a-dia

Veja alguns exemplos:

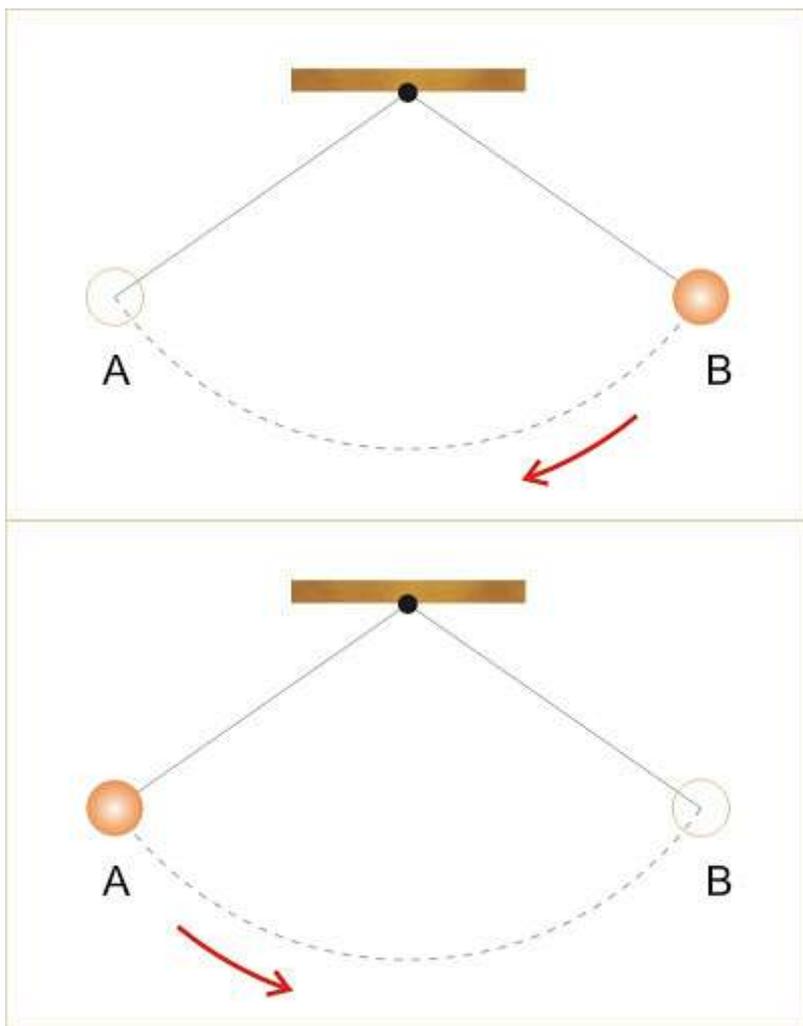
- As fases da lua também é um bom exemplo, que se repete a cada 28 dias. Fenômeno físico periódico: período – 28 dias, com 4 fases (nova, crescentes, cheia e minguante, que duram sete dias cada uma. Logo,  $4 \times 7 = 28$  dias).



O movimento da lua é um exemplo de fenômeno periódico



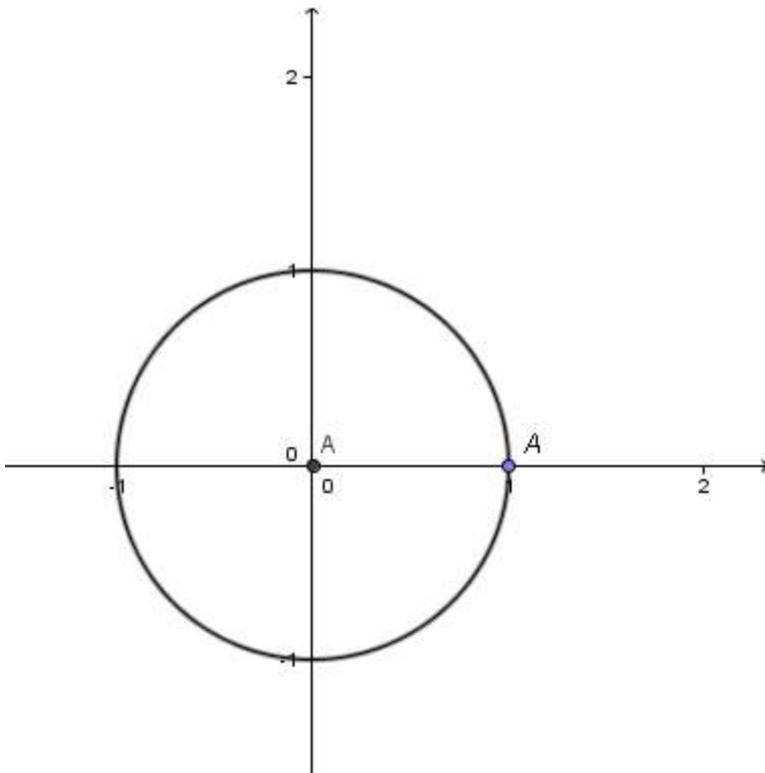
- As funções trigonométricas podem ser modelos matemáticos de vários fenômenos que se repetem como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, a pressão sanguínea do coração e o nível de água em uma baía marítima devido a sua periodicidade.
- Aplicações na física (Pêndulos)



Duas grandezas são associadas a fenômenos que se repetem em intervalos de tempos iguais, também conhecidos como fenômenos periódicos: Período e Frequência.

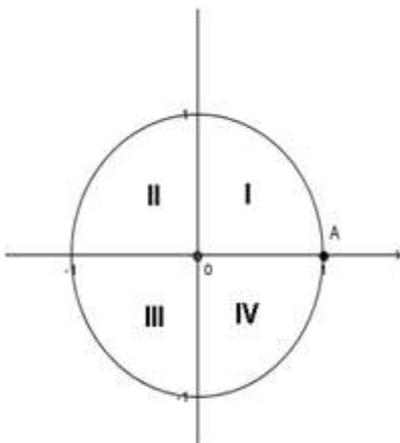
Nas figuras acima vamos desprezar atritos. O pêndulo abandonado em A oscila até B e retorna ao ponto A. O intervalo de tempo de duração desse movimento (ciclo) é chamado de período e é representado pela letra T.

Podemos reconhecer um fenômeno periódico a partir do conhecimento de um ciclo completo desse movimento, estabelecendo então uma previsão do seu comportamento. No estudo da trigonometria vamos utilizar um círculo trigonométrico. Vamos construir sobre o plano cartesiano uma circunferência de raio unitário e centro na origem.



O círculo tem origem no ponto A e cresce em sentido anti-horário. Como um círculo tem  $360^\circ$ , se movimentarmos o ponto A pela extensão da circunferência, após dar uma volta completa retornará ao ponto de partida. Podemos seguir este mesmo trajeto quantas vezes quisermos. Note que este movimento também pode ser definido como um **Fenômeno Periódico**.

Como você pode perceber que os eixos x e y dividem o círculo em quatro partes. A cada uma destas partes chamaremos de quadrante, e contaremos estes quadrantes no sentido anti-horário.



Exercícios de fixação:

1º) Cite situações onde se evidencia a realização de um fenômeno periódico:

2º) Construa um círculo com centro na origem do sistema cartesiano e divida em 4 quadrantes. Sobre o eixo  $x$ , marque um ponto positivo da circunferência e chame de ponto A.

3º) Utilizando o círculo trigonométrico da questão anterior, vamos movimentar o ponto A sobre a circunferência. Responda sobre qual eixo onde o ponto A ficará após percorrer:

a) 1 volta.

b) 1 volta e meia.

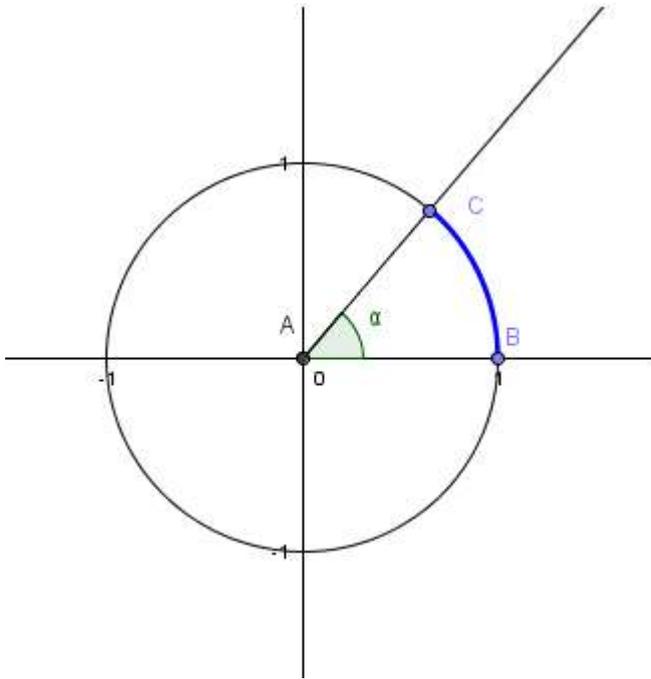
c) Duas voltas mais um quarto de volta.

## Atividade 2 : Apresentando o Radiano

- **Habilidade Relacionada:** Identificar o radiano como unidade de medida de arco.
- **Pré-requisitos:** Arcos e ângulos na Circunferência.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Individual
- **Objetivos:** Conhecer a unidade de medida radiano para arcos e ângulos.
- **Metodologia adotada:** Será fornecido ao aluno o conhecimento necessário para que se conheça o Radiano como unidade de medida de arco. Ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

## Radiano

Arco é um segmento da circunferência definida por dois pontos. Observe a figura abaixo:



A semirreta que parte da origem e passa pelo ponto C da circunferência, define o arco . Este arco BC é definido pelo ângulo  $\alpha$ , e em graus, tem a mesma medida. Porém, para nosso estudo, vamos considerar a medida dos arcos em Radianos.

Radiano é uma medida do arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que o contém. No caso do círculo trigonométrico, o radiano é o arco unitário que corresponde a  $\frac{1}{2\pi}$ .

Normalmente, os ângulos são medidos em graus. Mas existe uma outra medida também bastante utilizada medir uma circunferência (ou um arco): os **radianos**, utilizados especialmente para o caso de operações representadas no círculo trigonométrico. Para começar, lembre-se de que o ângulo correspondente a uma volta completa vale  $360^\circ$ . Se o comprimento de arco da circunferência trigonométrica (raio 1) for calculado:

$$c = \pi \cdot r?$$

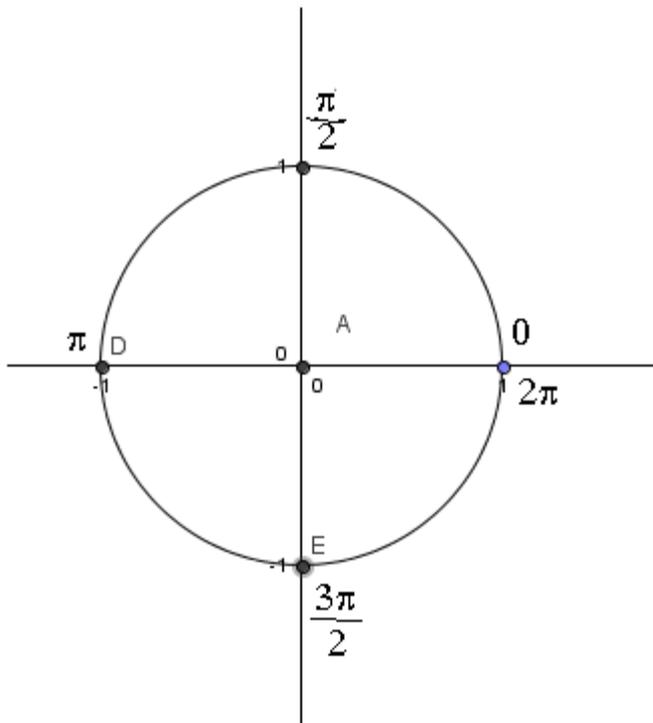
sendo r o raio, que no caso vale 1, logo:  $c = 2\pi$

é o comprimento desta circunferência que mede  $360^\circ$ , então:

$$2\pi = 360^\circ?$$

Esta nova medida de um arco de circunferência é chamada de radiano, com a abreviatura *rad*.

A conclusão a que se chega é que um arco de circunferência pode ser medido pelo ângulo central (em graus) ou pelo seu comprimento (em radianos).



Assim, podemos definir:

- Primeiro quadrante: 0 rd até  $\frac{\pi}{2}$  rad
- Segundo quadrante:  $\frac{\pi}{2}$  rad rd até  $\pi$  rad
- Terceiro quadrante:  $\pi$  rad até  $\frac{3\pi}{2}$  rad
- Quarto quadrante:  $\frac{3\pi}{2}$  rad até  $2\pi$  rad

É importante lembrar que o sentido positivo do arco é anti horário.

**EXEMPLO 01:**

Considere como referência um círculo trigonométrico de raio igual a 1 centímetro. Calcule o comprimento de um arco de

**Resolução:**

Como  $\theta = 3,14$ , teremos  $\frac{3 \times 3,14}{5} = 1,88$  cm

**EXEMPLO 02:**

Em qual quadrante se encontra o arco  $\frac{5\pi}{2}$

Dividindo 5 por  $2\pi$  teremos como resposta  $2\pi$  e resto  $1\pi$ , que podemos representar simplesmente por  $\pi$ . Como  $2\pi$  corresponde a uma volta completa, teremos duas voltas mais meia volta.

Dessa forma, a extremidade do arco está sobre o eixo horizontal, ou seja, o eixo X.

Exercícios de fixação:

1º) Tomando como referência uma circunferência de raio igual a 1 centímetro, calcule o comprimento dos arcos representados em radianos.

a)  $\frac{7\pi}{6}$

b)  $4\pi$

c)  $\frac{4\pi}{3}$

2º) Verifique em qual quadrante está a extremidade de cada arco:

a)  $\frac{7\pi}{6}$

b)  $4\pi$

c)  $\frac{4\pi}{3}$

### **Atividade 3** : Transformando grau em radiano e vice-versa

- **Habilidade Relacionada:** Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.
- **Pré-requisitos:** Arcos e ângulos na Circunferência; unidades de medida de arcos e ângulos (graus e radianos); ciclo trigonométrico.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Individual
- **Objetivos:** Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.
- **Metodologia adotada:** Serão mostradas as relações que envolvem arcos em Grau e Radiano com a intenção do aluno aprender a fazer a conversão de grau em radiano e vice-versa. Ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

## Relação Grau / Radiano e vice-versa

Quando medimos o ângulo de um arco utilizamos como unidade o grau ou o radiano. Temos que  $1^\circ$  (um grau) possui  $60'$  (sessenta minutos) e  $1'$  (um minuto) possui  $60''$  (sessenta segundos). Uma circunferência possui 360 arcos de abertura igual a  $1^\circ$ . No caso da medida em radianos, dizemos que o arco mede um radiano (1 rad) se o seu comprimento for igual ao comprimento do raio da circunferência que se encontra o arco medido.

A tabela a seguir mostra algumas relações entre as unidades em graus e radianos.

Radianos	Graus
$2\pi$ rad	$360^\circ$
$\pi$ rad	$180^\circ$
$\pi/2$ rad	$90^\circ$
$\pi/3$ rad	$60^\circ$
$\pi/4$ rad	$45^\circ$
$\pi/6$ rad	$30^\circ$

### *Convertendo Graus em Radianos*

Na conversão de graus para radianos utilizamos uma regra de três simples, por exemplo:

*20° em radianos*

graus	radianos
$20^\circ$	x
$180^\circ$	$\pi$ rad

$$\begin{aligned}180^\circ x &= 20^\circ \pi \text{ rad} \\ x &= \frac{20^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ} \\ x &= \frac{\pi}{9} \text{ rad}\end{aligned}$$

*15° em radianos*

graus	radianos
$15^\circ$	x
$180^\circ$	$\pi$ rad

$$180^\circ x = 15^\circ \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{15^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

*120° em radianos*

graus	radiano
120°	x
180°	$\pi$ rad

$$180^\circ x = 120^\circ \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{120^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$x = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$$

*150° em radianos*

graus	radiano
150°	x
180°	$\pi$ rad

$$180^\circ x = 150^\circ \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{150^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$x = \frac{5}{6} \pi \text{ rad}$$

*300° em radianos*

graus	radiano
300°	x
180°	$\pi$ rad

$$180^\circ x = 300^\circ \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{300^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$x = \frac{5}{3} \pi \text{ rad}$$

### *Convertendo Radianos em Graus*

Na conversão de radianos para graus, basta substituímos o valor de  $\pi$  por  $180^\circ$ . Veja exemplos:

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = \frac{540^\circ}{4} = 135^\circ$$

$$\frac{2\pi}{9} \text{ rad} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{9} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

$$\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11 \cdot 180^\circ}{6} = \frac{1980}{6} = 330^\circ$$

## Relação Relógio e arcos em graus

Se desenharmos um relógio em um círculo de raio 1 cm, qual a medida do ângulo que mostra a abertura de um arco referente à medida de 5 minutos?

*Um relógio tem 60 minutos. Podemos dividir em 12 arcos de 5 minutos.*

*Como a circunferência tem  $360^\circ$ , cada arco de 5 minutos vale:*

$$360:12 = 30^\circ.$$

Qual o ângulo que define o arco formado pelos ponteiros de um relógio de raio 1 cm, quando marcam 4 horas?

*Ao marcar 4 horas, os ponteiros estarão exatamente sobre os números 12 e 4. Como são doze horas no relógio, cada hora equivale a  $30^\circ$ . Assim, 4 horas equivale a  $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ .*

Exercícios de fixação:

1) Transforme os ângulos abaixo para radianos.

- a)  $120^\circ$                       b)  $270^\circ$                       c)  $45^\circ$                       d)  $160^\circ$

2) Transforme os ângulos abaixo para graus.

- a)  $\frac{\pi}{4}$  rad                      b)  $\frac{\pi}{6}$  rad                      c)  $\frac{7\pi}{6}$  rad                      d)  $\frac{2\pi}{3}$  rad

3) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

4) Encontre a menor determinação positiva e o quadrante dos arcos abaixo:

- a)  $140^\circ$                       b)  $870^\circ$                       c)  $1260^\circ$                       d)  $-400^\circ$   
e)  $-1580^\circ$                       f)  $\frac{7\pi}{6}$  rad                      g)  $\frac{27\pi}{6}$  rad                      h)  $\frac{22\pi}{4}$  rad  
i)  $\frac{31\pi}{3}$  rad

5) Encontre o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nas horas abaixo;

- a) 2h30min                      b) 10h20min                      c) 11h45min

## AValiação

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas (exercícios de fixação), a ser realizadas em dupla ou individual, são meios para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser pontuada.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porém, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) servirá para a investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano que envolva a trigonometria na circunferência e os outros tópicos estudados.

### OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

*Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas 1001 e 1003 do Colégio Estadual Amazonas no ano letivo em curso (2014) e o grau de conhecimento dos alunos. Informo que, infelizmente, não consta de atividades que envolvam programas de geometria ou utilização do computador porque momentaneamente esses recursos estão indisponíveis na instituição, o que dificulta trabalhos desse tipo.*

## FONTES DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Trigonometria na Circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – disponível em <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=243>

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010

Endereços eletrônicos acessados de 27/08/2014 a 09/09/2014:

<http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2010/09/fenomenos-periodicos.html>

<http://cursinhopreenem.com.br/matematica/fenomenos-periodicos/>

<http://traprendizado.blogspot.com.br/2011/08/fenomenos-periodicos.html>

[http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/cm\\_materia.asp?M=10](http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/cm_materia.asp?M=10)

<http://www.brasilecola.com/matematica/o-radiano.htm>

<http://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/radianos-unidade-para-medir-circunferencias.htm>

<http://www.brasilecola.com/matematica/conversoes-medidas-angulos.htm>