FORMAÇÃO CONTINUADA
CECIERJ / SEEDUC

Professora: Ednara Alves da Silva

Matrícula: 30343321

Série: 1º ano – Ensino Médio – 4º bimestre

Tutor: Rodolfo Gregório

SUMÁRIO

PLANO DE TRABALHO SOBRE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Ednara Alves da Silva

ednara.silva@hotmail.com

1. Introdução:

Esse estudo de trigonometria na circunferência se inicia com uma breve história fazendo a relação da trigonometria com situações do cotidiano. Para despertar o interesse do aluno e fazer com que o conteúdo seja mais significativo para ele.

É importante antes de trabalharmos equações trigonométricas, fazer uma análise detalhada sobre simetria na circunferência, variação de sinal e redução ao primeiro quadrante. Pois esses conhecimentos são imprescindíveis para a compreensão e desenvolvimento de tais equações.

2. Desenvolvimento:

Para a realização dessas atividades serão necessários 300 minutos de aula. Essas atividades estão divididas em três etapas.

1ª Etapa:

Nesta etapa, pretende-se através de uma breve história da Trigonometria e de sua aplicação em nosso dia-a-dia, despertar a curiosidade e o interesse do educando pela disciplina. Faremos também uma atividade prática, que é a construção do teodolito para medir a altura do prédio escolar.

- **Recursos Utilizados**
  Quadro branco
  Caneta para quadro branco
  Folha com atividade impressa
  Lápis
  Papel cartão
  Régua
  Transferidor
  Tesoura
  Calculadora
  Canudo
  Fita adesiva
  Barbante
  Trena

- **Duração**
  100 minutos

- **Pré-requisitos**
  Geometria no triângulo retângulo

- **Habilidade**
  H14 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.
  H21 – Utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

ATIVIDADE 1

Um pouco da História da Trigonometria

A Trigonometria nasceu c. 300 AC entre os gregos, para resolver problemas de Astronomia pura. Suas primeiras aplicações práticas ocorrem só com Ptolemaicos 150 d.C. o qual, além de continuar aplicando-a nos estudos astronômicos, a usou para determinar a latitude e longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seus mapas.
Do mundo grego, a Trigonometria passou, c. 400 d.C., para a Índia onde era usada nos cálculos astrológicos (ainda eram problemas de Astronomia). Por cerca de 800 d.C. ela chega ao mundo islâmico, onde foi muito desenvolvida e aplicada na Astronomia e Cartografia. Por cerca de 1 100 d.C. a Trigonometria chegou, junto com os livros de Ptolemaicos, na Europa Cristã. Aí, inicialmente estudada tão somente por suas aplicações na Astronomia, com os portugueses da Escola de Sagres encontra uma aplicação de enorme valor econômico na navegação oceânica.

Aplicação da Trigonometria no nosso dia-a-dia

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.
A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros.

Em algumas situações, como na demarcação de terras ou no cálculo da altura de uma montanha, precisamos determinar distâncias cuja medição direta não é possível. É comum, então, recorrermos ao teodolito, um instrumento que mede ângulos, e às relações fornecidas pela Trigonometria.

Para construção do teodolito, devemos seguir os seguintes passos:

1º. Recorte um pedaço (20cm x 10cm) do papel cartão. Ele será a base do seu teodolito.
2º. Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, como vemos na figura, dando destaque ao segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90º.

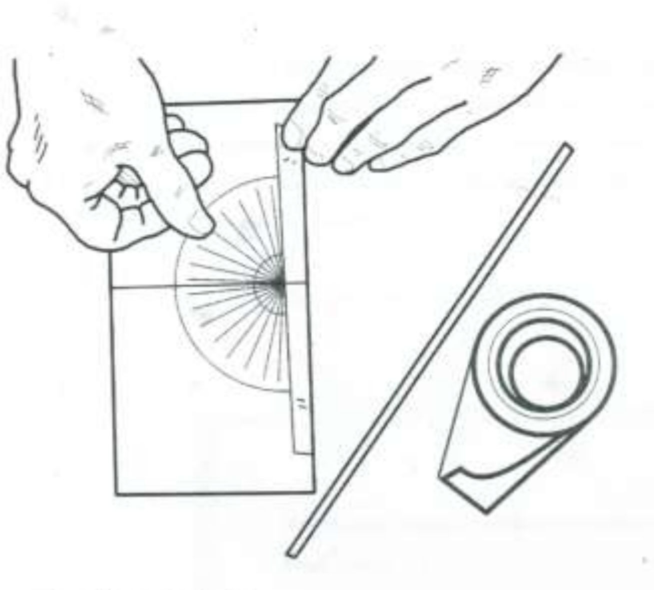


Figura: Teodolito em construção

3º. Agora precisamos prender o canudo com o barbante e o peso no transferidor. Tenha bastante atenção para que o canudo coincida com a linha de fé do transferidor (a linha que passa pelo 0º e pelo 180º), e o barbante já deverá estar preso ao canudo (amarrado) de maneira que o nó coincida com o centro do transferidor. As figuras abaixo ilustram isso.

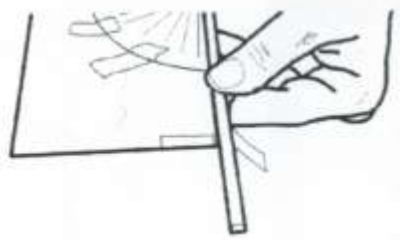


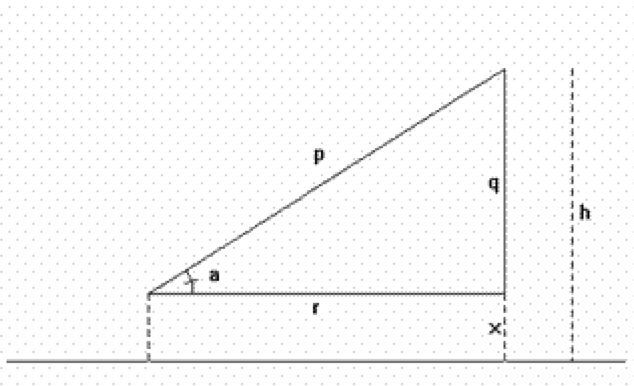
Figura: teodolito em construção


Figura: Teodolito em construção

Que tal medirmos a altura do prédio da escola?

Para medir a altura do prédio da escola, devemos seguir as seguintes orientações:

- a altura inacessível, representada pela letra h, sem desprezar a altura x do suporte (base) do teodolito.
- a distância do observador até a linha vertical que passa pelo ponto mais alto, representada por r.
- a hipotenusa (p) do triângulo retângulo.
- o ângulo a obtido no Teodolito.



2ª Etapa:

Agora, o objetivo é fazer o estudo de simetria no ciclo trigonométrico, variação de sinal do seno e cosseno, e relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou 4º quadrante com seu correspondente no 1º quadrante. Para posteriormente prosseguirmos ao estudo das equações trigonométricas. Essa etapa servirá como base para a etapa seguinte.

- **Recursos Utilizados**
  Quadro branco
  Caneta para quadro branco
  Lápis
  Folha impressa com as atividades

- **Duração**
  100 minutos

- **Pré-requisitos**
  Geometria no triângulo retângulo

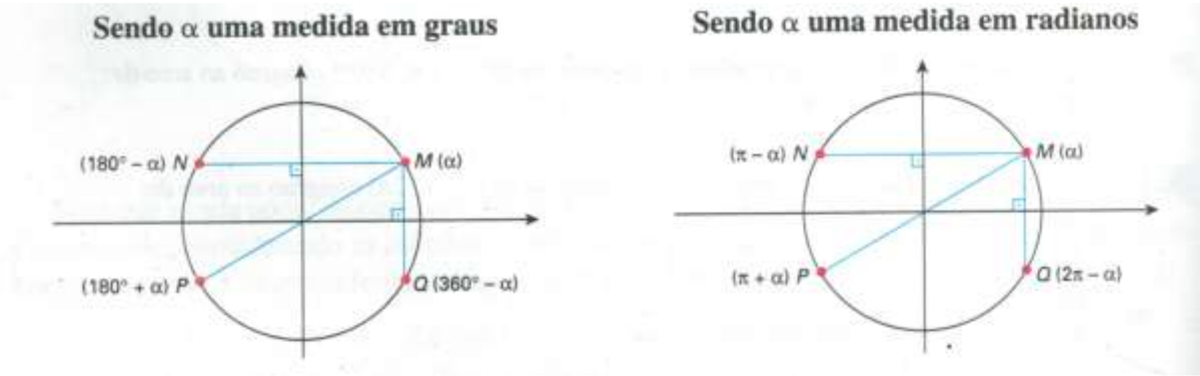
- **Habilidade**
  Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica.

ATIVIDADE 2

Simetrias

É de grande utilidade saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso ajudará, mais adiante, a calcular senos, cossenos e tangentes desses arcos.

Consideremos, por exemplo, o ponto M, da circunferência trigonométrica, associado à medida α. Pelo ponto M, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interceptam a circunferência nos pontos N, P, Q, respectivamente.

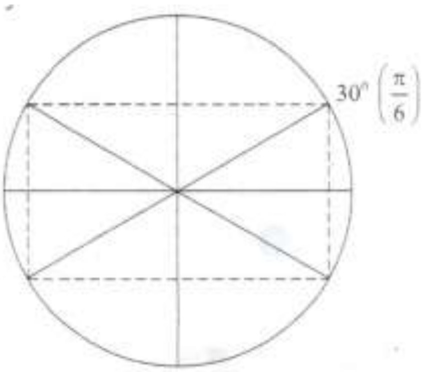


Os pontos N, P e Q são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto M.

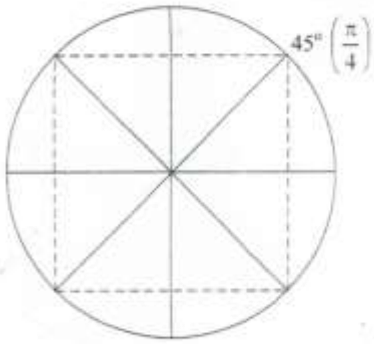
Exercícios

1. Obter os arcos simétricos no 2º, 3º e 4º quadrantes do arco do 1º quadrante de medida 30º $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 45º$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e 60º$\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

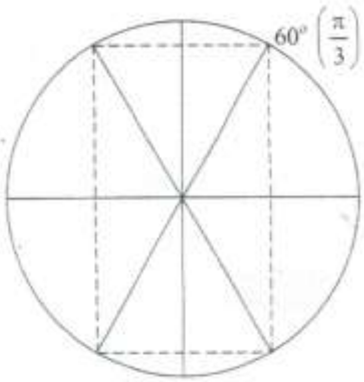
   a)



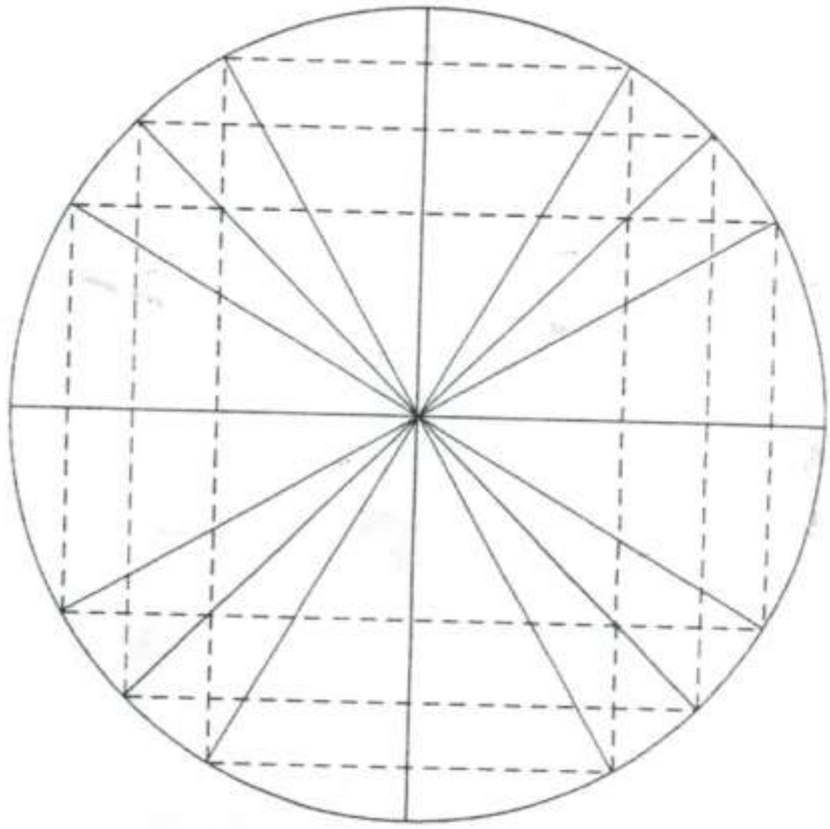
   b)



   c)



2. Com relação aos resultados obtidos no exercício anterior, complete a circunferência abaixo com as medidas, em graus e em radianos, das 17 principais medidas (0º, 30º, 45º,...,330º e 360º) dos arcos da primeira volta positiva da circunferência.



3ª Etapa:

O objetivo principal nesta etapa, é estudar a representação do seno e do cosseno no arco trigonométrico, bem como a variação de sinal do seno e cosseno, e relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou 4º quadrante com seu correspondente no 1º quadrante. Para posteriormente prosseguirmos ao estudo das equações trigonométricas.

- **Recursos Utilizados**
  Quadro branco
  Caneta para quadro branco
  Lápis
  Folha impressa com as atividades

- **Duração**
  100 minutos

- **Pré-requisitos**
  Geometria no triângulo retângulo
  Simetria no ciclo trigonométrico

- **Habilidade**
  Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico

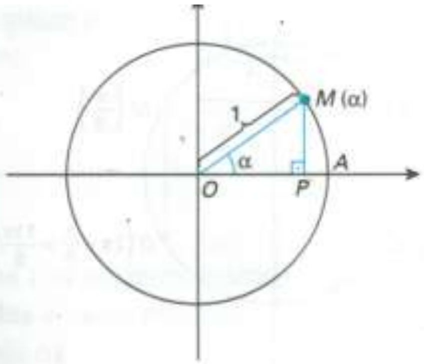
ATIVIDADE 3

Seno e Cosseno de um arco trigonométrico

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco AM de medida α, com $0º < \alpha < 90º$. No triângulo retângulo OMP, temos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

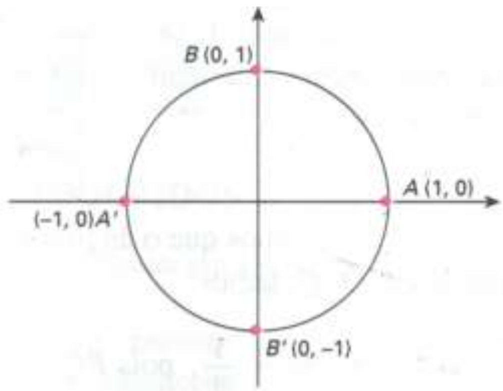
$$\text{sen } \alpha = \frac{MP}{1} = MP$$



Note que as medidas OP e MP são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto M.

Exemplo:

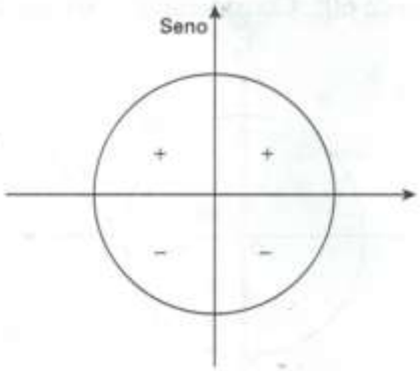
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' são:

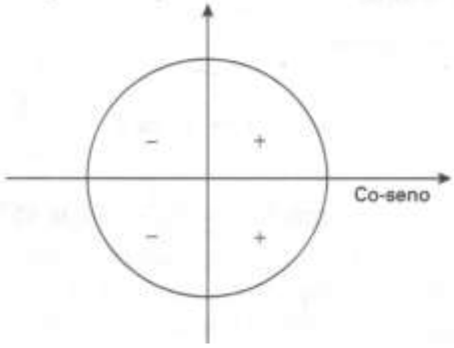


Considerando isso, complete a tabela abaixo:

Cos 0º =	Sen 0º =
Cos 90º =	Sen 90º=
Cos 180º =	Sen 180º =
Cos 270º =	Sen 270º =
Cos 360 =	Sen 360º =

Variação de sinal do seno e do cosseno





Redução ao 1º quadrante

O objetivo desse estudo é relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o cosseno do arco correspondente no 1º quadrante. Utilizaremos como auxílio a tabela de arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Observe que ela apresenta senos e cossenos de alguns arcos do 1º quadrante.

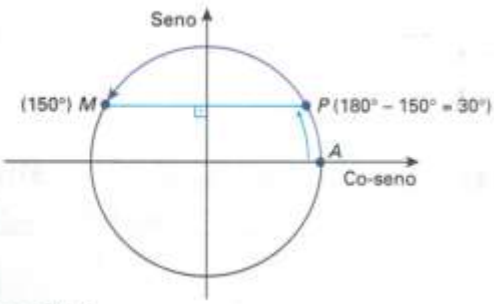
Exemplos:

1. Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

<u>Resolução</u>

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante. Traçando por M a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme a figura ao lado.

Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo, temos: $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, e $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



2. Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 240° e cos 240°.

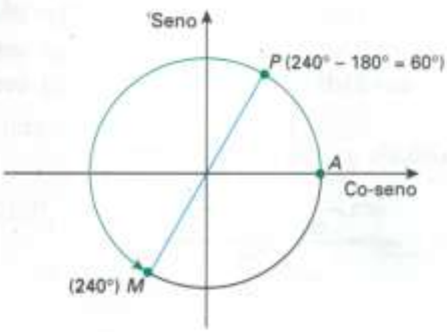
<u>Resolução</u>

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante. Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme a figura ao lado.

Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas.

Temos, então: $\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, e

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$



Exercícios

1. Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) Seno 120º e Cosseno 120º
b) Seno 210º e Cosseno 210º
c) Seno 300º e Cosseno 300º
d) Seno 135º e Cosseno 135º
e) Seno 225º e Cosseno 225º
f) Seno 315º e Cosseno 315º

2. Calcule o valor da expressão:

$$\boldsymbol{E = \frac{sen 90° \cdot cos\ 180° + cos\ 0° \ \cdot sen 270°}{sen^2 90° + \ cos^2 180°}}$$

3. Avaliação:

A Avaliação será feita através da observação no desempenho dos alunos durante a realização das atividades. Verificando a aprendizagem deles em relação aos conteúdos propostos. Espera-se que ao final das três etapas, o aluno compreenda a importância da trigonometria em nosso dia-a-dia, que ele saiba relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou 4º quadrante com seu correspondente no 1º quadrante e representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.

Todas as atividades realizadas pelos alunos serão lidas, comentadas e devolvidas.

4. Referências Bibliográficas

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto e Aplicações**. 2ª Ed. - São Paulo: Ática, 2013

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. 2ª Ed. – São Paulo: Moderna, 2013

PAIVA, Manoel**. Matemática: Paiva**. 2ª Ed. – São Paulo: Moderna, 2013

BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula**. 1ª.Ed. – São Paulo: FTD, 2003

http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/

http://aulasdematem.blogspot.com.br/2008/05/aplicao-da-trigonometria-no-nosso-dia.html

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br