

FUNDAÇÃO CECIERJ
FORMAÇÃO CONTINUADA
1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

PLANO DE TRABALHO
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PROFESSORA:
EDILEIZER DA SILVA PEREIRA
COLÉGIO ESTADUAL PEDRO BAPTISTA DE SOUZA

TUTOR: RODOLFO GREGÓRIO DE MORAES

NOVEMBRO DE 2014

Plano de Trabalho

Funções Trigonométricas

I) Introdução

A trigonometria é a parte da matemática que analisa a relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nela se baseia o estudo das funções trigonométricas relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos.

A aplicação da trigonometria se estende a vários campos do conhecimento, como: astronomia, meteorologia, eletricidade, mecânica, música, engenharia, economia, acústica, medicina, biologia, etc. Muitos desses campos de grande interesse do aluno.

Neste Plano de Trabalho, vamos, com o auxílio do software Geogebra e dos roteiros de ação, construir o gráfico da função seno e da função cosseno e analisá-los.

O estudo das funções trigonometrias requer conhecimento prévio das relações de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e do círculo trigonométrico.

II) Desenvolvimento

Objetivos:

- 1) Representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no círculo trigonométrico.
- 2) Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Atividade 1: Encontrando seno, cosseno e tangente de arcos múltiplos de 30° e 45°.

Duração: 100 minutos

Pré-requisitos: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis e círculo trigonométrico.

Material: Computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, laboratório de informática, folha xerocada com o resumo das atividades, quadro-branco, caneta e caderno.

Organização da sala: duplas

Desenvolvimento:

Faremos a construção da circunferência trigonométrica no Geogebra.

Passos para a construção

01) Com a tela do Geogebra aberta, construa uma circunferência trigonométrica de centro na origem (A) e passando pelo ponto B(1,0), utilizando a ferramenta *“círculo dados centro e um de seus pontos”* (6º menu de botões).

02) Mude a cor da circunferência traçada para rosa, clicando com o botão direito do mouse sobre a circunferência, selecionando a opção Propriedades-Cor.

03) Marque um ponto C qualquer sobre a circunferência e que pertença ao primeiro quadrante, utilizando a ferramenta *“novo ponto”* (2º menu de botões).

04) Oculte o rótulo do ponto C, clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto e desmarcando a opção *exibir rótulo*.

05) Insira o seguinte texto (10º menu de botões) na área de trabalho: *“C=”*+C.

06) Posicione o texto anterior (coordenadas do ponto C), próximo ao ponto C, clicando com o botão direito do mouse sobre o texto, selecionando a opção Propriedades-Posição-Origem: C.

07) Trace a reta perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto B, para isso utilizar a ferramenta *“reta perpendicular”* (4º menu de botões).

08) Encontre o ponto de interseção (D) entre a reta perpendicular anterior e o eixo x, utilizando a ferramenta *“interseção de dois objetos”* (2º menu de botões).

09) Oculte a reta perpendicular traçada no passo 7, clicando no círculo ao lado da equação dessa reta na janela algébrica.

10) Trace o segmento de reta definido pelo ponto C e pelo ponto D encontrado anteriormente, utilizando a ferramenta *“segmento definido por dois pontos”* (3º menu de botões).

11) Traceje o segmento CD, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, selecionando a opção Propriedades-Estilo.

12) Oculte o seu rótulo, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, desmarcando a opção *exibir rótulo*.

13) Trace a reta perpendicular ao eixo y que passa pelo ponto C, para isso use a ferramenta “*reta perpendicular*” (4º menu de botões).

14) Encontre o ponto de interseção (E) entre a reta perpendicular traçada anteriormente e o eixo y , utilizando a ferramenta “*interseção de dois objetos*” (2º menu de botões).

15) Oculte a reta perpendicular traçada no passo 13, traçando no círculo ao lado da equação dessa reta na janela algébrica.

16) Trace o segmento de reta definido pelos pontos C e E, utilizando a ferramenta “*segmento definido por dois pontos*” (3º menu de botões).

17) Traceje o segmento CE, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, selecionando a opção Propriedades-Estilo.

18) Oculte o seu rótulo, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, desmarcando a opção *exibir rótulo*.

19) Trace o segmento definido pelos pontos A e C e oculte o seu rótulo.

20) Trace o segmento AD, oculte seu rótulo e mude sua cor para azul e sua espessura para cinco.

21) Determine o comprimento do segmento AD, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.

22) Trace o segmento AE, oculte seu rótulo e mude sua cor para vermelho e sua espessura para cinco.

23) Determine o comprimento de AE, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.

24) Trace o ângulo BAC, através da ferramenta “*ângulo*” (8º menu de botões).

25) Insira o seguinte texto (10º menu de botões) na área de trabalho: “ α =” + α

26) Mude a cor do texto anterior para verde escuro.

27) Trace a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto B.

28) Trace a reta que passa pelo centro da circunferência e pelo ponto C, utilizando a ferramenta “*reta definida por dois pontos*” (3º menu de botões).

29) Traceje a reta anterior.

30) Marque o ponto de interseção (F) entre a reta que passa pelos pontos A e C (traçada no passo 28) e a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto B (traçada no passo 27).

31) Trace o segmento definido pelos pontos B e F, mude sua cor para verde e espessura para cinco.

32) Determine o comprimento do segmento anterior, selecionando a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” (8º menu de botões), e clicando sobre o segmento.

33) Amplie o desenho usando 12º menu de botões.

Atividades baseadas na construção feita

1) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter DÂC 45°. O raio da circunferência que você traçou é 1. Qual é o seno do ângulo DÂC (observe no gráfico)?

2) Qual é o cosseno?

3) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}45^\circ}{\cos45^\circ}$?

4) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo DÂC é 45°?

5) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter DÂC 30°. Qual é o seno do ângulo DÂC (observe no gráfico)?

6) Qual é o co-seno?

7) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}30^\circ}{\cos30^\circ}$?

8) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo DÂC é 30°?

9) Com o botão direito do mouse em C, arraste-o até obter DÂC 60°. Qual é o seno do ângulo DÂC (observe no gráfico)?

10) Qual é o co-seno?

11) Qual é o valor de $\frac{\text{sen}60^\circ}{\cos60^\circ}$?

12) Qual é o valor do segmento BF quando o ângulo DÂC é 60°?

Você já observou que o seno é definido no eixo y e o co-seno, no eixo x. A tangente é definida na reta perpendicular ao eixo x, passando pela origem da circunferência trigonométrica. Agora, observando os arcos que você formará na construção feita, encontre o seno, o co-seno e a tangente (observe com atenção, de acordo com a localização do arco no quadrante, os sinais das funções pedidas)

01) $\text{sen } 0^\circ =$ _____ $\cos 0^\circ =$ _____ $\text{tg } 0^\circ =$ _____

02) $\text{sen } 90^\circ =$ _____ $\cos 90^\circ =$ _____ $\text{tg } 90^\circ =$ _____

03) $\text{sen } 120^\circ =$ _____ $\cos 120^\circ =$ _____ $\text{tg } 120^\circ =$ _____

04) $\text{sen } 135^\circ =$ _____ $\cos 135^\circ =$ _____ $\text{tg } 135^\circ =$ _____

05) $\text{sen } 150^\circ =$ _____ $\cos 150^\circ =$ _____ $\text{tg } 150^\circ =$ _____

06) $\text{sen } 180^\circ =$ _____ $\cos 180^\circ =$ _____ $\text{tg } 180^\circ =$ _____

07) $\text{sen } 210^\circ =$ _____ $\cos 210^\circ =$ _____ $\text{tg } 210^\circ =$ _____

08) $\text{sen } 225^\circ =$ _____ $\cos 225^\circ =$ _____ $\text{tg } 225^\circ =$ _____

09) $\text{sen } 240^\circ =$ _____ $\cos 240^\circ =$ _____ $\text{tg } 240^\circ =$ _____

10) $\text{sen } 270^\circ =$ _____ $\cos 270^\circ =$ _____ $\text{tg } 270^\circ =$ _____

11) $\text{sen } 300^\circ =$ _____ $\cos 300^\circ =$ _____ $\text{tg } 300^\circ =$ _____

12) $\text{sen } 315^\circ =$ _____ $\cos 315^\circ =$ _____ $\text{tg } 315^\circ =$ _____

13) $\text{sen } 330^\circ =$ _____ $\cos 330^\circ =$ _____ $\text{tg } 330^\circ =$ _____

14) $\text{sen } 360^\circ =$ _____ $\cos 360^\circ =$ _____ $\text{tg } 360^\circ =$ _____

Nessa atividade, os alunos manusearão a construção feita e observarão, a cada arco encontrado, o comportamento das funções trigonométricas. É necessário dar atenção especial às tangentes não definidas de 90° e 270°.

A ideia é que as duplas conduzam a construção sozinhas, mas como é a primeira vez que manusearão o Geogebra por si só num computador (até então não era possível usar o laboratório) acredita-se que haverá um pouco de

dificuldade e por isso o professor orientará cada passo através da projeção com datashow.

Avaliação: Observação do professor e participação dos alunos na atividade.

Esta avaliação será contada como parte dos 2,0 pontos destinados a participação nas atividades da sala de aula.

Atividade 2: Construindo e Analisando o gráfico da função seno.

Duração: 100 minutos

Pré-requisitos: Conhecimento do círculo trigonométrico.

Recursos: Computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, laboratório de informática, folha xerocada com o resumo das atividades, quadro-branco, caneta e caderno.

Organização da sala: duplas

Desenvolvimento:

Faremos a construção da circunferência trigonométrica no Geogebra.

Passos para a construção

1) No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite $O=(0,0)$. O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.

2) Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique em “círculo dados centro e raio”(6º menu de botões) e clique no ponto O. Aberta a caixa de diálogo, digite 1 que é o raio do círculo trigonométrico.

3) Para marcar a origem do ciclo trigonométrico - $A(1,0)$ – vá ao campo de entrada e digite $A = (1,0)$, seguido de “enter”.

4) Proceda da mesma maneira para marcar os pontos $B=(-1,0)$, $C=(0,1)$ e $D=(0,-1)$, pontos limites dos quadrantes.

5) Marque o ponto AOE, clicando no botão “arco circular dados centro e dois pontos” (6º menu de botões) e sequencialmente nos pontos O, A e E, na

janela algébrica aparecerá a indicação “ $d=...$ ”, que representa o comprimento do arco AOE.

6) Digite no campo de entrada os pontos $G=(0,\sin(d))$ e $R=(d, \sin(d))$. Surgirão na tela os pontos G e R. O comprimento OG indica o seno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o seno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se. G move-se no intervalo de $[-1,1]$ no eixo y (seno) e R move-se no intervalo de uma volta (2π).

7) Digite agora no campo de entrada, a função $g(x)=\sin(x)$, seguido de “enter”.

Construção feita, o que você observou?

1) Descreva a relação entre o comprimento do segmento OG e o ponto R.

2) A abscissa do ponto R é o comprimento do arco AOE. Ao movimentar o ponto E no círculo, que valores a abscissa pode assumir?

3) No intervalo $[0,\pi]$ o seno é positivo ou negativo?

4) E no intervalo de $[\pi,2\pi]$ o seno é positivo ou negativo?

5) Observe o comportamento da função seno no gráfico e preencha a tabela:

Função seno	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

6) Qual é o arco de uma volta, do ciclo trigonométrico, que apresenta, na função seno,

a) o valor máximo?

b) o valor mínimo?

Após esta análise, será proposto que os alunos iniciem um arquivo novo no Geogebra e no campo “Entrada” lancem as funções: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin 2x$, $h(x)=\sin x/2$ e $j(x)=\sin x + 1$.

Para cada gráfico os alunos atribuirão uma cor diferente e analisarão quais foram as modificações ocorridas quando se alterou a função principal.

Serão analisados o domínio, a imagem e o período em cada caso.

Avaliação: Observação do professor e participação dos alunos na atividade.

Esta avaliação será contada como parte dos 2,0 pontos destinados a participação nas atividades da sala de aula.

Atividade 3: Construindo e Analisando o gráfico da função cosseno.

Duração: 100 minutos

Pré-requisitos: Conhecimento do círculo trigonométrico.

Recursos: Computador com o software Geogebra instalado, processador de multimídia, laboratório de informática, folha xerocada com o resumo das atividades, quadro-branco, caneta e caderno.

Organização da sala: duplas

Desenvolvimento:

Faremos a construção da circunferência trigonométrica no Geogebra.

Passos para a construção

1) No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite $O=(0,0)$. O programa marcará o ponto O , origem do sistema de eixos cartesianos.

2) Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique em “*círculo dados centro e raio*”(6º menu de botões) e clique no ponto O . Aberta a caixa de diálogo, digite 1 que é o raio do círculo trigonométrico.

3) Para marcar a origem do ciclo trigonométrico - $A(1,0)$ – vá ao campo de entrada e digite $A = (1,0)$, seguido de “*enter*”.

4) Proceda da mesma maneira para marcar os pontos $B=(-1,0)$, $C=(0,1)$ e $D=(0,-1)$, pontos limites dos quadrantes.

5) Marque o ponto AOE , clicando no botão “*arco circular dados centro e dois pontos*” (6º menu de botões) e sequencialmente nos pontos O , A e E , na

janela algébrica aparecerá a indicação “ $d=...$ ”, que representa o comprimento do arco AOE.

6) Digite no campo de entrada os pontos $G=(0,\cos(d))$ e $R=(d, \cos(d))$. Surgirão na tela os pontos G e R. O comprimento OG indica o seno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o seno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se. G move-se no intervalo de $[-1,1]$ no eixo y (seno) e R move-se no intervalo de uma volta (2π).

7) Digite agora no campo de entrada, a função $g(x)=\cos(x)$, seguido de “enter”.

O que você observou?

1) Descreva a relação entre o comprimento do segmento OH e o ponto S.

2) A abscissa do ponto S é o comprimento do arco AOE. Ao movimentar o ponto E no círculo, que valores a abscissa pode assumir?

3) No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ o co-seno é positivo ou negativo?

4) Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido decrescente, o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da abscissa de E vão aumentando ou diminuindo? E os respectivos co-senos estão aumentando ou diminuindo?

5) Faça essa mesma análise nos outros três quadrantes. Descreva o que você observou:

6) Observe o comportamento da função co-seno no gráfico que você construiu e preencha a tabela:

Função co-seno	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

6) Qual é o arco de uma volta, do ciclo trigonométrico, que apresenta, na função co-seno,

a) o valor máximo?

b) o valor mínimo?

Após esta análise, será proposto que os alunos iniciem um arquivo novo no Geogebra e no campo “Entrada” lancem as funções: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$, $h(x) = \cos x/2$ e $j(x) = \sin \cos x + 1$.

Para cada gráfico os alunos atribuirão uma cor diferente e analisarão quais foram as modificações ocorridas quando se alterou a função principal.

Serão analisados o domínio, a imagem e o período em cada caso.

Avaliação Observação do professor e participação dos alunos na atividade.

Esta avaliação será contada como parte dos 2,0 pontos destinados a participação nas atividades da sala de aula.

Atividade 4: Construindo e Analisando o gráfico da função tangente.

Duração: 100 minutos

Pré-requisitos: Seno de ângulos agudos e círculo trigonométrico.

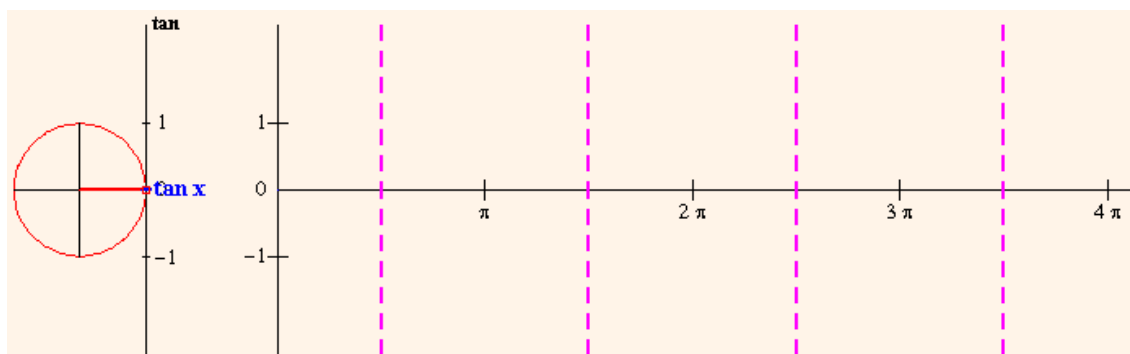
Recursos: Notebook com o software Geogebra instalado, data-show, folha xerocada com o resumo das atividades, quadro-branco, caneta e caderno.

Organização da sala: duplas

Desenvolvimento:

Relembrar a atividade 1 onde os alunos puderam constatar a relação $\tan x = \sin x / \cos x$.

Após propor a animação



Disponível em http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap04_Calc1.html

A partir da animação levar o aluno a perceber que o eixo das tangentes, como o próprio nome propõe, é tangente ao círculo trigonométrico e é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas tendo também como o origem o ponto (1,0).

Através de um print da tela, congelar a animação no momento que a reta auxiliar está sobre o primeiro quadrante.

Neste momento mostrar que a tangente de um arco é determinada pela reta auxiliar (reta vermelha que se move na animação), que passa pelo centro O e pela extremidade desse arco, marcando um ponto no eixo das tangentes.

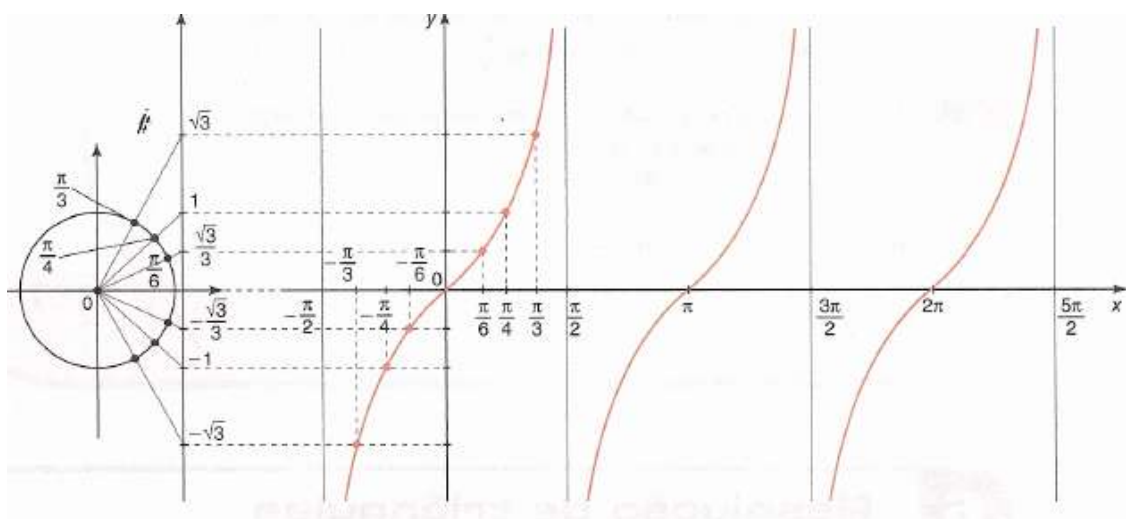
Continuando com a animação perguntar aos alunos que característica diferente eles observam nesse gráfico em relação aos gráficos da função seno e cosseno.

O objetivo dessa questão é que os alunos percebam que a função tangente não é contínua.

A partir deste questionamento mostrar através da animação que a tangente dos arcos com extremidades nos pontos (0,1) e (0,-1) não se define, pois para esses arcos a reta auxiliar torna-se paralela ao eixo das tangentes, não havendo, assim, intersecção.

Desafio:

Observe o gráfico da função tangente $f(x)=\operatorname{tg} x$



Determine:

- O domínio da função
- O conjunto imagem da função
- O período da função

Avaliação: Observação do professor e participação dos alunos na atividade.

Esta avaliação será contada como parte dos 2,0 pontos destinados a participação nas atividades da sala de aula.

Atividade 5: Revisar e assimilar

Duração: 100 minutos

Material: Folha de atividades

Pré-requisitos: Funções trigonométricas

Organização da turma: Dupla

Exercícios

01. Complete a tabela abaixo com os valores que você já conhece para seno e cosseno de um ângulo:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sen α								
Cos α								

02. Da tabela acima retire dois valores e teste para a Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

03. Verifique em qual quadrante se encontra:

- a) 240°
- b) 800°

04. Complete a tabela abaixo com os valores que você já conhece para a tangente:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Tang								

05. Determine o valor das expressões:

a) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$

b) $\cos 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$

06 . Determine o valor de $(\operatorname{tg} 0^\circ + \sin 45^\circ)^2 - (\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)^2$

07. Na tabela abaixo, preencher as células que estão em branco, definindo a medida do arco e o valor do seno, cosseno e tangente.:

Arco	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Não definida
	120°			
	135°			
	150°			
π	180°	0	-1	0
	210°			
	225°			
	240°			
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	Não definida
	300°			
	315°			
	330°			
2π	360°	0	1	0

Avaliação: Correção das atividades e análise dos erros,

Esta atividade será contada como 2,0 pontos do total do bimestre.

Referências bibliográficas

BARROSO, Juliane (Org). **Conexões com a Matemática**. 1ª. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Caderno de Atividades Autorreguladas

Disponível em:

http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/cm/cm_70_10_1S_4.pdf

Acesso em 03 de novembro de 2014.

Funções Algébricas e trigonométricas

Disponível em: http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap04_Calc1.html

Acesso em 03 de novembro de 2014.

Roteiros de Ação: Trigonometria na Circunferência. Formação Continuada, projeto SEEDUC/CECERJ, em <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br> . Rio de Janeiro: 3º bimestre, 2012.

Roteiros de Ação: Trigonometria na Circunferência. Formação Continuada, projeto SEEDUC/CECERJ, em <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br> . Rio de Janeiro: 3º bimestre, 2014.