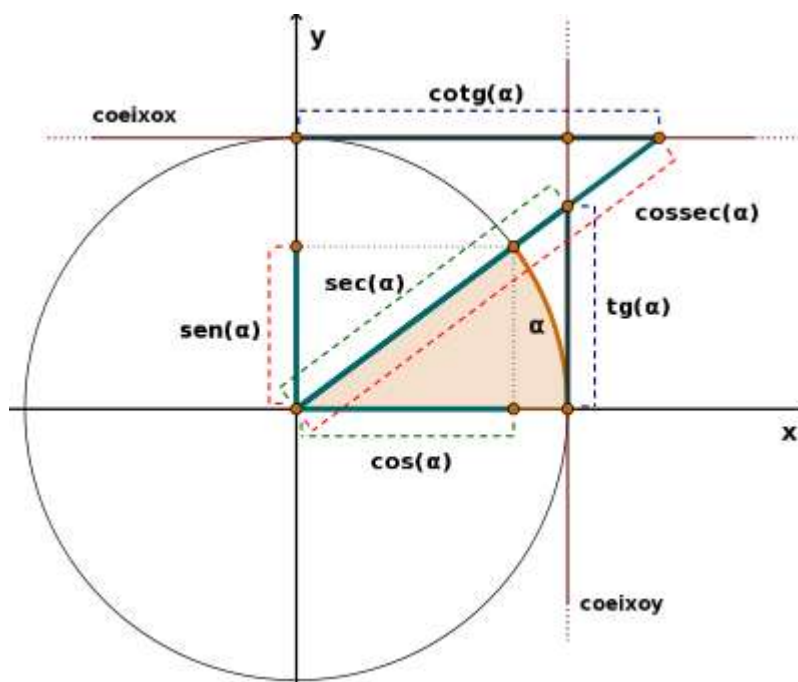


Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano – 4º Bimestre/2014
Plano de Trabalho

Trigonometria na circunferência



Tarefa 1

Cursista: Wendel do Nascimento Pinheiro

Tutor: Rodolfo Gregório de Moraes

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	03
DESENVOLVIMENTO	04
AVALIAÇÃO	22
FONTES DE PESQUISA	23

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade dos conteúdos denominados “Trigonometria na Circunferência” para resolução de problemas que através de assuntos do cotidiano visando um melhor entendimento.

Frequentemente presenciamos situações que de uma forma ou de outra é inserido o conceito de trigonometria na circunferência, se torna interessante e necessário conhecer o comportamento das principais funções trigonométricas e a sua aplicabilidade já que atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos. Sua aplicação se estende na outros campos da matemática, como a Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil, entre outros.

No geral, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para explicações e fixação da aprendizagem aliado a realização de avaliação escrita.

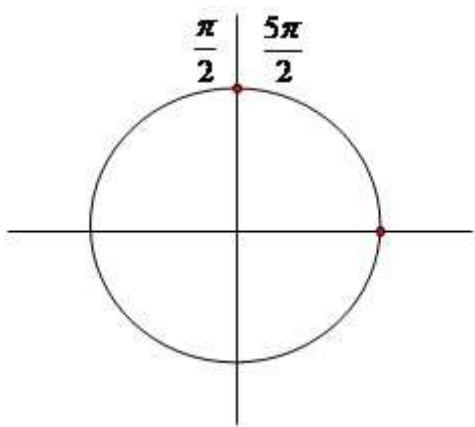
DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 : Conhecendo seno, cosseno e tangente de um arco qualquer

- **Habilidade Relacionada:** Representar o seno, o co-seno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- **Pré-requisitos:** Conhecer o círculo trigonométrico.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Individual
- **Objetivos:** Apresentar aos alunos os principais valores de seno, cosseno e tangente de um arco.
- **Metodologia adotada:** Será ministrado conteúdos direcionados ao entendimento do aluno para que ele perceba alguns dos principais valores do Seno, Cosseno e Tangente de um arco qualquer expondo suas características e ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

No círculo trigonométrico temos arcos que realizam mais de uma volta, considerando que o intervalo do círculo é $[0, 2\pi]$, por exemplo, o arco dado pelo número real $x = 5\pi/2$, quando desmembrado temos: $x = 5\pi/2 = 4\pi/2 + \pi/2 = 2\pi + \pi/2$. Note que o arco dá uma volta completa ($2\pi = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$), mais um percurso de $1/4$ de volta ($\pi/2 = 180^\circ/2 = 90^\circ$). Podemos associar o número $x = 5\pi/2$ ao ponto P da figura, o qual é imagem também do número $\pi/2$. Existem outros infinitos números reais maiores que 2π e que possuem a mesma imagem. Observe:



$9\pi/2 = 2$ voltas e $1/4$ de volta

$13\pi/2 = 3$ voltas e $1/4$ de volta

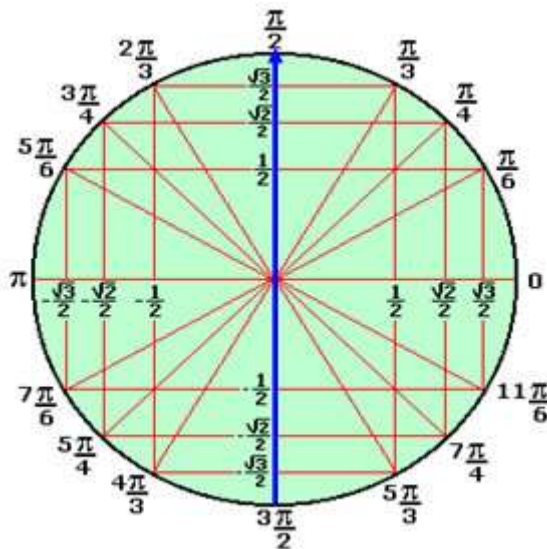
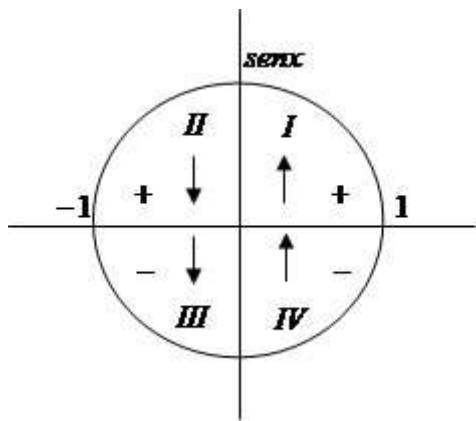
$17\pi/2 = 4$ voltas e $1/4$ de volta

Podemos generalizar e escrever todos os arcos com essa característica na seguinte forma: $\pi/2 + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. E de uma forma geral abrangendo todos os arcos com mais de uma volta, $x + 2k\pi$.

Estes arcos são representados no plano cartesiano através de funções circulares como: função Seno, função Cosseno e função Tangente.

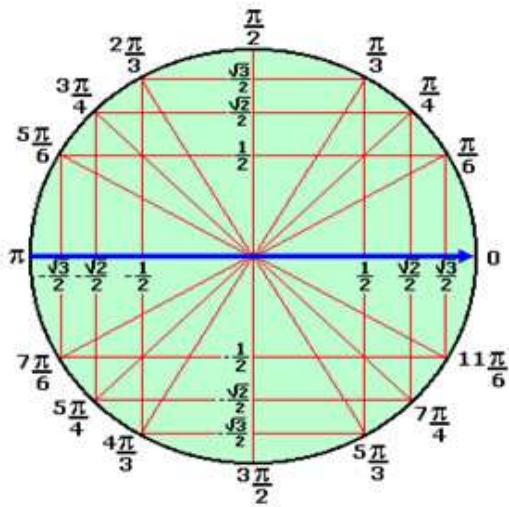
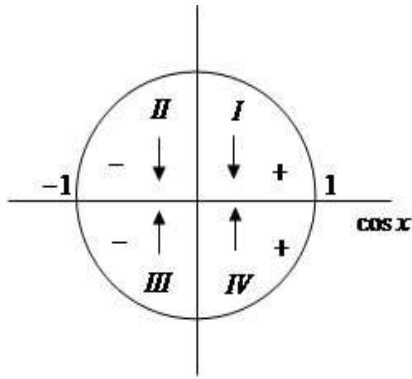
Características da função Seno

É uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu seno, então $f(x) = \text{sen}x$. O sinal da função $f(x) = \text{sen}x$ é positivo no 1º e 2º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 3º e 4º quadrantes. Observe:



Características da função Cosseno

É uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu cosseno, então $f(x) = \text{cos}x$. O sinal da função $f(x) = \text{cos}x$ é positivo no 1º e 4º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 2º e 3º quadrantes. Observe:

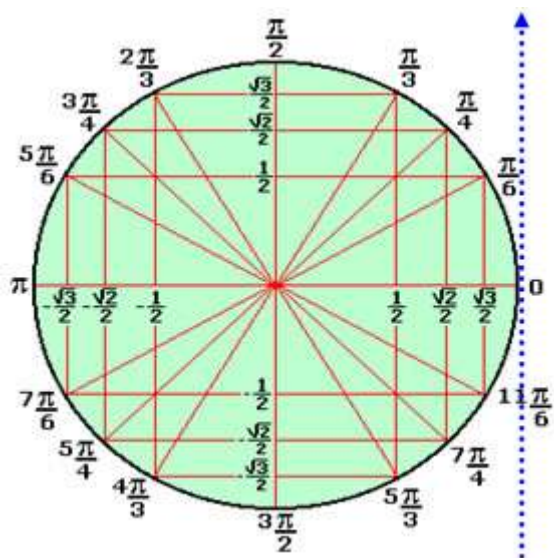
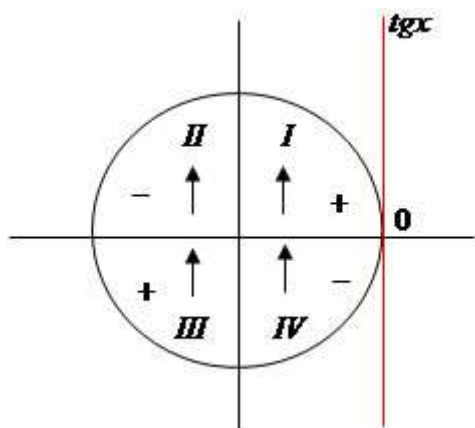


Características da função Tangente

É uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x a sua tangente, então $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Sinais da função tangente:

- Valores positivos nos quadrantes ímpares.
- Valores negativos nos quadrantes pares.
- Crescente em cada valor.



Exercícios:

- 1) Complete a tabela abaixo com os valores que você já conhece para seno e cosseno e tangente de um ângulo:

	30 °	45 °	60 °	90 °	180 °	270 °	360 °	720 °
Seno								
Cos								
Tan								

- 2) Determine o valor das expressões:

a) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$

b) $\cos 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$

3) Determine o valor de $(\operatorname{tg} 0^\circ + \sin 45^\circ)^2 - (\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)^2$

- 4) Observe as afirmações a seguir:

I – O seno de um arco tem resultado positivo no 2º e no 3º quadrantes;

II – A tangente de um arco é sempre positiva

III – O cosseno de um arco é negativo no 1º quadrante e no 4º quadrante.

Responda:

(A) Todas as afirmativas são verdadeiras

(B) Todas as afirmativas são falsas

(C) Apenas a opção II é verdadeira

(D) Apenas a opção III é verdadeira

(E) As opções I e II são verdadeiras

6) Podemos afirmar que a tangente de um ângulo será positiva em quais quadrantes?

(A) 1º e 2º quadrantes

(B) 1º e 3º quadrantes

(C) 2º e 3º quadrantes

(D) 3º e 4º quadrantes

(E) 1º e 4º quadrantes

Atividade 2 : Resolvendo equações trigonométricas

- **Habilidade Relacionada:** Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.
- **Pré-requisitos:** Conhecer o círculo trigonométrico.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Individual
- **Objetivos:** Resolver equações trigonométricas simples no intervalo de $[0, 2\pi]$
- **Metodologia adotada:** Serão ministrados conteúdos direcionados ao entendimento do aluno para que se desenvolva a capacidade de resolver equações trigonométricas em um determinado intervalo e ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

Equações Trigonométricas

Quando encontramos função trigonométrica da incógnita ou função trigonométrica de alguma função da incógnita em pelo menos um dos membros de uma equação, dizemos que esta equação é trigonométrica.

Exemplos:

1) $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ e $\sin 2x = \cos^2 x$ são equações trigonométricas.

2) $x + (\operatorname{tg} 30^\circ) \cdot x^2$ e $x + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ não são equações trigonométricas.

Dizemos que r é uma raiz ou solução da equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ se r for elemento do domínio de f e g e se $f(r) = g(r)$ for verdadeira.

Na equação $\sin x - \sin \frac{3\pi}{2} = 0$, por exemplo, os números $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ são algumas de suas raízes e os números $\frac{\pi}{2}$ e π não o são.

O conjunto S de todas as raízes da equação é o seu conjunto solução ou conjunto verdade. Quase todas as equações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das três equações seguintes:

$$\sin x = \sin a$$

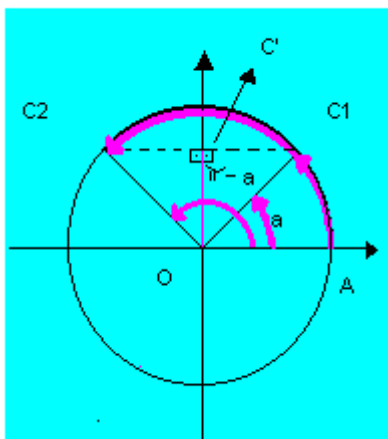
$$\cos x = \cos a$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$$

Estas são as equações trigonométricas elementares ou equações trigonométricas fundamentais.

RESOLUÇÃO DA 1ª EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

Ela baseia-se no fato de que, se dois arcos têm o mesmo seno, então eles são côngruos ou suplementares.

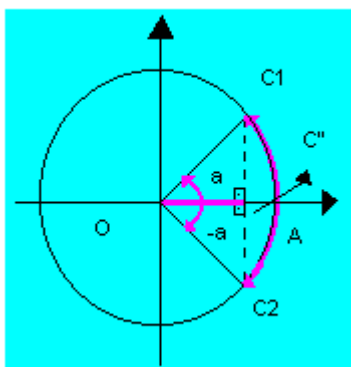


Logo, podemos escrever que:

$$\text{sen } x = \text{sen } a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

O conjunto solução dessa equação será, portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})\}$$



Logo, podemos escrever que:

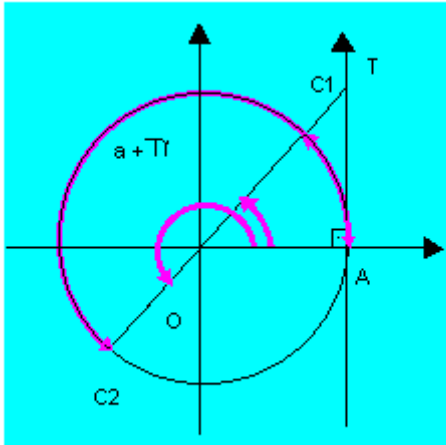
$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

O conjunto solução dessa equação será, portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})\}$$

RESOLUÇÃO DA 3ª EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

Ela baseia-se no fato de que, se dois arcos têm a mesma tangente, então eles são côngruos ou têm suas extremidades simétricas em relação ao centro do ciclo trigonométrico.



Logo, podemos escrever que:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

O conjunto solução dessa equação será, portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = a + k\pi (k \in \mathbb{Z})\}$$

Exercícios resolvidos

1) Resolver a equação $2.\operatorname{sen}(3x) + 1 = 0$

Resolução:

Temos que $2.\operatorname{sen}(3x) + 1 = 0$

Uma solução é $3x = 7\pi/6$ rad, pois $\operatorname{sen} 7\pi/6 = -1/2$. Assim, temos: $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 7\pi/6$

Então: $3x = 7\pi/6 + 2k\pi$ ou $3x = -\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$.

$$x = 7\pi/18 + 2k\pi/3 \text{ ou } x = -\pi/18 + 2k\pi/3$$

Concluimos que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = 7\pi/18 + 2k\pi/3 \text{ ou } x = -\pi/18 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}$$

2) Encontre a solução da equação $\cos x + 1 = 0$

Resolução:

Temos que $\cos x = -1$. Então $x = \pi \text{ rad}$ é uma solução, pois $\cos \pi = -1$.

Assim, $\cos x = \cos \pi$

Como os arcos de medidas $\pi \text{ rad}$ e $-\pi \text{ rad}$ possuem a mesma extremidade, o conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3) Encontre a solução da equação $\text{tg } x = \sqrt{3}$

Resolução:

Uma solução é $x = \pi/3 \text{ rad}$, pois $\text{tg } \pi/3 = \sin \pi/3 / \cos \pi/3 = \sqrt{3}/2 / 1/2 = \sqrt{3}$

Assim sendo, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

4) Ache o o conjunto solução da equação $\sin(5x) + \sin(2x) = 0$

Resolução:

Observe que é possível transformar o 1º membro em um produto; além disso, o 2º membro é zero. Assim sendo, lembrando que $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$, temos:

$$2 \cdot \sin \frac{5x+2x}{2} \cdot \cos \frac{5x-2x}{2} = 0 \quad \blacktriangleright \quad \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0 \quad \blacktriangleright \quad \sin \frac{7x}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{3x}{2} = 0$$

Para $\sin \frac{7x}{2} = \sin 0$, temos: $\frac{7x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Portanto: $7x = 2k\pi \quad \blacktriangleright \quad x = 2k\pi / 7, k \in \mathbb{Z}$

Para $\cos \frac{3x}{2} = \cos \pi/2$, temos: $\frac{3x}{2} = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Então: } 3x = \pi + 2k\pi \quad \blacktriangleright \quad x = \pi/3 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}.$$

O conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/3 + 2k\pi/3 \text{ ou } x = 2k\pi/7, k \in \mathbb{Z}\}$

Obs: esse mesmo problema poderia ser resolvido assim:

$$\sin(5x) + \sin(2x) = 0 \quad \blacktriangleright \quad \sin(5x) = -\sin(2x)$$

como: $-\sin(2x) = \sin(-2x)$ desse modo temos:

$$5x = -2x + 2k\pi \text{ ou } 5x = \pi - (-2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ daí obtemos:}$$

$$x = 2k\pi/7 \text{ ou } x = \pi/3 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios:

1) Resolva as equações.

a) $\cos^2 x = 1$.

b) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

c) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x \in [0, 2\pi]$.

e) $4\sin t - \sqrt{3} = 2\sin t, t \in [0, 2\pi]$.

f) $\cos(2x) = \sin(3x)$, [Dica: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$].

g) $\sin x + 2\sin x \cos x = 0$.

h) $3(\tan^2 x - 1) = 2\sqrt{3}\tan x$.

i) $2\cos^2 \alpha + 11\cos \alpha = -5$.

2) (UCSAL-BA) Se $x \in [0, \pi]$ a equação $8\sin^2 x - 4 = 0$ tem duas soluções reais e distintas a e b. Sabendo que a > b, é verdade que:

a) $a = 3b$

b) $a = 2b$

c) $a + b = \frac{\pi}{2}$

d) $a + b = \frac{\pi}{3}$

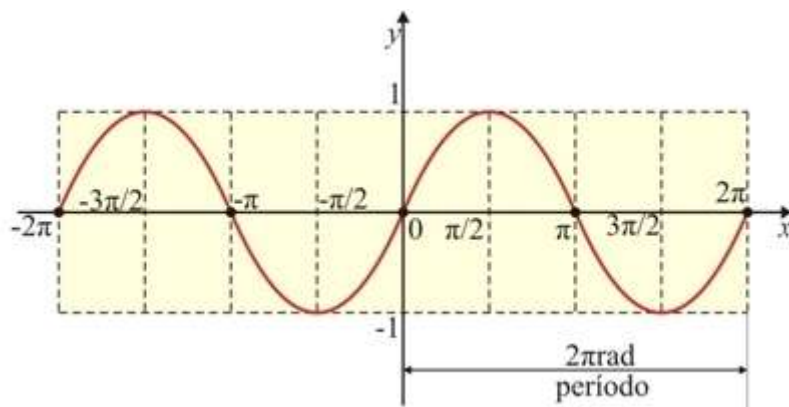
e) $a - b = \frac{\pi}{6}$

Atividade 3 : Esboçando gráficos das funções trigonométricas

- **Habilidade Relacionada:** Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
- **Pré-requisitos:** Conhecer o círculo trigonométrico, plano cartesiano e construção de gráficos
- **Tempo de Duração:** 100 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades (Exercício de fixação), lápis ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Individual
- **Objetivos: Construir e** Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
- **Metodologia adotada:** Serão ministrados conteúdos direcionados ao entendimento do aluno para que se desenvolva a capacidade de construir e identificar o gráfico das principais funções trigonométricas e ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

Gráfico das funções seno, cosseno e tangente

O gráfico da função seno, no plano cartesiano, será uma curva denominada Senóide. Atribuindo valores ao arco x , pode-se chegar ao gráfico.



Propriedades:

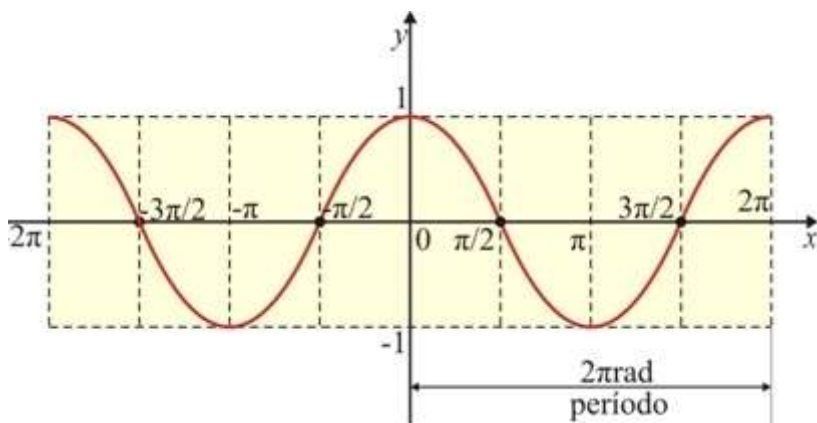
- Domínio: \mathbb{R}
- Imagem: $[-1;1]$
- Período: $2\pi rad$

Função Co-seno

Dado um ângulo cuja medida é dada em radianos é x , chamamos de função co-seno à função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número $(\cos x) \in \mathbb{R}$. Indicamos essa função por:

$$f(x) = \cos(x)$$

O gráfico da função co-seno, no cartesiano, será uma curva denominada co- Senóide. Atribuindo valores ao arco x , pode-se chegar ao gráfico.



Propriedades:

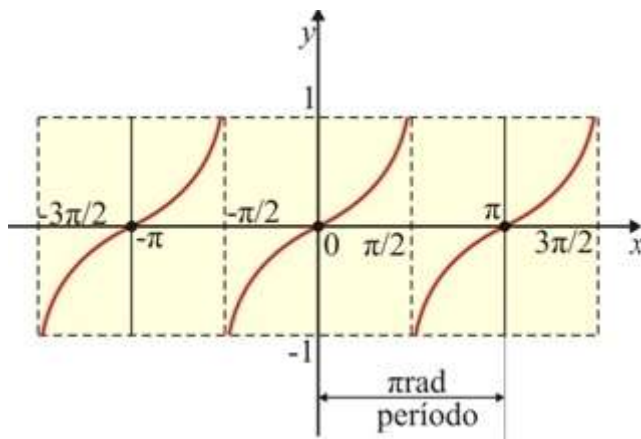
- Domínio: \mathbb{R}
- Imagem: $[-1;1]$
- Período: $2\pi rad$

Função Tangente

Dado um ângulo cuja medida é dada em radianos é x , chamamos de função tangente à função que associa a cada $x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k\pi$ o número $(\operatorname{tg} x) \in \mathbb{R}$. Indicamos essa função por:

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

O gráfico da função tangente, no cartesiano, será uma curva denominada tangentóite. Atribuindo valores ao arco x , pode-se chegar ao gráfico.



Propriedades:

- Domínio: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$
- Imagem: \mathbb{R}
- Período: πrad

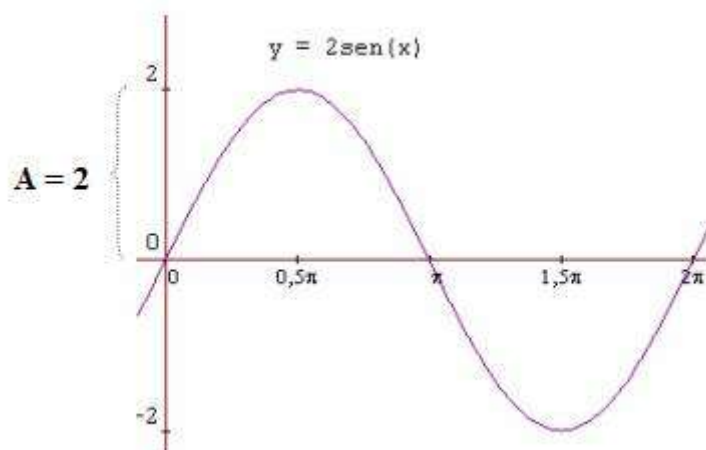
Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = 2\text{sen } x$.

Resolução

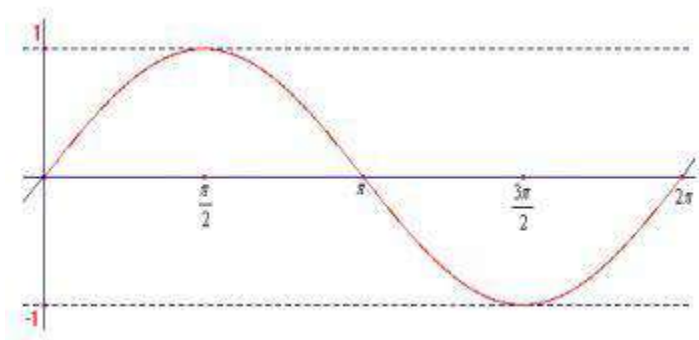
Para iniciar, precisamos construir uma tabela, definida no intervalo $[0, 2\pi]$

x	senx	2.senx	ponto
0	0	0	(0,0)
$\frac{\pi}{2}$	1	2	$(\frac{\pi}{2}, 2)$
π	0	0	$(\pi, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2	$(\frac{3\pi}{2}, -2)$
2π	0	0	$(2\pi, 0)$



Exercícios:

- 1) Construir o gráfico da função $y = 3 \cdot \cos x$, sendo $[0, 2\pi]$
- 2) Construir o gráfico a função $y = \sin x + \cos x$, sendo $[0, 2\pi]$
- 3) Determine o período e esboce o gráfico das seguintes funções:
 - (a) $f(x) = 4 \cos(x)$.
 - (b) $f(x) = 2 - \sin(x)$.
 - (c) $f(x) = 3 \cos + x$
- 4) Qual das funções abaixo melhor representa o gráfico?



- (A) $f(x) = \cos x$
- (B) $f(x) = \operatorname{tg} x$
- (C) $f(x) = 2 \cos x$
- (D) $f(x) = \sin x + 1$
- (E) $f(x) = \sin x$

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas (exercícios de fixação), a ser realizadas em dupla ou individual, são meios para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser pontuada.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porém, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) servirá para a investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano que envolva a trigonometria na circunferência e os outros tópicos estudados.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas 1001 e 1003 do Colégio Estadual Amazonas no ano letivo em curso (2014) e o grau de conhecimento dos alunos. Informo que, infelizmente, não consta de atividades que envolvam programas de geometria ou utilização do computador porque momentaneamente esses recursos estão indisponíveis na instituição, o que dificulta trabalhos desse tipo.

FONTES DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Trigonometria na Circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º bimestre – disponível em <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=263>

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010

Endereços eletrônicos acessados de 22/10/2014 a 04/11/2014:

<http://www.brasilecola.com/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm>

<http://www.somatematica.com.br/emedio/equacoest/equacoest2.php>

http://tudodeconcursosvestibulares.blogspot.com.br/p/blog-page_3.html

<http://www.infoescola.com/matematica/funcoes-trigonometricas/>

http://matematicatrigonometria2b.blogspot.com.br/2011/08/funcoes-trigonometricas-seno-cosseno-e_23.html