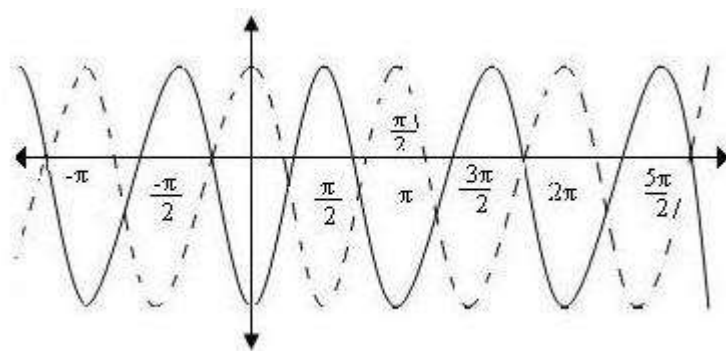


FORMAÇÃO CONTINUADA

# MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ / CONSÓRCIO CEDERJ  
Matemática - 1º ano - 4º Bimestre /2014  
Plano de Trabalho-2

## ***FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS***



**Cursista** - Isa Louro Delbons

**Grupo** - 02

**Tutor** - Rodolfo Gregório de Moraes

**“Um matemático é uma máquina  
para transformar café em teoremas.”  
Paul Erdos**

# S u m á r i o

INTRODUÇÃO----- 04

DESENVOLVIMENTO -- -----05

AVALIAÇÃO ----- 19

FONTES DE PESQUISA -----20

# INTRODUÇÃO

Existem funções periódicas particulares que modelam matematicamente fenômenos periódicos. Entre essas, as funções periódicas mais importantes são as trigonométricas. Uma das formas elementares de introduzir as funções trigonométricas é utilizar o chamado Círculo Trigonométrico.

A temática abordada será o estudo das funções trigonométricas, de forma mais específica das funções seno, cosseno e tangente. As atividades envolvendo funções trigonométricas desenvolvidas no computador são eficientes principalmente quanto à retenção dos conceitos envolvidos e também porque por meio de programas gráficos os alunos podem desenvolver atividades exploratórias e realizar descobertas por eles próprios.

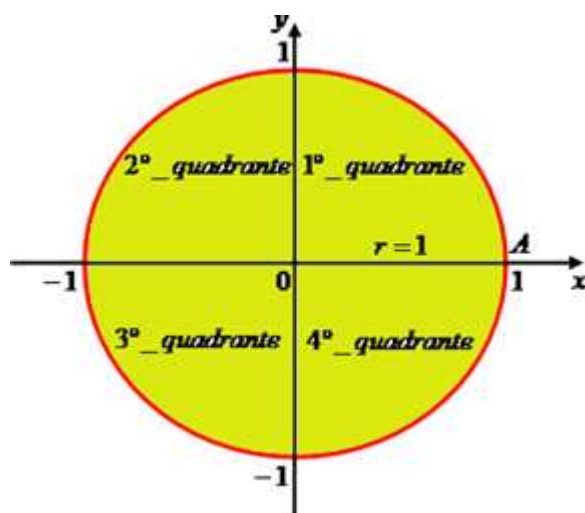
Durante o planejamento e realização das atividades da sequência de ensino, procurou-se principalmente desenvolver a compreensão de conceitos e estratégias matemáticas, oferecendo a oportunidade de ampliar os conhecimentos sobre Funções Trigonométricas, estimular a interação entre os alunos e o professor, por meio da troca de ideias e discussões com o intuito de expandir os conhecimentos já adquiridos em sala de aula.

O plano será desenvolvido em doze aulas de cinquenta minutos mais dois tempos para avaliação do conteúdo ministrado.

Haverá também ao final de cada aula um tempo para fixação do conteúdo dado.

## Conhecendo o Círculo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada, com raio unitário, associada a um sistema de coordenadas cartesianas. O centro da circunferência coincide com a origem do sistema cartesiano. Dessa forma, o círculo fica dividido em quatro quadrantes, identificado de acordo com o sentido anti-horário a partir do ponto A.



Considerando  $x$  a medida de um arco no ciclo trigonométrico, então os valores de  $x$ , tais que  $0^\circ < x < 360^\circ$ , e  $0 < x < 2\pi$  estão presentes nos seguintes quadrantes:

Grau

Radianos

*Primeiro quadrante:  $0^\circ < x < 90^\circ$*

*Primeiro quadrante:  $0 < x < \pi/2$*

*Segundo quadrante:  $90^\circ < x < 180^\circ$*

*Segundo quadrante:  $\pi/2 < x < \pi$*

*Terceiro quadrante:  $180^\circ < x < 270^\circ$*

*Terceiro quadrante:  $\pi < x < 3\pi/2$*

*Quarto quadrante:  $270^\circ < x < 360^\circ$*

*Quarto quadrante:  $3\pi/2 < x < 2\pi$*

É importante conhecer a localização dos ângulos nos quadrantes, isto facilitará a construção dos arcos trigonométricos, pois cada ponto no ciclo está associado a um arco.

Por exemplo:

*O arco de medida  $\pi/6$  rad. ou  $30^\circ$  está localizado no 1º quadrante.*

O arco de medida  $3\pi/4$  rad. ou  $135^\circ$  está localizado no 2º quadrante.

O arco de medida  $7\pi/6$  rad. ou  $210^\circ$  está localizado no 3º quadrante.

O arco de medida  $5\pi/3$  rad. ou  $300^\circ$  está localizado no 4º quadrante.

## Simetria no ciclo trigonométrico

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que eles são **arcos simétricos**.

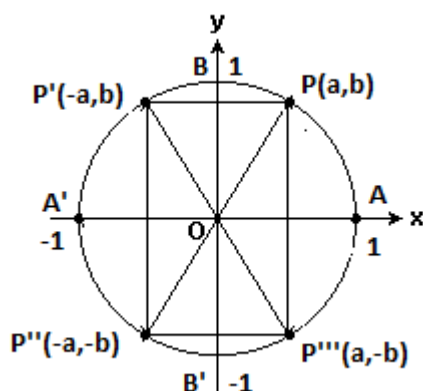


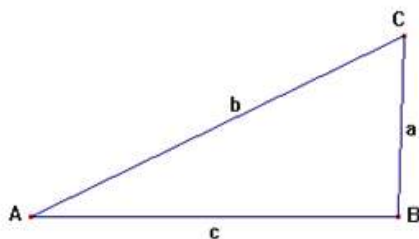
Imagem feita pela autora

## Seno, cosseno e tangente

### Seno de um arco

#### Observação:

Lembre-se que seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

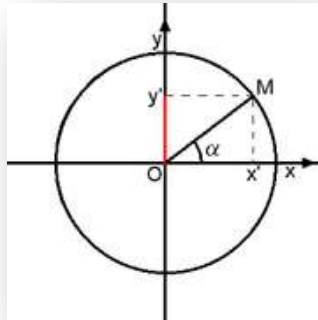


a → medida do cateto oposto  
b → medida da hipotenusa

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b}$$

## Seno de um Arco

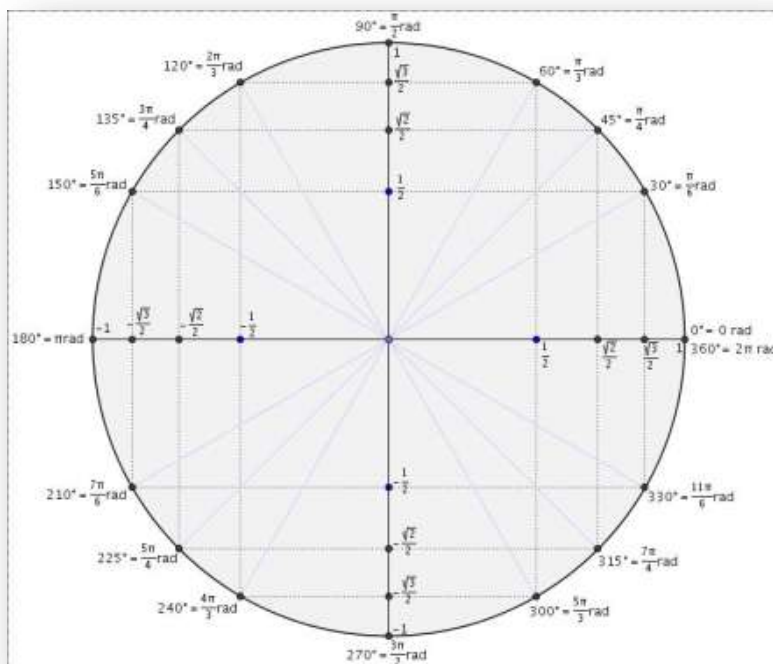
É a ordenada da extremidade desse arco na circunferência trigonométrica. Isto é, a medida destacada em vermelho, de O até y'.



Quando você estudou trigonometria no triângulo retângulo, aprendeu o seno dos ângulos notáveis.

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

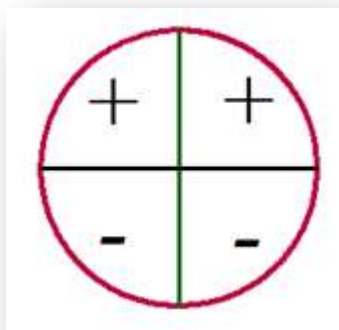
Estes valores irão servir para os ângulos em graus e radianos e também para os seus simétricos. E usaremos a simetria vertical.



Repare que para os valores de  $0^\circ$  e  $180^\circ$  que não há o eixo dos senos. Assim, os valores de seno somente existirão para  $90^\circ$  e  $270^\circ$ . Então:

- $\text{Sen } 90^\circ = 1$
- $\text{Sen } 270^\circ = -1$
- $\text{Sen } 180^\circ = 0$
- $\text{Sen } 360^\circ = 0$

O sinal do Seno depende da região do ciclo trigonométrico que se está avaliando, uma vez que a ordenada muda de sinal.



### **Variação da função seno**

Você irá perceber melhor esta variação quando utilizar o software para construir o ciclo trigonométrico.

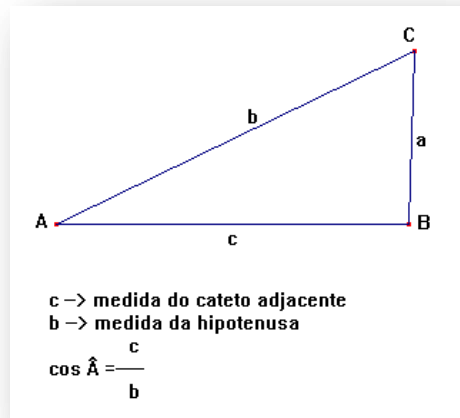
Função Seno			
I Quadrante	II Quadrante	III Quadrante	IV Quadrante
Decresce	Decresce	Cresce	Cresce

### **Cosseno de um Arco**

#### **Observação:**

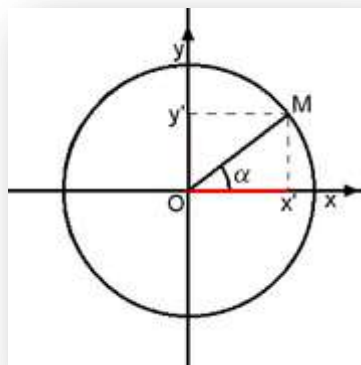
Lembre-se que cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.





### Cosseno de um Arco

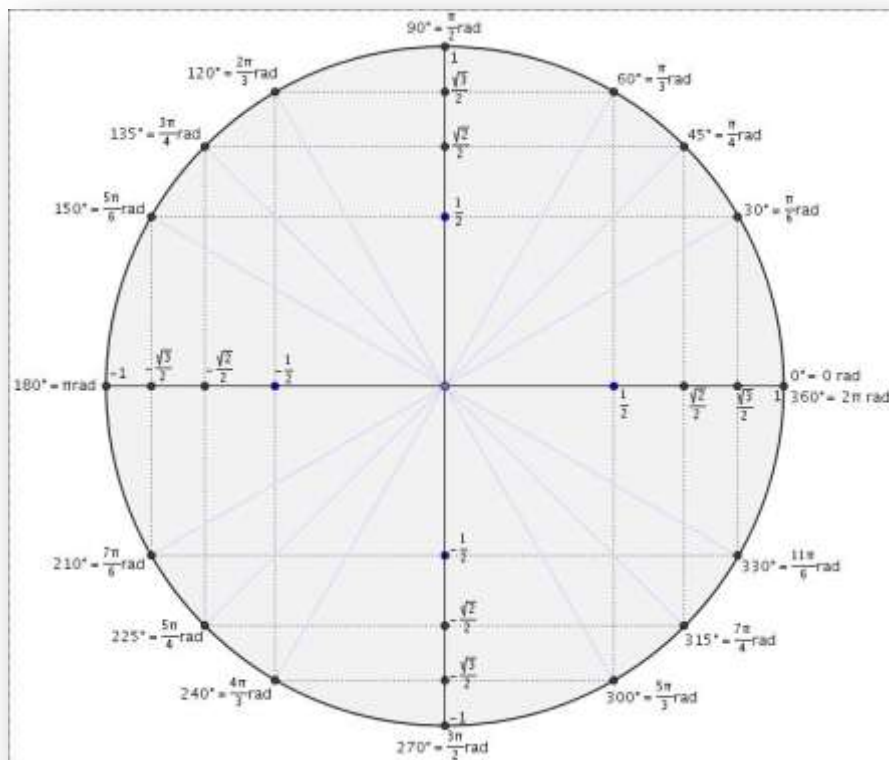
É a abscissa da extremidade desse arco na circunferência trigonométrica. Isto é, a medida destacada em vermelho, de O até x'.



Quando você estudou trigonometria no triângulo retângulo, aprendeu o cosseno dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Estes valores irão servir para os ângulos em graus e radianos e também para os seus simétricos. E usaremos a simetria horizontal.

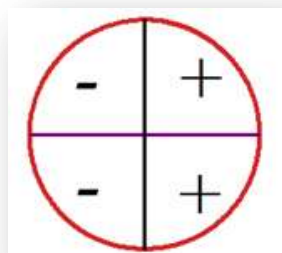


Observe que para os valores de  $90^\circ$  e  $270^\circ$  que não há o eixo dos cossenos. Assim, os valores de cosseno somente existirão para  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

Teremos então:

- $\cos 90^\circ = 0$
- $\cos 270^\circ = 0$
- $\cos 0^\circ = 1$
- $\cos 180^\circ = -1$

O sinal do Seno depende da região do ciclo trigonométrico que se está avaliando, uma vez que a abscissa muda de sinal.



## Variação da função cosseno

Função Cosseno			
I Quadrante	II Quadrante	III Quadrante	IV Quadrante
Cresce	Decresce	Decresce	Cresce

Você irá perceber melhor esta variação quando utilizar o software para construir o ciclo trigonométrico.

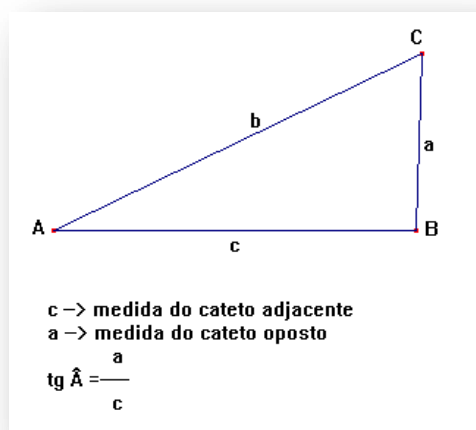
## Relação Fundamental da Trigonometria

$$\text{sen}^2 x + \text{cós}^2 x = 1$$

## Tangente de um Arco

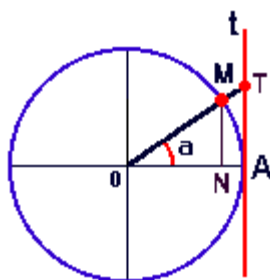
### Observação:

Lembre-se que *tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão da medida do cateto oposto ao ângulo citado pelo cateto adjacente a esse ângulo.*



## Tangente de um Arco

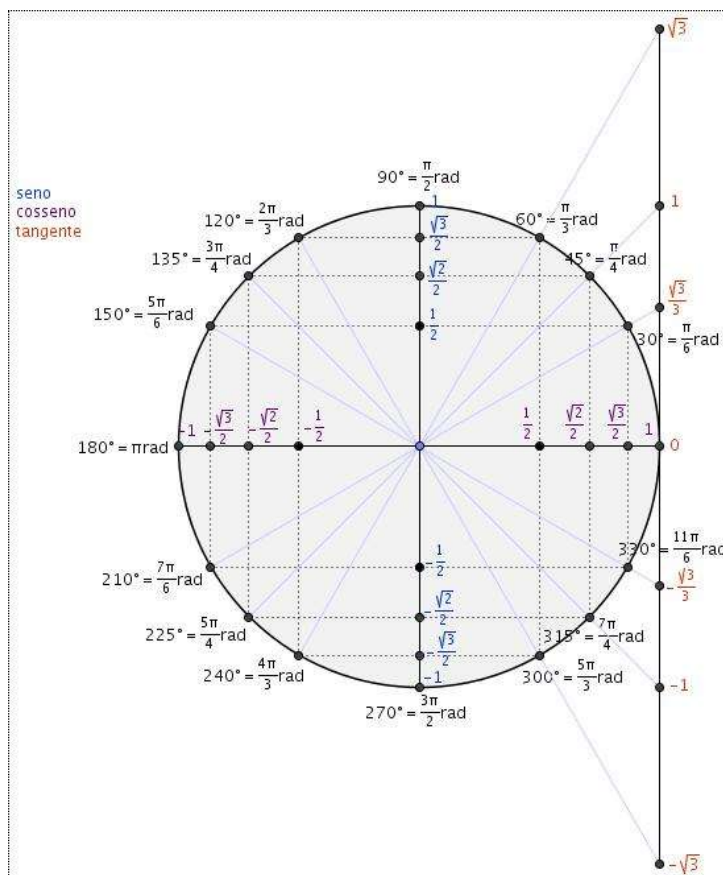
Definimos como tangente do ângulo  $\theta$  (ou do arco AM) a medida algébrica do segmento AT, e é indicado como:  $\text{tg } \theta = AT$



Quando você estudou trigonometria no triângulo retângulo, aprendeu a tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Esses valores irão servir para os ângulos em grau e radiano.



O sinal da tangente vai depender da orientação que tomamos para o seu cálculo. Como a tangente é medida verticalmente, valores medidos acima do zero serão considerados positivos e valores medidos abaixo do zero são considerados negativos.

Observe o quadro abaixo e verifique o que ocorre com o arco e com a reta tangente ao mesmo tempo

$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi$	$\theta = 3\pi/2$	$\theta = 2\pi$
$\text{tg } 0^\circ = 0$	$\text{tg } 90^\circ = \infty$ $\text{tg } (\pi/2) = \infty$	$\text{tg } 180^\circ = 0$ $\text{tg } \pi = 0$	$\text{tg } 270^\circ = \infty$ $\text{tg } (3\pi/2) = \infty$	$\text{tg } 360^\circ = 0$ $\text{tg } 2\pi = 0$

Observe que para  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $360^\circ$ , o segmento AT tem valor igual a zero

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
<i>Tang</i>	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>indefinida</i>	0	<i>indefinida</i>	0

### **Gráfico das funções trigonométricas**

Os gráficos das funções trigonométricas serão feitos com o software geogebra, onde o professor levará para a sala de aula o notebook com data show.

Esta aula terá como base o Roteiro de Ação 3.

A aula a seguir terá como base o Roteiro de Ação 7

### **O Movimento da Roda Gigante e as Transformações no Gráfico da Função Seno**

- Objetivos: Estudar o gráfico da função seno em um contexto real.
- Pré-requisitos: Conhecer as propriedades analíticas elementares das funções seno, cosseno e tangente.
- Material necessário: Software geogebra; folha de atividades; laboratório de informática (opcional) / projetor multimídia e notebook do professor.

### **Lei do Seno e do Cosseno**

Este conteúdo será revisado com os alunos utilizando o Roteiro de Ação 8. É um roteiro que parte da realidade para mostrar ao aluno a importância da trigonometria no cotidiano.

### **Equações Trigonométricas -**

Serão dadas as com solução na primeira volta

Ex.:  $\sin x + \frac{1}{2} = 0 \quad [0, 2\pi]$

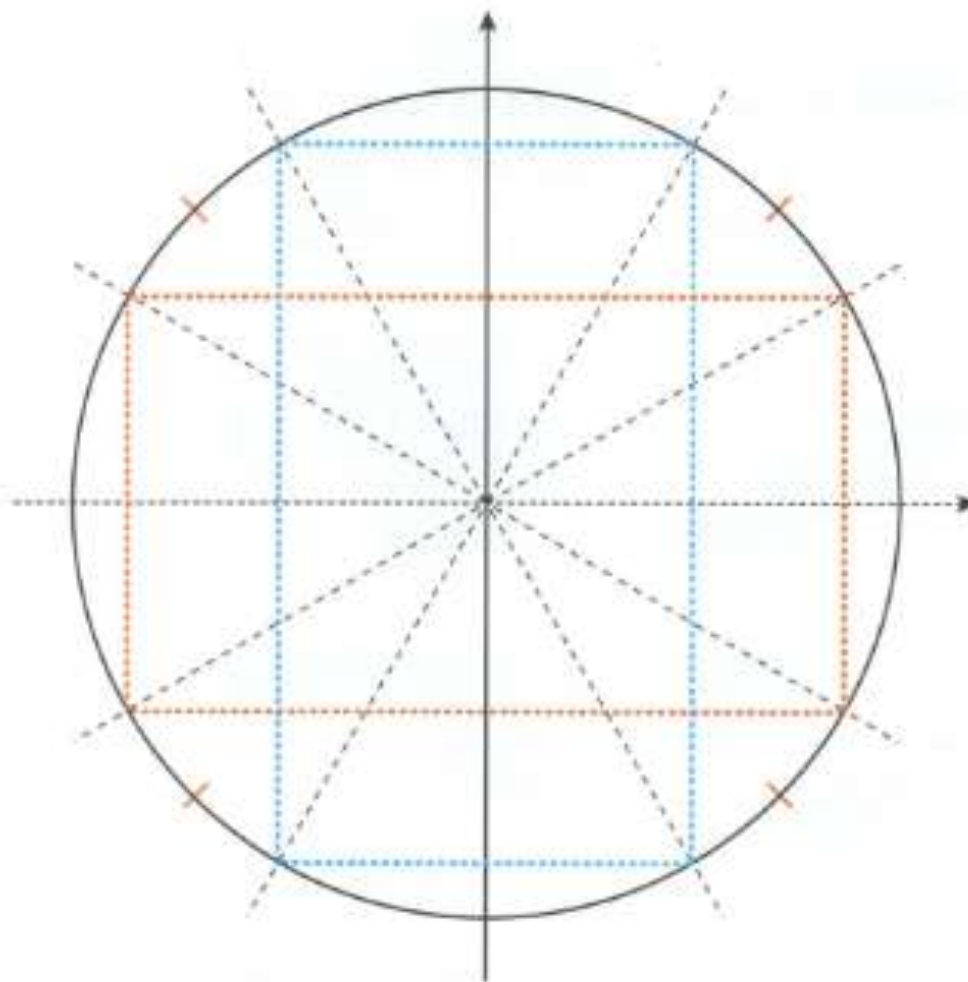
$2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

### **Exemplo de atividades que serão feitas com os alunos.**

Essa atividade tem a finalidade de fornecer maior significado aos conceitos que serão trabalhados. O objetivo é orientar o círculo trigonométrico e localizar as razões trigonométricas. Os alunos precisarão da folha que contenha o círculo trigonométrico, canetinha, régua e transferidor. Organiza os alunos em grupo de 3 ou 4 componentes

- 1) Folha contendo o círculo trigonométrico abaixo

#### **CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO**



2) A folha acima está marcada apenas os ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$  em cada quadrante. Peça para que o aluno marque de canetinha com auxílio de um transferidor o ângulo de  $45^\circ$  em cada quadrante.

3) Escolha a canetinha vermelha para determinar os ângulos de  $30^\circ$  em cada quadrante e mostrando os devidos cálculos:

1º quadrante:  $30^\circ$

2º quadrante:  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

3º quadrante:  $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

4º quadrante:  $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

4) Escolha a canetinha azul para determinar os ângulos de  $60^\circ$  em cada quadrante e mostrando os devidos cálculos:

1º quadrante:  $60^\circ$

2º quadrante:  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

3º quadrante:  $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

4º quadrante:  $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

5) Escolha a canetinha laranja para determinar os ângulos de  $45^\circ$  em cada quadrante e mostrando os devidos cálculos:

1º quadrante:  $45^\circ$

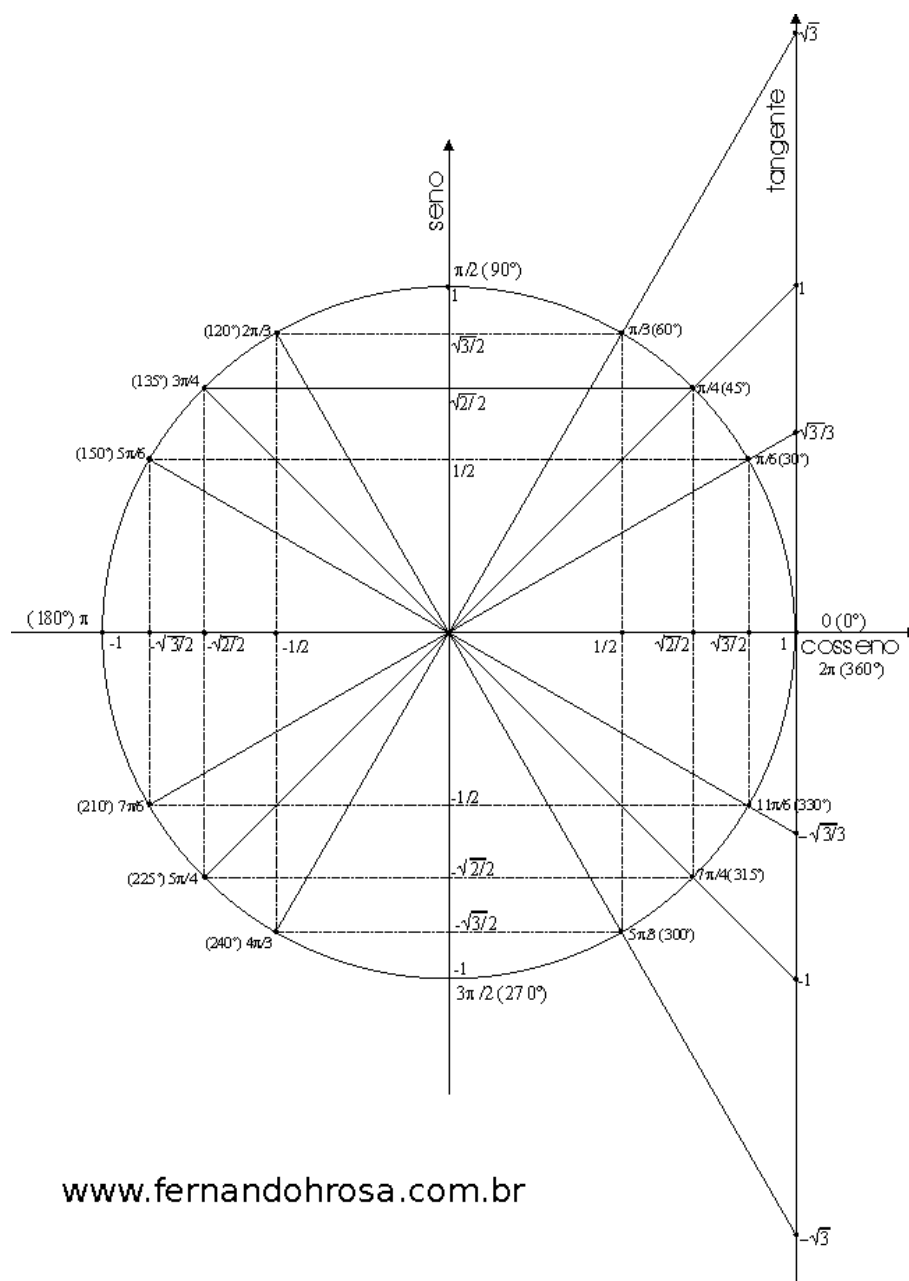
2º quadrante:  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

3º quadrante:  $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

6) 4º quadrante:  $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

7) Determine o seno, cosseno e a tangente nessa folha até fique como está representado abaixo:





Outra atividade prática é a construção do Ciclo Trigonométrico, como em uma oficina. Precisaremos de folha de cartolina, palito de picolé, borboleta, canetas coloridas e régua.



Figura 1 – Ciclo Trigonométrico

Para determinar os valores do seno e cosseno devemos posicionar o segmento do raio sobre o ângulo desejado, por exemplo, 30 graus. Na figura 2 (à esquerda) o valor do cosseno de 30 graus ( $\cos(30^\circ)$ ) que representa a projeção ortogonal sobre o eixo horizontal, está representado sobre o ponto B, vértice do triângulo OAB. Na figura 2 (à direita) podemos identificar o valor do seno de 30 graus ( $\sin(30^\circ)$ ) que representa a projeção ortogonal sobre o eixo vertical, representado sobre o ponto C, vértice do triângulo OAC.

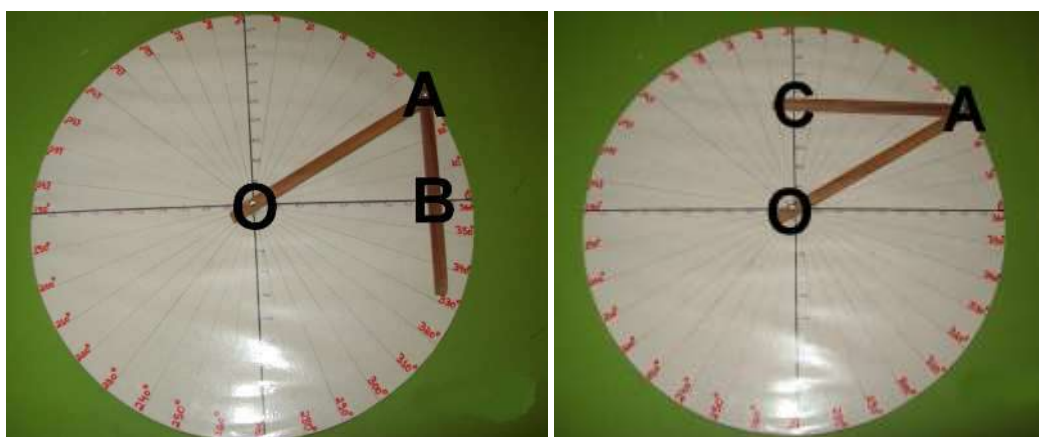


Figura 2 – Representação do cosseno e seno de  $30^\circ$ , respectivamente.

# **AVALIAÇÃO**

A avaliação será feita todos os dias, pois os alunos irão trabalhar em pequenos grupos e os mesmos irão discutir entre si os seus resultados onde vou avaliar o aproveitamento e sanar as dúvidas da seguinte forma:

- Atividades em sala.
- Lista de exercícios do livro didático envolvendo aplicações do assunto no cotidiano.
- Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.

É um processo contínuo e diário. E é desta forma que avalio os meus alunos.

Avalio se ele está desenvolvendo as competências necessárias em relação ao conteúdo ministrado. É feita em cada aula, em cada atividade seja individual ou não. Ao final do ciclo ele é avaliado individualmente, através de uma avaliação escrita onde posso juntar com as avaliações diárias e concluir se o mesmo alcançou os objetivos propostos no período e em relação ao conteúdo ministrado.

Avalio se está desenvolvendo competências e habilidades com questões de múltiplas escolhas e com os objetivos bem definidos.

Este plano foi preparado em função da realidade da minha turma.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Roteiros de Ação: 3 – **Gráfico das funções trigonométricas**– Curso de Formação Continuada oferecido pelo CEDERJ/CECERJ, em parceria com a SEEDUC – 4º bimestre.

Roteiros de Ação: 7 – **O Movimento da Roda Gigante e as Transformações no Gráfico da Função Seno** – Curso de Formação Continuada oferecido pelo CEDERJ/CECERJ, em parceria com a SEEDUC – 4º bimestre.

Fórum temático 8 – **Lei do seno e do cosseno** - Curso de Formação Continuada oferecido pelo CEDERJ/CECERJ, em parceria com a SEEDUC – 4º bimestre.

### Endereços eletrônicos acessados de 25/10/2014 a 03/11/2014

[http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3164\\_1725.pdf](http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3164_1725.pdf)

[http://www.fernandohrosa.com.br/br/P/ciclo\\_trigonometrico/](http://www.fernandohrosa.com.br/br/P/ciclo_trigonometrico/)

<http://www.brasilecola.com/matematica/identificando-os-quadrantes-ciclo-trigonometrico.htmv>

<http://tipo10.blogspot.com.br/2008/03/mais-um-crculo-trigonometrica.html>

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=772>

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=771>

<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=263>