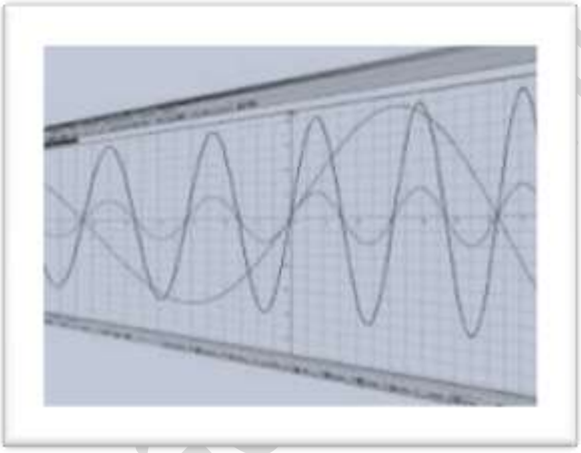
FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Plano de trabalho



TAREFA 2

Júlio César da Silva Pinto

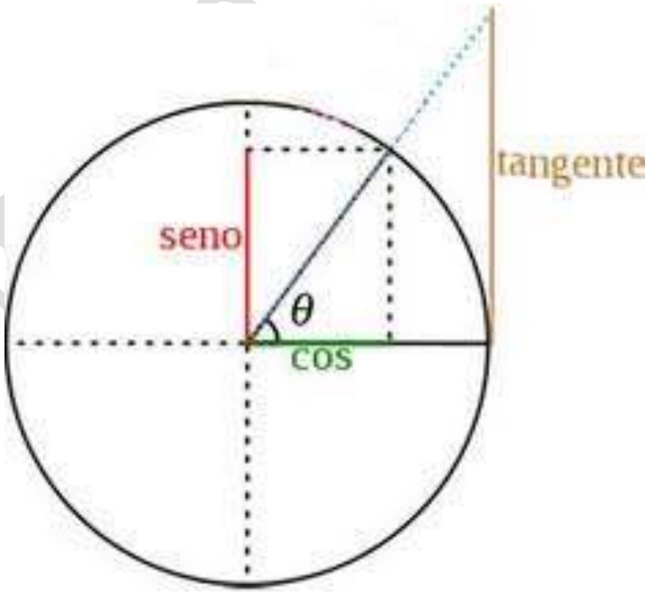
Tutor: Rodolfo Gregório de Moraes

INTRODUÇÃO

Historicamente, o grande avanço dos resultados matemáticos relativos às **Funções Trigonométricas**, se deu em função dos problemas matemáticos surgidos, principalmente em estudos de astronomia, da navegação e da geografia. Foram assim situações reais vividas pelos homens que deram o impulso ao desenvolvimento teórico. Na atualidade, faz-se uso da Trigonometria em diferentes áreas como: Análise, Mecânica, Topografia, etc.

Das **Funções Trigonométricas**, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos. A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo, para isto se estabelece razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto). Para isso, o estudo triângulo retângulo é um requisito para o seu entendimento.



DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1 – Função Seno

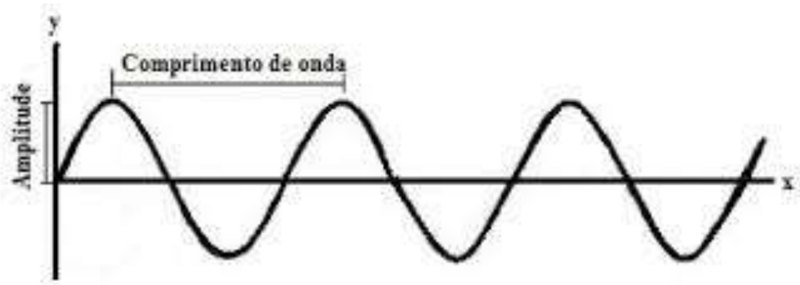
OBJETIVOS: Apresentar e discutir alguns fenômenos periódicos; Apresentar a Função Seno e suas características.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES : Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. Utilizar o círculo trigonométrico no estudo das funções trigonométricas e das suas propriedades. Identificar as funções seno e co-seno como modelos de fenómenos periódicos da vida real.

METODOLOGIA: Aulas expositivas, utilizando a participação do grupo, apresentando o conteúdo do programa e estudo de problemas de aplicações práticas. Proposição e resolução de exercícios em grupo levantando questionamentos e ampliando a discussão e a aprendizagem.

1º Momento: Movimentos Periódicos – Utilizar como exemplo a propagação da onda sonora para discutir o fenômeno da periodicidade.

Muitas situações ou fenômenos à nossa volta são periódicos, isto é, de tempos em tempos se repetem. Por exemplo, todos ou dias acontece o nascer do sol e o pôr-do- sol. A cada 28 dias a Lua estará da mesma forma, do ponto de vista de um observador fixo na terra.
Se um fenômeno é sabidamente periódico, podemos prever com relativa facilidade o que ocorre em momentos não observados. O gráfico abaixo mostra a propagação de uma onda sonora.



2º Momento: Leitura Poesia

Leitura Poesia

Pôr do Sol

Oscila a onda
Baixa a maré
Vem o pôr do sol
A noite cai

O pêndulo marca a hora
Chega a onda sonora
Os fenômenos sucedem-se em ritmos amenos
Os ciclos repetem-se com simetria
O cientista estudou
E tudo são senos e cossenos
Da trigonometria.

Maria Augusta Ferreira Neves

3º Momento: Apresentação da Função Seno

Em Matemática, quando falamos de funções periódicas, vêm-nos à mente as funções trigonométricas. Elas são importantes tanto do ponto de vista teórico como do aspecto da modelagem matemática. De fato, os fenômenos periódicos podem ser encarados como a soma de várias funções trigonométricas ou, mais especificamente, de "parentes" das funções seno e cosseno. Mais adiante no curso, as funções trigonométricas serão exploradas e estudadas com mais detalhes. No momento, vamos recordar que os gráficos das funções e são os seguintes:

Função Seno

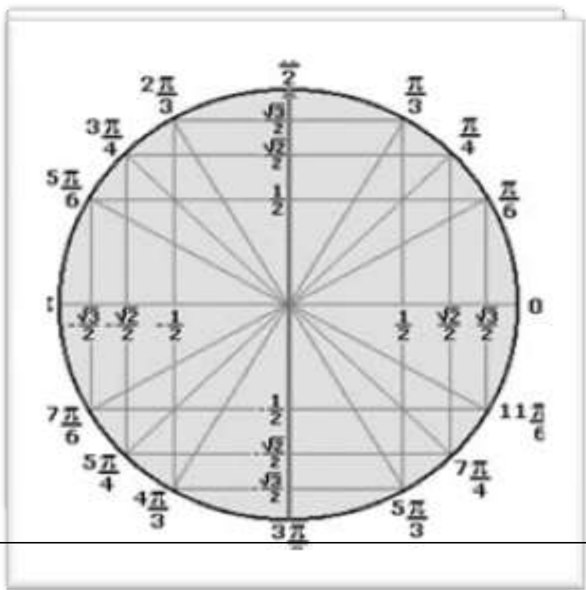
Dado um ângulo cuja medida é dada em radianos é x, chamamos de função seno à função que associa a cada x ∈ R o número (sen*x*) ∈ R. Indicamos essa função por:

f(x) = sen(x)

O gráfico da função seno, no plano cartesiano, será uma curva denominada senóide. Atribuindo valores ao arco x, pode-se chegar ao gráfico.

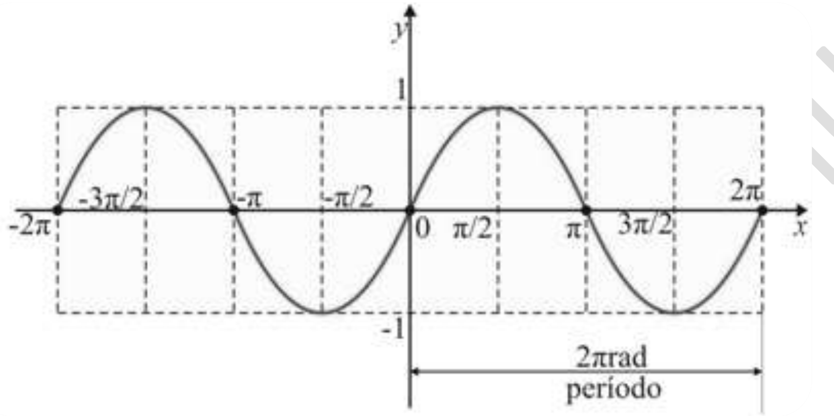
Características:

1) o função seno é **positiva** nos 1º e 2º quadrantes, e **negativa** 3º e 4º quadrantes,
2) Ela é **crescente** no 1º e 4º quadrantes, e **decrescente** no 2º e 3º quadrantes,
3) A função é periódica e seu período 2pi. ou 360º, isto é , ela varia de



2pi em 2pi,
4) O seu domínio , e igual ao seu contradomínio de f são iguais a R (conjunto dos reais)
5) A sua imagem vai do intervalo vai [-1,1]   qualquer que seja x pertencente a R temos que -1 menor ao igual a x a sen x menor ao igual 1.

<u>Gráfico da função f(x) = senx</u>



<u>4º Momento</u>: Promover a discussão de solução de problemas onde estarão envolvidos conceitos sobre a função trigonométrica: seno.

1)(FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas.Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica f (x) = 900 - 800 sen (x . pi / 12), em que f (x) é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro, tal que 0 < x < 24)
Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a :
a)600
b)800
c)900

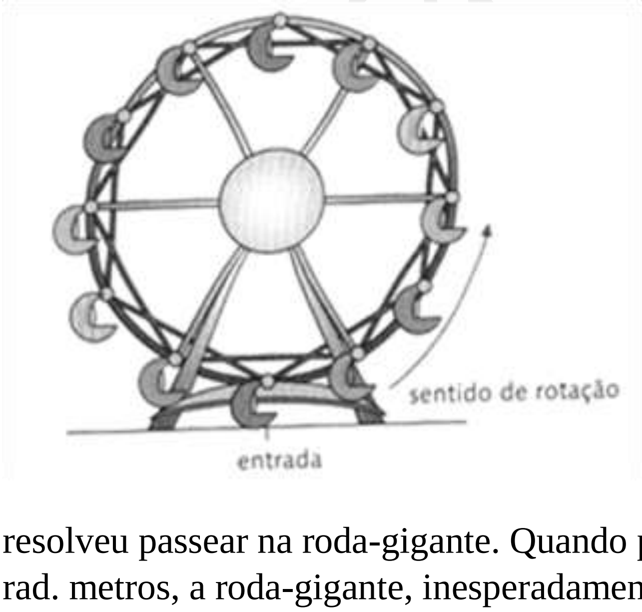
d)1500
e)1600

2) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplesmente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação da altura (h) da lâmina de água em função das horas (t) do dia seja dada pela função trigonométrica. Considerando a equação acima, o período do dia em que um navio com 12 metros de casco pode permanecer no porto é de:

a) Entre 3 e 11 horas
b) Entre 4 e 10 horas
c) Entre 2 e 10 horas
d) Entre 1 e 2 horas
e) Entre 10 e 11 horas.

3) Construa e analise o gráfico da função f(x) = 3.senx dando seu domínio, sua imagem e seu período.

4) (UFRJ - RJ) DESAFIO



"Roda mundo, roda gigante

Roda moinho, roda peão

O tempo rodou num instante

Nas voltas do meu coração"

Roda Vida – Chico Buarque

Um casal estava no parque e resolveu passear na roda-gigante. Quando percorreram um arco de **(32π / 3)** rad. metros, a roda-gigante, inesperadamente, parou, e o telefone celular da mulher caiu verticalmente, atingindo o chão.

Sabendo que o raio da circunferência da roda-gigante é de 8 metros, e que a distância entre essa circunferência e o chão é de 2 metros, determine a altura aproximada da queda do telefone.

ATIVIDADE 2 – Função Cosseno

OBJETIVOS: Apresentar a Função Cosseno e suas características.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. Utilizar o círculo trigonométrico no estudo das funções trigonométricas e das suas propriedades. Identificar as funções seno e cosseno como modelos de fenômenos periódicos da vida real.

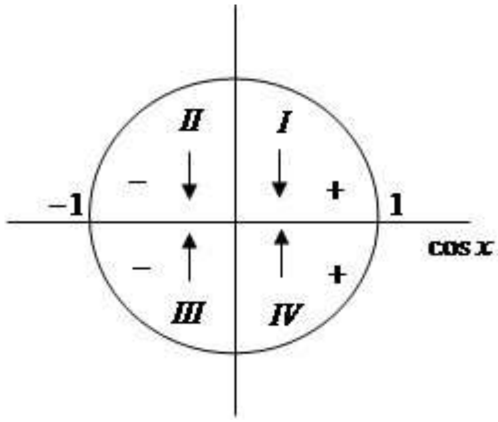
METODOLOGIA: Aulas expositivas, com a participação do grupo, apresentando o conteúdo do programa e estudo de problemas de aplicações práticas. Proposição e resolução, em duplas, de exercícios de aprendizagem, de fixação e de aplicação e suas devidas correções.

1º Momento: Apresentação da Função Cosseno

É uma função f : R → R que associa a cada número real x o seu cosseno, então f(x) = cosx.

Características:

1)O sinal da função f(x) = cosx é positivo no 1º e 4º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 2º e 3º quadrantes.



2) Domínio: A função cosseno está definida para todos os valores reais, assim Dom(cos)=R.

3) Imagem: O conjunto imagem da função cosseno é o intervalo I={y em R: -1 $\leq$ y $\leq$ 1}

4) Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em R e para todo k em Z:

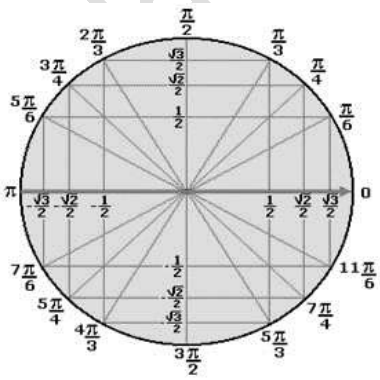
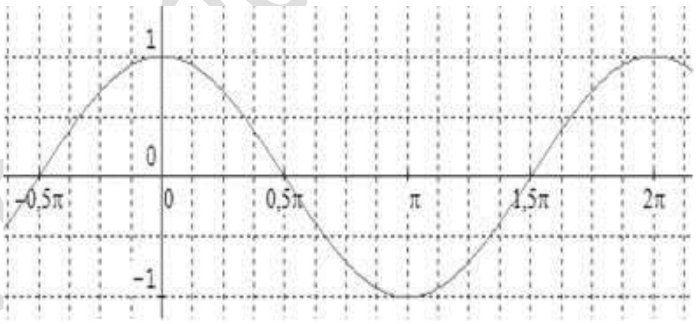


Gráfico da função f(x) = cosx

O gráfico da função cosseno, no cartesiano, será uma curva denominada co- senóide. Atribuindo valores ao arco x, pode-se chegar ao gráfico.



2º Momento: Situações Pr0blemas

1) (Vunesp)Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica, pois oscila regularmente entre maré alta e maré baixa, ou seja, a altura da maré aumenta até atingir um valor máximo (maré

alta) e vai diminuindo até atingir um valor mínimo (maré baixa), para depois aumentar de novo até a maré alta, e assim por diante. A altura y, em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y=2+1,9.\cos(\pi.t/6)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia noite. Após 2h, qual será a altura da maré?

2) Construir a tabela, o gráfico e determinar o período da Função: $f(x) = 1 - \cos x$, para o intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

3) Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares) no ano de 2010+x, em que x ε {0,1,2...,19,20}, serão dadas pela lei: $f(x)=400+18.\cos(\pi.x)/3$
Supondo que isso realmente ocorra, determine o valor das exportações desse país nos anos de 2010,2015 e 2020, em milhões de dólares.

<u>3º Momento</u>: Atividade utilizando o Recurso GeoGebra

1) Construa uma circunferência de centro na origem e raio 1;

2) Qual é a coordenada de um ponto sobre a circunferência em função de α?

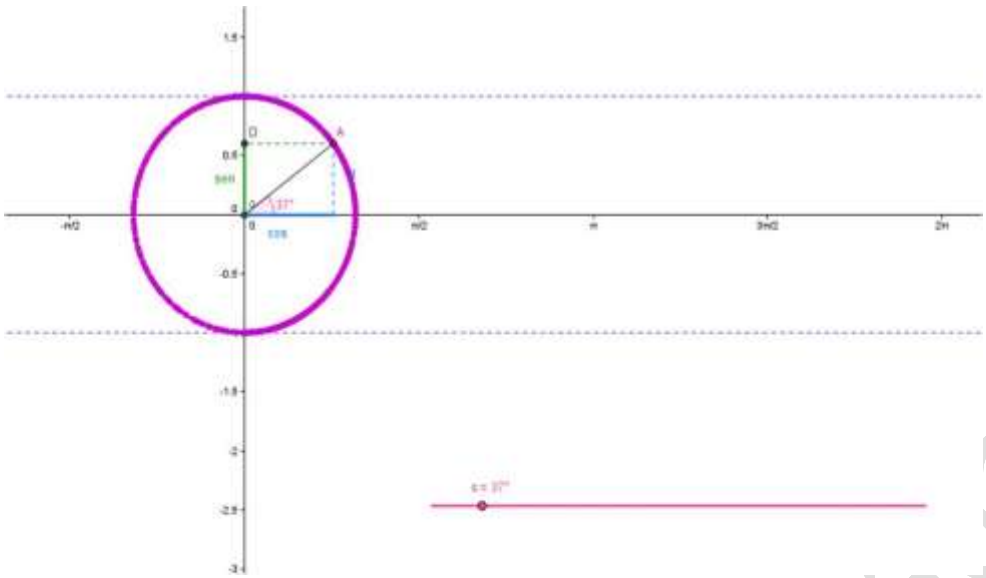
3) Construa esse ponto no campo de entrada.

4) Clique com o botão direito sobre o ponto e habilite o rastro;

5) Mexa no seletor α;

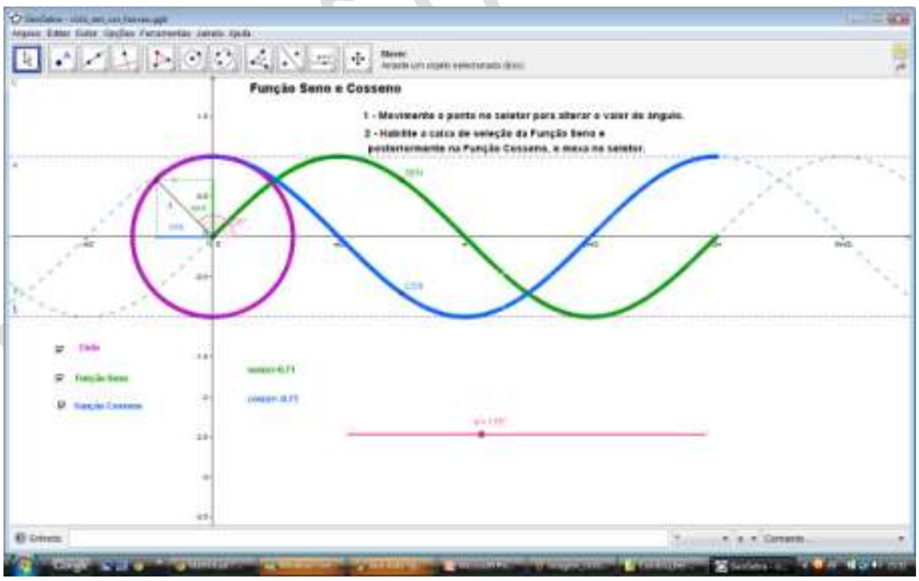
6) Construa retas perpendiculares (ou paralelas) aos eixos que passem no ponto A e marque o seno e cosseno;

7) Construa o segmento OA; mude as cores;



8) Construa a função f(x)=sen(x) no campo de entrada;

9) Qual é a coordenada de um ponto na curva de f(x)=sen(x), em função de α ? Crie este ponto.



ATIVIDADE 3 – Relação Fundamental da Trigonometria

OBJETIVO: Reconhecer a Relação Fundamental da Trigonometria.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Resolver situação- problema que envolva medidas de arcos ou ângulos (grau e radiano), utilizando teorema de Pitágoras ou razão trigonométrica (seno de um ângulo agudo). Resolver equações trigonométricas simples. Verificar a validade de identidades trigonométricas simples.

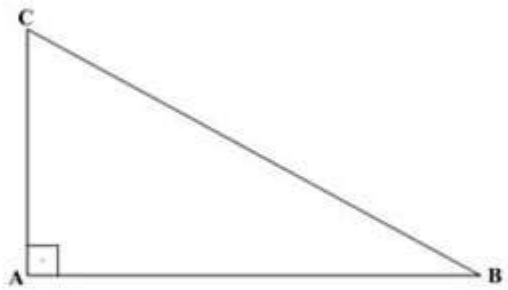
METODOLOGIA: Aulas expositivas apresentando o conteúdo do programa e estudo de problemas de aplicações práticas. Proposição e resolução de exercícios de aprendizagem, de fixação e de aplicação.

<u>1º Momento</u>: "Em todo triângulo retângulo , a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

As identidades acrescentam ao estudo da Trigonometria um repertório de relações que são aplicadas em seguida nas equações trigonométricas.

A principal identidade da Trigonometria ($sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$) deriva do teorema de Pitágoras.

Uma importante relação existente na Trigonometria foi elaborada por Pitágoras, com base no triângulo retângulo (triângulo com catetos formando um ângulo reto). Veja a relação que ficou conhecida como "Teorema de Pitágoras":

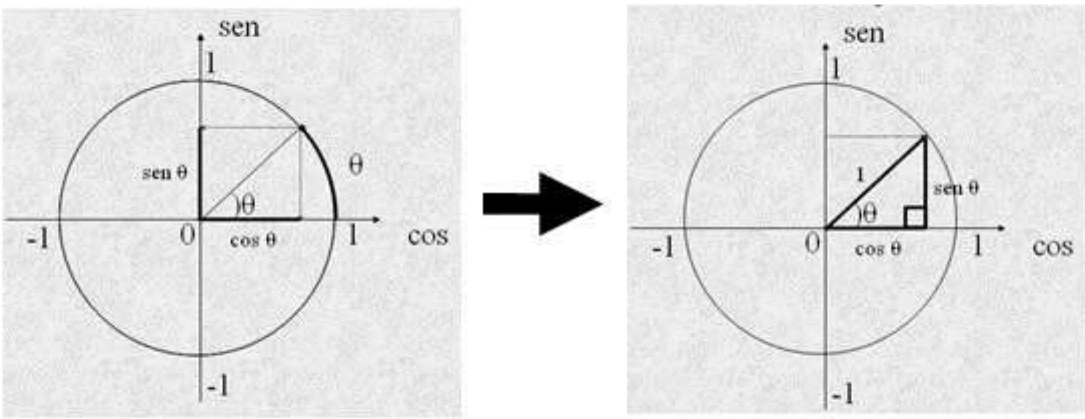


AB = cateto
AC = cateto
BC = hipotenusa

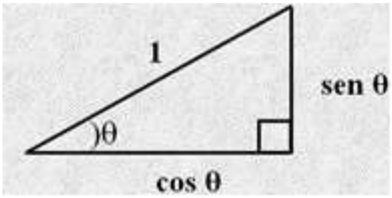
med(AB)² + med(AC)² = med(BC)²

2º Momento: Demonstração

No círculo trigonométrico, o eixo vertical é representado pelo seno e o eixo horizontal, pelo cosseno. A determinarmos um ponto qualquer sobre a extremidade do círculo, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta do eixo das origens do círculo até o ponto determinado, formamos um ângulo Θ, como mostram os esquemas a seguir:



Com base no triângulo retângulo formado, vamos aplicar os fundamentos do teorema de Pitágoras:



$$\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$$

Aplicação da relação fundamental

Exemplo 1:

Considerando que $sen.x = \frac{1}{4}$**, com** $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ **, determine cos x.**

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{16-1}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{15}{16}$$

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\cos .x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Exemplo 2:

Considerando que $\cos .x = \frac{1}{3}$ **, com** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **, determine sen x.**

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$sen^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$sen^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$sen^2 x = \frac{9-1}{9}$$

$$sen^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\sqrt{sen^2 x} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$sen.x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ATIVIDADE 4 – Função Tangente

OBJETIVO: Apresentar a Função Tangente e suas características.

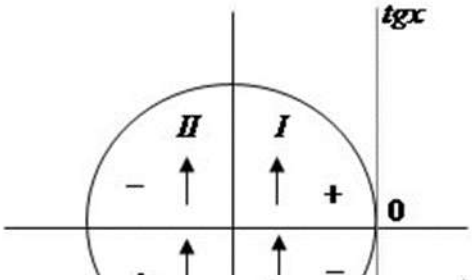
COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Utilizar o círculo trigonométrico no estudo das funções trigonométricas e das suas propriedades.

METODOLOGIA: Aulas expositivas apresentando o conteúdo do programa e estudo de problemas de aplicações práticas. Proposição e resolução de exercícios de aprendizagem, de fixação e de aplicação

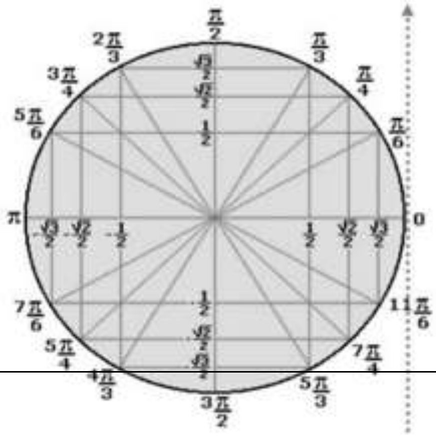
<u>1º Momento</u>: Apresentação da Função Cosseno

Dado um ângulo cuja medida é dada em radianos é x, chamamos de <u>função tangente</u> à função que associa a cada $x \in R/x \neq \pi/2+k\pi$ o número (tgx) $\in$ R. Indicamos essa função por: $f(x) = tg(x)$.

Características:



Sinais da função tangente:



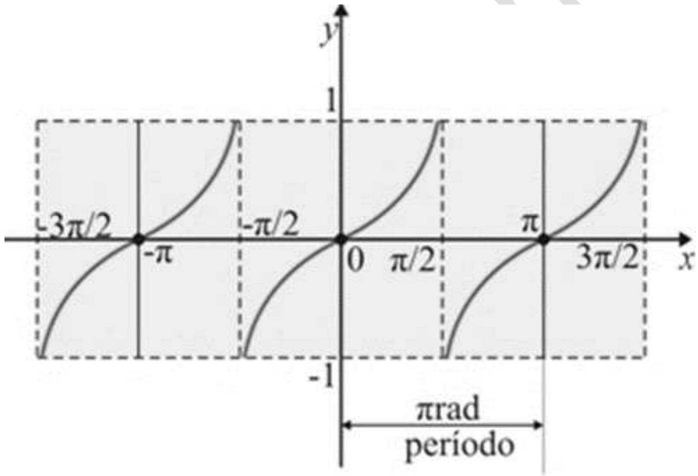
2) Valores positivos nos quadrantes ímpares.

3) Valores negativos nos quadrantes pares.

4) Crescente em cada valor.

Gráfico da função f(x) = tg(x)

O gráfico da função tangente, no cartesiano, será uma curva denominada tangentóite. Atribuindo valores ao arco x, pode-se chegar ao gráfico.



<u>2º Momento</u>: promover momentos de solução de situações problemas que envolvam os estudos das Funções Trigonométricas estudadas. Tendo o Livro Texto como base e questões propostas pelo professor e o recurso do GeoGebra.

AVALIAÇÃO

Ao elaborar as etapas de avaliação, o professor deve propor situações-problemas acerca dos temas de modo que os alunos tenham novas oportunidades e se apropriem das relações já exploradas. A avaliação da aprendizagem deve ser feita continuamente durante todo o plano com acompanhamento das atividades executadas em sala de aula:

-Atividades avaliatórias.

-Listas de exercícios envolvendo aplicações da trigonometria no cotidiano.

–Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.

- Seminários: "A importância da Trigonometria e suas aplicações no mundo moderno". O seminário será organizado em grupos de quatro alunos, sendo realizado em duas aulas.

- A avaliação deverá ter caráter processual, formativo e participativo - avaliação formativa.

FONTES DE PESQUISA

Smole, Kátia Stocco et al. Cadernos da Mathema. 3. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2008. 29 p

do Carmo, M. P.; Morgado, A. C.; Wagner, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor .

PAIVA, MANOEL. (2009) *Matemática - Paiva*. 1a ed. 3 vols. São Paulo: Moderna.

Matemática, Dante, 1o Ano/ Luiz Roberto Dante – 1o Edição – São Paulo: Ática, 2010.

Marcondes, Sérgio Gentil; Matemática – 7ª edição – São Paulo – Editora Ática, 2004.

Endereços Eletrônicos:

Notas de Aula de Prática de Ensino de Matemática. Disponível em: http://www.ebah.com.br/content/ABAAABJAIAK/7303551-notas-aula-pr-atica-ensino-matem-atica-vi. Acessado em 21 de julho de 2011.

Transformações Trigonométricas: Fórmulas da Adição. Disponível em: http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/transformacoes-trigonometricas-formulas-adicao.htm. Acessado em 21 de julho de 2011.

Trigonometria. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria. Acessado em: 31 de julho de 2011.

http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html.

http://exercicios.brasilescola.com

http://pt.wikibooks.org