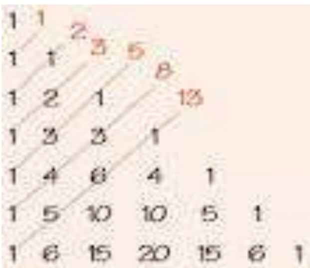
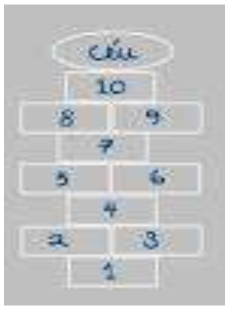
FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ





CONTEÚDO: REGULARIDADES NUMÉRICAS: SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA.

SÉRIE: 2ª ANO ENSINO MÉDIO/ 2º BIMESTRE / 2014

TUTOR: SUSI CRISTINE BRITTO FERREIRA

PROFESSORA: SÔNIA MARIA FIRMINO VELOSO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A cada 76 anos, o cometa Halley pode ser visto de Terra. Ele passou por aqui, pela última vez, em 1986 e deverá reaparecer no ano de 2062. Depois, em 2138, 2214, 2290... e assim sucessivamente.

Os números 1986, 2062, 2138, 2214, 2290..., nessa ordem, representam uma sequência numérica.

Sequência numérica

Conjunto é a união de elementos que possuem alguma característica em comum, por exemplo: conjunto de frutas vermelhas, conjunto dos alunos do sexo feminino de uma escola, conjunto dos melhores alunos de uma sala.

Na matemática estudamos conjuntos numéricos (conjunto cujos elementos são números), quando os elementos desses conjuntos são dispostos obedecendo a uma determinada regra chamamos de seqüência numérica.

As seqüências numéricas são representadas por letras maiúsculas do nosso alfabeto e seus elementos são colocados entre parênteses. Por exemplo:

• Os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, são todos exemplos de seqüência numérica.
• Conjunto dos números pares: A = (0,2,4,6,8,10,12,...)
• Conjunto dos números ímpares entre 8 e 20: C = (9,11,13,15,17,19)

Toda seqüência numérica possui uma ordem para organização dos seus elementos, assim podemos dizer que em qualquer seqüência os elementos são dispostos da seguinte forma: ($a_1,a_2,a_3,a_4,....,a_n$, ...) ou ($a_1,a_2,a_3,....,a_n$), onde a_1 é o 1º elemento, a_2 o segundo elemento e assim por diante, e a_n o enésimo elemento.

METODOLOGIA

Como qualquer outro conteúdo será usado material didático existente na escola como apoio (o livro didático, biblioteca para pesquisas, quadro etc.), não como os únicos materiais a auxiliar o professor. Considerando que o conteúdo esta inserido nas outras disciplinas (biologia, química, geografia, etc.,..) será desenvolvido aulas expositivas, acompanhadas de problemas envolvendo assuntos pertinentes ao convívio dos alunos, juntamente com exercícios propostos, e de fixação.

Na apresentação do conteúdo o diálogo aberto para que os exemplos extraídos das conversas dos alunos sirvam como base para a formação das atividades. Durante as exposições usaremos o mural, pincel, cartolina para expor os trabalhos realizados em equipe.

Nas resoluções das atividades, o professor agirá como mediador, conduzindo os alunos a chegarem às conclusões corretas sem dar respostas prontas, permitindo assim que os alunos desenvolvam o pensamento matemático e as competências objetivadas no período.

Propor atividades para casa, usando exemplos citados pelos alunos, utilizando dados do cotidiano de cada um, atividades dos saerjinhos, saerj, Enem de anos anteriores. Estas atividades ao serem corrigidas servirão de motivação e interação entre os alunos, observando que a matemática está integrada no cotidiano do ser humano

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1
1ª e 2ª Aulas

Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Introduzir o conceito de Regularidades Numéricas: Sequência e Matemática Financeira.

Pré-requisitos: Fazendo um paralelo entre a forma logarítmica e a forma exponencial.

Material necessário: Livro didático, quadro, cartolina quadro de exposição de trabalhos.
Organização da classe: Individual e em equipe de três alunos.
Descritores associados: Compreender a regularidade e a organização da sequência numérica.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Progressões são sequências numéricas que apresentam determinada regularidade ou padrão. Em nosso cotidiano encontramos vários grupos que são uma sequência, por exemplo: as numerações das casas obedecem a uma sequência, a ordem dos nomes em uma lista telefônica, a organização dos dias do ano em um calendário, a classificação dos alunos aprovados no vestibular também é uma sequência.

O estudo das progressões já era feito antes de Cristo. Há relatos do uso de progressões no Papiro de Ahmés, por volta do século XVII a. C.. Matemáticos discípulos da escola Pitagórica também descreveram algumas progressões através de estudos do som. Eles observaram que a vibração de cordas produzia uma frequência que formava uma sequência numérica, criando então, as escalas musicais.

As progressões são de fundamental importância em situações cotidianas que envolvem a matemática financeira. Podemos relacionar os juros simples com a progressão aritmética e os juros compostos estão relacionados com a progressão geométrica.

O objetivo deste plano de trabalho é apresentar o conteúdo Sequência Numérica tendo como meta principal o desenvolvimento das habilidades e competências estabelecidas no Currículo Mínimo:

- Identificar sequências numéricas e obter a espressão algébrica do seu termo geral.
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.
- Diferenciar Progressão Aritmética de Progressão Geométrica.
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas significativos.
- Distinguir os juros simples dos compostos, aplicando em situações problemas.
- Utilizar os conceitos de matemática financeira para resolver problemas do dia a dia.

O plano é composto de seis aulas, onde apresentaremos e discutiremos conceitos posições e faremos exercícios propostos e de fixação cujas finalidades são: analisar e interpretar, resolver esclarecer dúvidas pontuais.

Ao final, faremos uma avaliação do conteúdo para analisarmos se os objetivos foram atingidos e colhermos dados para corrigir dúvidas individuais que possam ser persistentes ou mesmo corrigir eventuais falhas e posteriormente melhorarmos o desenvolvimento deste trabalho futuramente.

Definição: denomina-se sequência qualquer função f cujo domínio é N*.
Assim, são exemplos de sequência:

Ex: f: N* → R definida por f(n) = 2n + 1

g: N* → R definida por $g(n) = \frac{5 - n}{n + 3}$

Substituindo n pelos números naturais 1, 2, 3,..., temos

$n = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ e

$g(1) = \frac{5 - 1}{1 + 3} = 1$

$n = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e

$g(1) = \frac{5 - 2}{2 + 3} = \frac{3}{5}$

$n = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ e

$g(1) = \frac{5 - 3}{3 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Note-se que há uma lei de formação dos termos de uma sequência.

Pelo termo geral

Sequência é definida por uma fórmula que dá o valor de cada termo a_n em funçãi de sua posição n na sequência. Essa fórmula é denominada termo geral da sequência. Por exemplo, os três primeiros termos da sequência definida pelo termo geral:

$$a_n = \frac{2n - 1}{4} \quad \text{onde:}$$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{2 \,.\, 1 - 1}{4} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2 \,.\, 2 - 1}{4} = \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{2 \,.\, 3 - 1}{4} = \frac{6 - 1}{4} = \frac{5}{4}$$

Portanto a sequencia é $\left(\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

Por recorrência;

Defini-se uma sequência atribuindo determinado valor a um de seus termos (geralmente o primeiro) e indicando uma fórmula que permite calcular cada termo, conhecendo o valor do termo anterior da seequência. Nesse caso dizemos que a sequência está definida por recorrência.

Por exemplo, vamos escrever a sequência definida por:

$a_1 = 5$

$n_{a\,+\,1} = na + 2, n, \geq 1$

Tal definição indica que, nessa sequência, qualquer termo diferente do primeiro, é igual ao anterior adicionado a 2.

$n = 1 \Rightarrow a_{1\,+\,1} = a_1 + 2$
$a_2 = 5 + 2$
$a_2 = 7$

$n = 1 \Rightarrow a_{2\,+\,1} = a_2 + 2$
$a_3 = 7 + 2$
$a_3 = 9$

$n = 1 \Rightarrow a_{3\,+\,1} = a_4 + 2$
$a_4 = 9 + 2$
$a_4 = 11$

$n = 1 \Rightarrow a_{4\,+\,1} = a_5 + 2$

$a_5 = 11 + 2$
$a_5 = 13$

Assim, a sequência é (5, 7, 9, 11, 13, ...).

Atividades;

1- Escreva a sucessão dada pelo termo geral na = 2n 2 n ∈ { 1, 2, 3, 4, 5}.

2- Escreva os cinco primeiros termos da sequência $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1}\ 5b_n, \text{ com } n \in N^* \end{cases}$

3- Considere $a_n = 3n + 1$ o termo geral de uma sequência de números reais.
   a) Calcule o 5º e o 8º termos dessa sequência.
   b) Determine a ordem (posição) do termo igual a 49.
   c) Verifique se 1.001 é um termo dessa sequência.

4- Escreva os quatro primeiros termos das sequências dadas pelos termos gerais:
   a) $a_n = 3n – 1$
   b) $a_n = 2^{n-1}$

5- Escreva os quatros primeiros termos da sucessão de números reais dada por:
   a) $a_1 = 4$
   $a_{n+1} = na\ .\ 1$ com $n \in N^*$

6- Ache os cinco primeiros termos das sequências dadas por:
   a) $a_1 = -1$ e $a_{n+1} = a_n – 2$ e $n \in N^*$
   b) $a_1 = a$ e $a_{n+1} = a_n\ .\ a$ e $n \in N^*$

Respostas:

1- (2, 4, 6, 8, 10)

2- (- 3, - 15, - 75, - 375, -1875,...)

3- a) $a_5 = 16$; $a_8 = 25$

   b) 16º

   c) não

4- a) (2, 5, 8, 11, ...)

   b) (1, 2, 4, 8, ...)

5- $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

6- a) (-1, -3, -5, -7, -9, ...)

b) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots)$

3ª e 4ª Aulas
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Determinar, os cálculos relacionando os termos da sequência aritmética.
Pré-requisitos: Noção intuitiva nas resoluções dos problemas do cotidiano.
Material necessário: Quadro. Folha de atividades.
Organização da classe: Individual ou em equipes.
Descritores associados: Compreender a relação entre os termos.

Progressão Aritmética

É uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo termo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão.

Consideramos as sequências:

- Dos números naturais ímpares.
  (1, 3, 5, 7, 9, 11,...)

- De múltiplos de 6.
  (18, 12, 6, 0, -6, -12,...)

  Essas sequências são chamadas progressões aritméticas (PA), e o número fixo que adicionamos é chamado razão ® da progressão.

  (1, 3, 5, 7, 9, 11,...) é uma PA de razão r = 2.

  (18, 12, 6, 0, -6, -12,...) é uma PA de razão r = -6.

  Quando r > 0, a progressão aritmética é crescente, quando a < 0, decrescente e quando r = 0 constante ou estacionária.

- (2, 5, 8, 11, 14,...) r = 3 Logo a PA é crescente.

- (10, 8, 6, 4, ...) r = -2 Logo a PA é decrescente.

- (7, 7, 7, 7, ...) r = 0 Logo, a PA é constante.

A representação matemática de uma progressão aritmética (PA) é:

$(a_{1,}\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ )$ na qual $\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \end{cases}$

a) $a_{n+1} = a_n + r,\ \forall\ n \in N^*$

A razão de uma progressão aritmética é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte, podemos dizer que ela é igual à diferença entre qualquer termo, a partir do segundo e o anterior.

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r$

Fórmula do termo geral de uma PA.

Seja a PA : $(a_{1,}\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_n, \ldots)$ de razão r, temos:

$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$

$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1).\ r}$$

Onde: a_n = termo geral.
a_1 = primeiro termo
n = número de termos
r = razão

Atividades:

1- Qual a razão das progressões aritméticas a seguir?

a) (3, 9, 15, 21, ...)

b) $\left(6, \frac{11}{2}, 5, \frac{9}{2}, \ldots \right)$

2- Determine o valor de x, de modo que os números $(x + 4)^2$, $(x - 1)^2$ e $(x + 2)^2$ estejam, nessa ordem, em PA.

3- Escreva uma P.A.:

a) De 5 termos, em que o 1º termo (a_1) é 10 e a razão (r) é 3.
b) De 8 termos, em que $a_1 = 6$ e $r = -4$
c) De 6 termos, em que $a_1 = -3$ e $r = 5$
d) De 4 termos, em que $a_1 = a + 2$ e $r = a$
e) De 5 termos, em que $a_1 = 1$ e $r = 2\pi$.

4- Calcule o 20º termo da P.A. = (26, 31, 36, 41, ...).

5- Encontre o termo geral da P.A. (4, 7, ...).

6- Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física

corre sempre 3 minutos a mais do que correu no dia anterior. Se no 5º dia o estudante correu 17 minutos, quanto tempo correrá no 12º dia?

7- A copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá,apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido a 2[Guerra Mundial.

a) A Copa este ano será realizada aqui no Brasil. Qual será a ordem desse evento.
b) Haverá Copa em 2100? E em 2150?

8- Em uma P.A. o 7º termo vale -49 e o primeiro vale -73. Qual é a razão dessa P.A.?

9- Escreva a P.A. em que o 4º termo vale 24 e o 9º termo vale 79.

10- Qual é o segundo termo de uma P.A. de razão 9, cujo 10º termo vale 98?

Respostas:

1- a) $r = 6$
b) $r = -\frac{1}{2}$

2- $x = -\frac{9}{8}$

3- a) (10, 13, 16, 19, 22)
b) (6, 2, -2, -6, -10, -14, -18, -22)
c) (-3, 2, 7, 12, 17, 22)
d) (a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)
e)1, 1 + 2 π, 1 + 4 π, 1 + 6 π, 1 + 8 π)

4- $a_{20} = 121$

5- $a_n = 3n+1$

6- $a_{12} = 38$ minutos

7- $a_1 = 1930$
$r = 4$
$a_n = 2014$
$n = 22$
Obs: como não teve copa em 1942 e 1946, conclui-se que esta copa será 20ª.

8- $r = 4$

9- P.A. (-9, 2, 13, 24, 35, ...)

10- $a_2 = 26$

<u>5ª e 6ª Aulas</u>

Duração prevista: 100 minutos.

Objetivos: Fixar o conteúdo estudado. Introduzir situações problema envolvendo operações envolvendo sequência numérica.

Pré-requisitos: Noções de Utilização das fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Individual ou em duplas.

Descritores associados: Compreender e utilizar os conceitos e fórmulas para encontrar os termos de uma PA.

AVALIAÇÃO

Duração prevista: 100 minutos.

Objetivos: Avaliar o conhecimento**.**

Pré-requisitos: Noção intuitiva de Sequência Numérica.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Individual

Descritores associados: Compreender e interpretar e resolver as atividades propostas.

Colégio Estadual “Geraldino Silva”

Avaliação de Matemática - Turma: _____ data ___/___/___

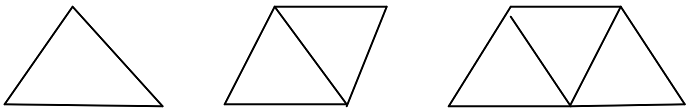
Valor: 2,0 (dois pontos) Obteve: ____________

Aluno(a) ______________________________________

Obs: após resolver os exercícios, marque as resposta correspondente nos parênteses abaixo.

Depois marque a mesma resposta no gabarito.

1- Observe as figuras abaixo, formadas com palitos.



Agora, copie a tabela no caderno e complete-se com o número de palitos necessários para formar os triângulos:

Números de Triângulos	Números de Palitos
1	3
2	5
3	
4	
5	
:	:
x	

Observando que o número de palitos necessários é dado em função do número de triângulos que se quer formar, responda:

a) Quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos?
b) Quantos palitos são necessários para formar 77 triângulos?
c) Quantos triângulos se podem formar com 41 palitos?

a) ( ) a= 22; b= 150; c = 20
b) ( ) a= 40; b= 155; c = 21
c) ( ) a= 41; b= 155; c = 20
d) ( ) a= 62; b= 150; c = 20

2- Encontre a razão das seguintes P.A.:

a) (1, 4, 7, 10, 13)

b) (8, 5, 2, -1, -4)

c) $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

a) (   ) a = 3; b = -3; c = $\frac{1}{3}$;

b) (   ) a = 1 ; b = - 4; c = 2

c) (   ) a = 4 ; b = - 4; c = 6

d) (   ) a = 3; b = -3; c = $\frac{1}{3}$;

3- Numa P.A., sabe-se que a_1= 8 e a_{10} = 62. Determine a razão. Sendo a_1 = 8, a_{10} = 62, n = 10 e aplicando a fórmula $a_n = a_1 = (n-1).\ r$:

a) ( ) r = 24
b) ( ) r = 6
c) ( ) r = 18
d) ( ) r =12

4- Determine o primeiro termo de uma P.A. em que a_8 = 35 e r = 3.
Sendo a_8 = , a_n e aplicando a fórmula $a_n = a_1 = (n-1).\ r$:

a) ( ) a_1 = 24
b) ( ) a_1 = 34
c) ( ) a_1 = 12
d) ( ) a_1 = 14

5- Numa P.A., o primeiro e o último termo são, respectivamente, 15 e 223 e a razão é igual a 8. Quantos termos tem essa P.A?
Sendo a_1 = 15, a_n = 223 e r = 8 e aplicando a fórmula $a_n = a_1 = (n-1).\ r$:

a) ( ) n = 16
b) ( ) n = 18
c) ( ) n = 27
d) ( ) n = 33

6- Calcule o décimo termo da P.A. (3, 7, 11, ...).
Sendo $a_1 = 3$, $r = 4$ e $n = 10$ (pois, como queremos a_{10}, então $a_n = a_{10}$) e aplicando a fórmula $a_n = a_1 = (n- 1). r$:

a) ( ) $a_{10} = 39$
b) ( ) $a_{10} = 13$
c) ( ) $a_{10} = 29$
d) ( ) $a_{10} = 23$

Gabarito

	a	b	c	d
1			x	
2	x			
3		x		
4				x
5			x	
6	x			

BIBLIOGRAFIA

PAIVA, Manoel. Matemática – Paiva, volume 1. São Paulo: Moderna, 2005, 184p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. Volume 1. São Paulo: Ática, 2011. 294p.

SMOLE, Kátia Stocco, Maria Ignez Diniz, Matemática Ensino Médio, volume 1, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010,141p.

IEZZI, Gelson,; DOLCE Osvaldo; DEGENSZAJN David; PÉRIGO Roberto; ALMEIDA de Nilze - Matemática Ciência e Aplicações - Ensino Médio, volume 1, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010,194p.

GIOVANNI, Jose R.; BONJORNO José R. – Matemática Completa: Ensino médio. Editora FTD, São Paulo, 2005 (2ª edição renovada).

GIOVANNI, Jose R.; BONJORNO José R.; GIOVANNI, Jose R. Jr. – Matemática Fundamental 2º Grau volume único: Ensino médio. Editora FTD, São Paulo,217p.

Sites acessados:

Símbolos Matemáticos. Disponível em <http://www.qieducacao.com/2010/09/simbolos-matematicos.html>. Acesso em 5 mar. 2013.

https://www.google.com.br/search?q=gravuras+de+treinador+correndo&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=ezpoU_maBPO0sATaq4C4Dg&ved=0CEwQ7Ak&biw=1280&bih=670#q=gravuras+de+jogo+de+futebol.&tbm=isch

A capa foi feita neste site