Formação Continuada

COLÉGIO: C. E. OSCAR BATISTA
PROFESSORA; JOANA D’ARC DE PAULA RODRIGUES COSTA
SÉRIE: 2º ENSINO MÉDIO
TUTOR (A): SUZI CRISTINE BRITTO FERREIRA

PLANO DE TRABALHO SOBRE MATRIZ E DETERMINATES

Habilidade relacionada:

- Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.
- Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

→ Pré-requisitos:

Para desenvolver esta atividade é requerido dos alunos o conhecimento prévio de:

- ✓ Matrizes;
- ✓ Problemas Envolvendo Matrizes;
- ✓ Sistemas Lineares (regra de Cramer).

→ Tempo de Duração:

200 minutos (4 horas/aulas).

→ Recursos Educacionais Utilizados:

Para a realização destas atividades, serão necessários os seguintes recursos:

- Quadro branco;
- Caneta para quadro branco;
- Calculadora;
- Lápis e folha de aula;
- Computador;
- Software Geogebra;
- Espelhos;
- Adesivos;

→ Organização da turma:

Esta tarefa será realizada em pequenos grupos (2 ou 3 participantes) para que o trabalho seja colaborativo e que ninguém fique ocioso durante a aula e sim participando e descobrindo o conteúdo apresentado.

→ **Objetivos:**

Ao término das aulas, o aluno deverá ser capaz de:

- Conhecer as linhas e colunas de uma matriz;
- Produzir textos matemáticos adequados;
- Aprender a construir e a fazer cálculos com matrizes;
- Aprender a resolver sistema através de igualdades entre matrizes;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Aprender a calcular o Determinante de uma matriz;
- Diferenciar Sistema Linear;
- Conhecer uma equação linear.

No final os alunos devem ter aprofundado a sua compreensão do conceito de função e ser capazes de usá-lo em diversas situações, em particular nas de proporcionalidade inversa. Para, além disto, os alunos deverão ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

→ **Metodologia adotada:**

Para a realização destas atividades são necessários 200 minutos de aula. As atividades estão divididas em três etapas.

Introdução

Abordar os assuntos sobre Matriz, Determinantes é preciso, antes de tudo, conhecer um pouco da história desses assuntos. Na Antiguidade, o primeiro povo que fez uso das matrizes foram os chineses, utilizando-as para controlar estoque de alimentos e outras contagens rudimentares. Vários matemáticos chineses se destacaram nessa época, pois eram habilidosos no desenvolvimento de potência de binômios, resolução de sistemas lineares, fortificações, estudo do clima e quadrados mágicos.

A história desses quadrados encontra-se no livro chinês Yih King, escrito há cerca de 3000 anos: conta a lenda que, enquanto meditava nas margens do Rio Lo, o imperador da antiga China, chamado Yu (2800 A.C.), da dinastia Hsia, viu emergir uma tartaruga - considerado um animal sagrado – com estranhas marcas no casco.

Yu percebeu que as marcas na forma de nós, feitos num tipo de barbante, podiam ser transformadas em números e que todos eles somavam quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos.

A este quadrado chamaram "Lo-shu" e é considerado o mais antigo dos quadrados mágicos. Foi usado no Oriente para praticar magia e, na Europa, para trazer boa sorte e afastar doenças.

Os números pares simbolizavam o princípio feminino, o Yin; os números ímpares simbolizavam o princípio masculino, o Yang; o numero 5 representava a Terra e à sua volta estão distribuídos os quatro elementos principais: a água 1 e 6, o fogo 2 e 7, a madeira 3 e 8 e os metais 4 e 9.

Outros quadrados mágicos foram desenvolvidos pelo matemático chinês Yang Hui (1238-1298)

Os quadrados mágicos chegaram ao Ocidente através dos árabes, que os conheceram por influência da cultura oriental.

Na Idade Média os quadrados mágicos eram gravados em lâminas de prata como amuleto contra a peste negra. Na China e na Índia, há quem use tais quadrados gravados em metal ou pedra, como amuletos ou talismãs.

Para os alquimistas, cada quadrado mágico representava a influência que cada planeta exercia sobre a Terra.

Estes quadrados mágicos despertaram também interesse em alguns matemáticos, pelos problemas difíceis que originaram, em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma dada ordem. Bernard F. de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) estudaram quadrados e cubos mágicos.

Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O nome matriz só veio com James J. Sylvester, 1850. Seu amigo Cayley, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstração de sua utilidade. Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera. Com efeito, via-as como: "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..." (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pág 363-370).

Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

É diante da importância do ensino de Matriz e Determinantes, que o presente Plano de Estudo visa levar o aluno à compreensão do campo de conhecimento, que serve de base para nossa vida escolar. Temos como principal foco o Ensino Médio que, por sua vez, vem sofrendo modificações quanto ao modo de ensinar Matemática.

Desenvolvimento

Objetivando levar o aluno ao ensino-aprendizagem de Matriz e Determinantes, para tanto busco utilizar uma linguagem bem clara para desenvolver as aulas numa turma do 2º ano do Ensino Médio, de modo que se efetive o ensino-aprendizagem. Quanto aos recursos, destacarei os meios simples e de fácil acesso, pois de que adianta o colégio possuir recursos de alta tecnologia que não esteja ao nosso alcance?

Estudar um conteúdo matemático como Matrizes pode proporcionar uma série de perguntas das quais se pode citar algumas: ‘Quem inventou isto?’ ou ‘Para quê serve?’ ou ainda ‘Onde eu vou usar?’ ou seja, os alunos querem uma explicação lógica para começar o estudo. Não é para menos que surjam perguntas como estas, pois o motivo para uma criança aprender a andar de bicicleta é que, além de ser divertido, mais tarde ela vai utilizar, mesmo que a princípio, ela não entenda como nem o porquê de estar tentando andar. Por isso, para conhecer um conteúdo novo como Matrizes, é preciso saber ao menos onde vai utilizá-lo.

Todavia a problemática está em criar um ambiente agradável onde os próprios alunos, com o auxílio do professor, consigam identificar e utilizar Matrizes na resolução de problemas do cotidiano. Aprendendo com a experiência dos professores e com sua própria experiência, ou seja, segundo Norocato e Paiva (2008) “Constatamos, mais uma vez, que esta prática, além do crescimento pessoal e profissional, é fortemente favorecida pela construção de saberes provenientes da troca de ideias.”

Entretanto, para que isto aconteça é necessária a participação do professor como orientador/mediador, e também, a participação dos alunos como construidores do próprio saber.

O trabalho será pautado nos seguintes objetivos, a saber: na compreensão do conceito de matriz; na representação e interpretação de uma tabela como uma matriz; identificação dos elementos de uma matriz, bem como no reconhecimento de diferentes tipos de matrizes; na compreensão de aplicação das propriedades das operações com matrizes; na obtenção da transposta de uma matriz, a oposta e da matriz inversa com base em uma matriz dada; na compreensão do conceito de determinante de uma matriz; obtenção do determinante de uma matriz de ordens 1, 2 e 3 e, do cálculo do determinante de uma matriz pela regra de Sarrus.

Para o ensino dos conteúdos, levar em consideração o ensinar e o aprender: As planilhas eletrônicas serão os programas de computador que servirão para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas, pois para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função.

Como estratégia de ensino ou procedimento de didática: A aula será pensada em três fases (antes, durante e depois),de um modo mais simples.

Antes: O professor poderá fazer uma breve revisão sobre determinantes de matrizes de ordem 2 e3,para que os estudantes estejam dispostos a resolver problemas.

Durante: Quando os alunos estiverem com a tarefa em mãos, eles poderão trabalhar em grupos, sem a interferência do professor.

Depois: Ao final da aula, quando a maioria dos alunos conseguirem terminar a tarefa ,haverá o momento de discussão e compartilhamento das ideias entre o professor e os alunos. Nesse ambiente poderão surgir algumas questões como:

Existe alguma relação ao permutar filas (linhas ou colunas)de uma matriz? O que acontece no valor numérico do determinante em relação à multiplicação dos elementos de uma fila (varias) da matriz por um numero, Real k.

Os Recursos materiais utilizados serão: Lápis, borracha, papel A4 e folha de perguntas.

Dentre várias estratégias de ensino sobre Matriz e Determinantes, faz-se necessário que se apresente aos alunos, por exemplo, o vídeo **Cooperativa de Leite**, disponível em: http://www.mais.mat.br/wiki/Cooperativa_de_leite ou esse vídeo:
http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/17236.

O vídeo propõe um problema, onde uma cooperativa de seis fazendas produtoras de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso comum; assim, a questão chave é: Em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

Professor, apresente o vídeo aos alunos até mais ou menos 4 min 26 seg. Quando aparece a imagem do quadro a seguir:

Fonte Vídeo Cooperativa de Leite

Na sequência, solicite que os grupos de alunos resolvam o problema em seus cadernos, indicando qual seria fazenda a ser instalada o tanque e o por que da escolha. O problema em questão admite várias soluções, pois há vários critérios para se decidir qual a melhor opção. Após a resolução, proponha uma rodada para que os grupos justifiquem suas respostas.

É importante observar no vídeo, quando os cooperados decidem adotar como critério que o tanque seja instalado na fazenda que estiver no menor maior percurso, ou seja, dadas as distâncias que cada fazendeiro deverá percorrer para levar seu leite até o tanque, a fazenda escolhida será a que resultar uma menor distância entre as maiores distâncias percorrida pelos outros fazendeiros.

Atividade 1

A seguir, solicite aos alunos que organizem no caderno uma tabela que represente as distâncias entre cada uma das fazendas.

Resposta:

Eis uma sugestão de tabela:

Fazendas	A	B	C	D	E	F
A	0	5	11	14	12	15
B	5	0	6	9	14	10
C	11	6	0	3	8	4
D	14	9	3	0	5	2
E	12	14	8	5	0	7
F	15	10	4	2	7	0

A partir da tabela, abra questionamentos para que os alunos resolvam nos grupos e depois socializem com os demais.

a) Se instalarmos o tanque na fazenda B, o fazendeiro que percorreria a maior distância seria?
Solução: Conforme a segunda linha da tabela, seria o E com 14 Km.

b) Se escolhermos a fazenda A, o fazendeiro que percorreria a maior distância, seria?
Solução: Conforme a primeira linha da tabela seria o F com 15 km.

c) E de acordo com o critério de maior distância percorrida e a menor possível? Qual a melhor opção?
Solução: A fazenda C seria a melhor opção.

Após a realização desta atividade, apresente aos grupos o restante do vídeo. Discuta a segunda tabela apresentada no vídeo (fazendo comparação com a primeira tabela) a partir não apenas das distâncias entre as fazendas, mas também da quantidade de viagens que cada fazendeiro faria por dia.

Fazendas	A	B	C	D	E	F
A	0	15	22	14	36	60
B	20	0	12	9	42	40
C	44	18	0	3	24	16
D	56	27	6	0	15	8
E	48	42	16	5	0	28
F	60	30	8	2	21	0

Explique aos alunos que esta nova matriz não é simétrica como era o primeira, conforme todos podem observar. E que para resolver este problema, é necessário apenas ler e interpretar os dados do problema e, nesse caso, a representação na forma de uma tabela foi muito útil. Que nos dois quadros, o que fizemos foi uma representação de matriz.

Atividade 2

Continuando ainda com o problema e se escolhêssemos outro critério para colocação do tanque. Se fosse instalado em uma das fazendas tal que a soma das distâncias que serão percorridas por todos os fazendeiros seja a menor. Este critério também pode ser apropriado se o custo do transporte for dividido entre todos os cooperados. Solicite que os grupos resolvam no caderno, podem se utilizar também de tabelas como foi feito no anterior. Após discutir as respostas encontradas pelos alunos, formalize:

Solução:

Para resolver o problema não devemos mais olhar para os elementos individuais da matriz de distâncias a serem percorridas pelos fazendeiros, mas sim para a soma dos elementos de cada linha. Nesse caso, a resposta ao problema seria a fazenda C.

Fazendas	A	B	C	D	E	F	
A	0	15	22	14	36	60	127
B	20	0	12	9	42	40	123
C	44	18	0	3	24	16	105
D	56	27	6	0	15	8	112
E	48	42	16	5	0	28	139
F	60	30	8	2	21	0	121

Professor, você pode elaborar outros critérios a partir do problema para resolver com os alunos. Também pode explorar outros conceitos que aparecem no vídeo, de acordo com a pertinência.

Outra atividade a ser exemplificada é sobre operações de Matriz. Veja:

Questão (FGV-2005) As meninas 1 = Adriana; 2 = Bruna e 3 = Carla falam muito ao telefone entre si. A matriz M mostra cada elemento a_{ij} representando o número de telefonemas que “i” deu para “j” no mês de setembro: $M = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 10 \\ 18 & 0 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix}$. Quem mais telefonou e quem mais recebeu ligações?

Solução:

Observe que a diagonal nula informa que ninguém ligou para si mesmo e, obviamente, não recebeu ligação de si mesmo. Decodificando os valores das posições:

a) Adriana fez 23 ligações: 13 para Bruna e 10 para Carla.

b) Bruna fez 24 ligações: 18 para Adriana e 6 para Carla.

c) Carla fez 21 ligações: 9 para Adriana e 12 para Bruna.

d) Bruna foi quem mais telefonou. E recebeu 13 + 12 = 25 ligações.

e) Adriana foi a 2ª menina que mais ligou. E recebeu 18 + 9 = 27 ligações.

f) Carla foi quem menos ligou. E recebeu 10 + 6 = 16 ligações.

A resposta pedida é: Mais telefonou foi Bruna e recebeu mais ligações foi Adriana.

Avaliação

A perspectiva de avaliação deste projeto tem o intuito de desapegar-se parcialmente das provas teóricas, porque a essência desta avaliação está na participação e interesse do aluno pelo conteúdo.

Assim, verificar-se-á como os estudantes assimilaram as ideias relacionadas a matrizes e determinantes e com um teste básico comprovar que aulas que foram dadas foram absorvidas.

	**CEOB-COLÉGIO ESTADUAL OSCAR BATISTA** **AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA- 3º Bim/2014**	**Vr. 3,0**
	Profª Joana D'arc de Paula Rodrigues Leite. **Aluno(a):---**	**Nota:____**

QUESTÃO 1

(Unicap – PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

Habilidade trabalhada: Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Solução

Aplicando a regra de Sarrus, temos que o determinante será da seguinte forma.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \\ 6 & x \end{matrix} = 9.(x-7) + 48 + 4x - 54 - 4x - 8(x-7) = 0$$

$$detA = (x-7) - 6 = 0 \rightarrow x - 13 = 0 \rightarrow x = 13$$

QUESTÃO 2

Determine o valor de x para que o determinante da matriz A seja igual a 8.

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{pmatrix}$$

Habilidade trabalhada: Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Solução

$$\det A = 8 \rightarrow \det A = x(x-2) - (-3)(x+2) = x^2 - 2x + 3x + 6 = 8$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x' = 2;\ x'' = -1$$

Ou seja, temos dois valores para x que fazem com que o determinante da matriz A seja igual a 8.

$$S = \{x \in \mathbb{R} |\ x = 2\ ou\ x = -1\}$$

QUESTÃO 3

Dadas as matrizes $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -7 & -8 & 9 \\ 12 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$, determine a matriz D resultante da operação A + B – C.

Habilidade trabalhada: Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Solução

$$D = \begin{vmatrix} 1+(-7)-2 & 2+(-8)-3 & 3+9-(-4) \\ -4+12-6 & 5+6-7 & 6+5-1 \\ 4+8-2 & 6+7-8 & 8+4-7 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 16 \\ 2 & 4 & 10 \\ 10 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

QUESTÃO 4

(PUC–SP–Adaptada) São dadas as matrizes A = (aij) e B = (bij), quadradas de ordem 2, com aij = 3i + 4j e bij = – 4i – 3j. Considerando C = A + B, calcule a matriz C.

Habilidade trabalhada: Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

Solução

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 3*1+4*1 & 3*1+4*2 \\ 3*2+4*1 & 3*2+4*2 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow B = \begin{vmatrix} -4*1-3*1 & -4*1-3*2 \\ -4*2-3*1 & -4*2-3*2 \end{vmatrix} \Rightarrow B = \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -11 & -14 \end{vmatrix}$$

$$C = A + B$$

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -11 & -14 \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} 7+(-7) & 11+(-10) \\ 10+(-11) & 14+(-14) \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 7-7 & 11-10 \\ 10-11 & 14-14 \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

QUESTÃO 5

Determine a matriz C, resultado da soma das matrizes A e B.

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 12 \\ 45 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

Habilidade trabalhada: Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Solução

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & -9 & 12 \\ 45 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3+(-8) & 5+(-9) & 2+12 \\ 6+45 & 4+6 & 8+(-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & -4 & 14 \\ 51 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} -11 & -4 & 14 \\ 51 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

QUESTÃO 6

Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ calcule **X**, de modo que:

a) **X – M = N – P**

b) **P + X = M – N**

c) **X + (M – P) = N**

Habilidade trabalhada: Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

Solução

Isolando X no 1º membro e efetuando a operação que se apresentar no 2º membro, temos:

a) $X = M + N - P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 6 \end{bmatrix}$.

b) $X = M - N - P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

c) $X = -M + N + P = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

Enfim, a perspectiva de avaliação deste projeto tem o intuito de desapegar-se parcialmente das provas teóricas, porque a essência desta avaliação está na participação e interesse do aluno pelo conteúdo.

Assim, verificar-se-á como os estudantes assimilaram as ideias relacionadas a matrizes e determinantes e com um teste básico comprovar que aulas que foram dadas foram absorvidas.

REFERÊNCIAS

Barroso, J.M. **Conexões com a Matemática**. Obra coletiva. 1ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
[2] BOLDRINI, L., ALVES, J. A. R. Álgebra Linear, Ed. Harbra 3ª Edição, São Paulo, 1980.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. Disponível em : www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf. Acesso em : 12 jul. 2010

http://www.ebah.com.br/content/ABAAAe9tIAC/projeto-didatico-modelando-matrizes