

# Esfera

Trabalho apresentado ao Curso de Formação Continuada  
da Fundação CECIERJ - Consórcio CEDERJ  
Orientadora: SUSI CRISTINE BRITTO FERREIRA  
Grupo : 1  
Série : 2 ano do ensino médio

Guapimirim  
2014

## Sumário

Introdução.....	3
Estratégias adotadas no Plano de Trabalho.....	4
Desenvolvimento.....	5
Avaliação.....	14
Bibliografia.....	15

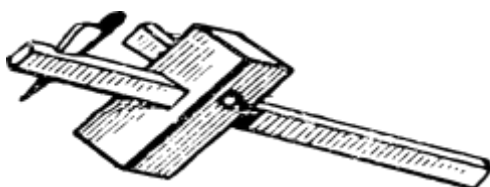


## 1. Introdução:

Esse plano propõe uma forma de ensinar conceitos relacionados à esfera. Nessas atividades, os alunos poderão comprovar a importância do conhecimento matemático.

É esperado que o aluno adquira de forma justificada a habilidade do entendimento matemático de esfera e resolver cálculo de área e volume. Na sequência das atividades o aluno deverá construir o conhecimento através de descobertas. A participação dos alunos e a conclusiva obtenção dos resultados proporcionará aos alunos mais confiança. Não está definido neste plano a utilização do GEOGEBRA ou outro recurso TIC, porém o professor tem total liberdade dentro das possibilidades da escola em utilizar outros meios.

Professor, não dê as respostas prontas é importante que o aluno, raciocine, investigue e descubra padrões, relações e comportamentos, enfim que **construa** seu próprio conhecimento..



## 2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho

Esse plano de trabalho está organizado em dois encontros de 100 minutos cada, ou seja, uma semana para o 2. ano. No primeiro encontro o aluno deverá

adquirir a habilidade de relacionar o volume da esfera com o volume do cone, calculando corretamente o volume da esfera.

No segundo encontro o aluno deverá chegar às conclusões sobre o volume e área da esfera.

### 3. Desenvolvimento

#### **Roteiro de Ação 1 – Volume da Esfera a partir de outros volumes**

- ☐ DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ☐ ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

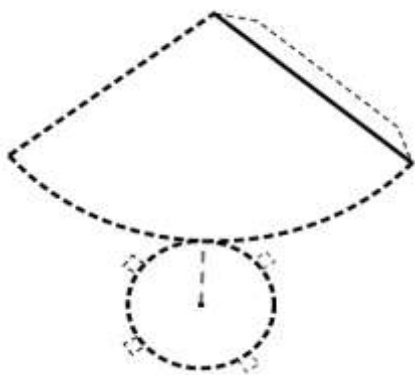
- ❑ ASSUNTO: Geometria Espacial \_ Esfera
- ❑ OBJETIVOS: Trabalhar o conceito de volume da esfera a partir da comparação com o volume de outros sólidos geométricos já conhecidos.
- ❑ PRÉ-REQUISITOS: Volume do Cone
- ❑ MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, folhas com as cópias das planificações, cartolina, lápis, cola, régua, tesoura, bola de isopor de raio 10 cm, arroz.
- ❑ ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em grupos de 3 a 4 alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

#### DESCRITORES ASSOCIADOS:

- ❑ H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.

*Professor, buscamos com este roteiro apresentar o volume da esfera a partir da comparação com volume de outros sólidos já conhecidos dos alunos. Sugerimos o uso de arroz na experiência, que pode ser substituído por serragem, bolinhas de isopor, areia, ou até mesmo água. É aconselhável utilizar cartolina ou papel com maior rigidez que o A4 para essas planificações. Você deverá imprimir e preparar a cópia do Anexo I e distribuí-la juntamente com as semi-esferas para os grupos. Usaremos o termo semi-esferas para se referir a metade da bola de isopor, mas como seus alunos já viram, por ser oca, estamos tratando de uma superfície esférica. Deixe isso claro para seus alunos que este é apenas um “abuso” de linguagem.*

1) Recorte, monte e cole a planificação que você recebeu do seu professor. Não cole a base!!!!!!



2) Que sólido geométrico você construiu? Não se esqueça de citar nome e sobrenome do sólido!!!

---

*Mesmo que os alunos já tenham estudado este sólido geométrico e sua planificação, lembre-os dos tipos de cone (reto, que é o caso da nossa planificação) e oblíquo.*

3) Com o auxílio de uma régua, meça a altura e o raio da base do cone construído. Que valores você encontrou? \_\_\_\_\_

4) Agora, meça o raio da semi-esfera. Que valor você encontrou? \_\_\_\_\_

5) O que podemos afirmar em relação à medida da altura do cone, do raio de sua base e do raio da semi-esfera? Eles são iguais? Discuta com os seus colegas.

---

*Os alunos deverão perceber que a altura do cone, o raio de sua base e o raio da semi-esfera possuem a mesma medida.*

6) Vamos encher a semi-esfera com o arroz? Para isso, utilize o cone, enchendo-o e despejando o seu conteúdo na semi-esfera, até completá-la. Quantas vezes você repetiu este processo?

7) Se tivéssemos uma esfera inteira, seriam necessários \_\_\_\_\_ cones para enchê-la.

8) O que podemos afirmar sobre o volume da esfera em relação ao volume do cone?

*Os alunos precisarão repetir o processo de encher o cone e despejar seu conteúdo na semi-esfera, até completá-la, 2 vezes. No caso de uma esfera, serão necessários quatro cones. Esperamos que seus alunos tenham percebido que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone, desde que o raio da esfera tenha a mesma medida que a altura e o raio da base do cone.*

9) Você lembra a fórmula do volume do cone? Vamos escrevê-la?

**Você deve ter visto no bimestre anterior que a fórmula do volume**

**do cone é dada por  $V = \frac{1}{3} A_b . h = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$**

10) E como ficaria a fórmula do volume da esfera, a partir do que você descobriu no item 8)? Tente escrevê-la em função do raio  $r$  da esfera, já que a altura  $h$  do cone é igual a este raio, ou seja,  $h = r$ .

*Esperamos que seu aluno chegue a seguinte fórmula para o cálculo do volume da esfera*

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 . h = \frac{4}{3} \pi r^2 . r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

11) Agora que você já sabe como calcular o volume da esfera, diga qual é o volume da semi-esfera que você recebeu? Use a medida do raio que você encontrou no item 4.

---

12) E se for uma esfera inteira, qual seria o volume? \_\_\_\_\_

13) Calcule também o volume do cone que você montou. Que valor você encontrou? É o mesmo que o de seu colega?

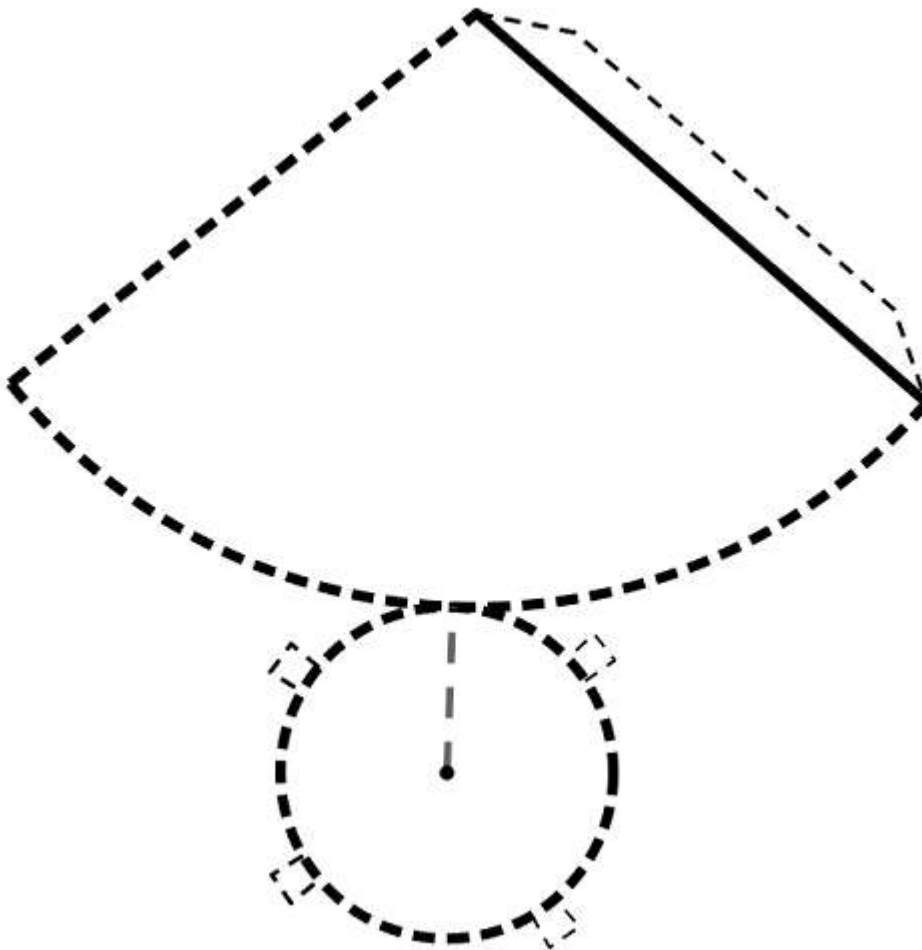
---

14) Vamos preencher a tabela abaixo com as informações que você obteve nos itens anteriores?

Sólido	Raio	Volume
Cone		
Esfera		

Ao responder os itens 10, 11, 12 e 13, esperamos que seu aluno constate que o volume da esfera é realmente 4 vezes o volume do cone.

#### Anexo I



## **Roteiro de Ação 2 – Muito ou pouco couro para as bolas de futebol?**

- ❑ DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ❑ ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ❑ ASSUNTO: Geometria Espacial \_ Esfera
- ❑ OBJETIVOS: Trabalhar o conceito de área da superfície esférica a partir da idéia de volume de esfera e do volume de outros sólidos geométricos já conhecidos.
- ❑ PRÉ-REQUISITOS: Volume da esfera e volume da pirâmide
- ❑ MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, papel A4, bola de isopor de diâmetro 250mm, régua, lápis.
- ❑ ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em grupos de três ou quatro alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

### **DESCRIPTORIOS ASSOCIADOS:**

- ❑ H24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- ❑ H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume

Com este roteiro pretendemos levar o aluno a deduzir como calcular a área da superfície esférica partindo da fórmula do volume deste sólido. Para isso, vamos falar num tema que chama bastante atenção dos alunos: o futebol. Mais especificamente na bola de futebol. Por se tratar de um assunto bastante atual, ainda mais em vésperas de Copa das Confederações, você pode dar início a esta aula conversando sobre a fabricação das bolas de futebol para esta disputa e para a Copa do Mundo de 2014 com a turma. Sugerimos uma esfera de isopor de



250 mm por ser de um tamanho bastante próximo de uma bola de futebol. A bola de futebol é usada para a prática do esporte nas suas diversas variações. Normalmente são fabricadas em couro sintético, pois sua espessura varia muito menos do que a do couro natural, e consiste de várias camadas que são revestidas com uma cobertura à prova d'água. As bolas são finalizadas, tradicionalmente, à mão por costureiros habilidosos, apesar de que, cada vez mais as bolas são produzidas por máquinas. É um dos principais ícones do esporte, sendo universalmente reconhecida como símbolo do mesmo. Estima-se que sejam produzidas anualmente 40 milhões de bolas de futebol no mundo, número que sobe para 60 milhões em anos de Copa do Mundo de futebol.

Adidas Telstar, bola usada na Copa de 1970, cujo desenho se tornou ícone de bola de futebol. Ela é originada de um poliedro que sofre deformação até tomar a forma aproximada da esfera. Observe que sua superfície é formada de



### **Atividade**

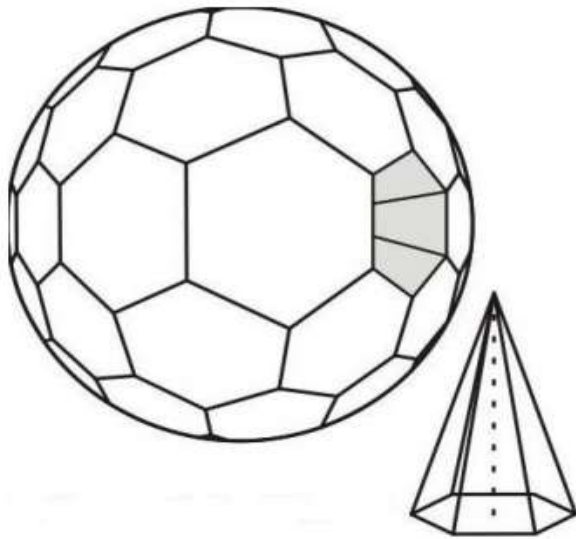
- 1) Imagine que você irá montar uma pequena fábrica de bolas de futebol e precisa saber quanto de tecido (neste caso, couro) é gasto na fabricação de uma bola. Você tem algum palpite? Troque uma ideia com seu colega.
- 2) Vamos fazer uma estimativa da quantidade de couro necessária para fabricar uma bola? Para isso, usaremos uma bola de isopor do tamanho aproximado de uma bola de futebol.

Pegue as folhas de papel A4 e cubra toda a bola, de forma que fique o mais perfeito possível e gaste a menor quantidade de papel.

3) Com uma régua, meça o comprimento e a largura do papel gasto e, em seguida, calcule sua área. Quanto de papel você precisou?

*Caso os alunos tenham dificuldades em calcular a área do papel A4 utilizado, lembre-os que se trata de um retângulo, cuja área é dada por:  $Ab \times h$ . Se eles precisarem cortar o papel, oriente-os a manter a forma retangular da folha ou cortar num outro formato (triangular, circular) cuja área possa ser calculada com facilidade.*

4) Imagine que a superfície de uma bola de futebol é composta por uma infinidade de hexágonos e seu interior não é oco. Fatiaremos a bola, de forma a obter pirâmides cujas bases formam a superfície esférica e os vértices se encontram no centro da esfera, como mostra a figura a seguir.



5) Como podemos escrever a área da superfície da esfera em função da área dos polígonos que a compõem?

---

6) E quanto ao volume da esfera, como podemos escrevê-lo em função do volume dos sólidos que a compõem?

---

Note que a superfície esférica é formada por uma infinidade de polígonos. Mostre aos seus alunos que a área dessa superfície pode ser escrita como a soma das áreas dos polígonos, ou seja,

$$A_{SE} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

e o volume da esfera pode ser escrito como a soma do volume das pirâmides. Sendo assim

$$V_E = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

7) Você lembra como é a fórmula do volume da pirâmide? Converse com seus colegas e escreva-a. Se você não lembrou, vamos rever a fórmula do volume da pirâmide? Ela é dado por

$$V_P = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

8) Observe novamente a figura do item 4. O que podemos afirmar quanto à altura da pirâmide? Não esqueça que cada pirâmide tem como vértice o centro da bola e a base compõe a superfície esférica.

---

9) Então, como podemos escrever a fórmula do volume da pirâmide em função do raio da esfera?

---

10) Agora que você já sabe que o volume da esfera é igual à soma do volume das  $n$  pirâmides, tente reescrevê-lo em função do raio da esfera.

*Esperamos que seu aluno deduza que a altura da pirâmide é igual ao raio da esfera, ou seja  $hR$*

Assim, temos que o volume da pirâmide pode ser escrito da seguinte forma

$$V_P = \frac{1}{3} A_b \cdot R$$

E, portanto, o aluno deverá chegar que o volume da esfera é dado por

$$V_E = \frac{1}{3} A_1 \cdot R + \frac{1}{3} A_2 \cdot R + \frac{1}{3} A_3 \cdot R + \dots + \frac{1}{3} A_n \cdot R$$

Que tal reescrever o volume da esfera de forma a isolar os termos que se repetem? Tente! Após isolar os termos que se repetem no volume da superfície esférica, os alunos terão a seguinte sentença

$$V_E = \frac{1}{3} R (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n)$$

11) Com as respostas obtidas nos itens 5 e 11, reescreva o volume da esfera.

---

12) Você já sabe calcular o volume da esfera, correto? Qual é a fórmula para este cálculo? Você deve ter visto que o volume da esfera é dado por

$$V_E = \frac{4}{3} \pi R^3$$

13) O que podemos afirmar sobre o volume da esfera, considerando os itens 12 e 13? Existe alguma relação nas respostas dadas nestes itens?

---

14) E a que conclusão podemos chegar quanto a área da esfera? Ao reescrever o volume da esfera no item 12, temos que

$$V_E = \frac{1}{3} R \cdot A_{SE}$$

Assim,

$$V_E = \frac{1}{3} R \cdot A_{SE} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Basta isolar  $A_{SE}$ . Ficamos com a seguinte fórmula

$$A_{SE} = 4\pi R^2$$

15) Agora que você já sabe como calcular a área da superfície esférica, e considerando  $\pi = 3,14$ , preencha a tabela abaixo.

Raio da esfera	Área
1	
2	
4	
8	
16	

16) Vamos voltar ao problema inicial? Meça o raio da bola de isopor e responda: quanto de couro será necessário para recobrir a esfera, melhor, a bola de futebol?

---

17) Compare sua resposta com a sua estimativa. Os valores são aproximados?

---

## 4. Avaliação

Professor as folhas de atividades entregues aos alunos serviram para avaliar a aprendizagem dos alunos e até mesmo a eficiência dessa metodologia de ensino. Verifique se adquiriram a habilidade de calcular corretamente o volume e área da esfera.

O aluno deverá ser capaz de modelar e resolver questões do tipo:

Descritor associado : H24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

(FFT) Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descobrir a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente  $\frac{3}{4}$  da superfície total.



extraído de [http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com.br/2013/11/questoes-resolvidas-de-vestibulares\\_21.html](http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com.br/2013/11/questoes-resolvidas-de-vestibulares_21.html)

## 4. Bibliografia

Smole, Kátia Cristina Stocco; Maria Ignez de Souza- Matemática: Ensino médio - 6 ed. São Paulo; Saraiva, 2010