

Formação Continuada



Formação continuada para professores de Matemática Fundação CECCEIRJ/SEEDUC-RJ/ outubro de 2014

Colégio: CIEP 456 Marco Pólo

Professor: Carlos Alberto Namorato Filho

Série: 2º ano - Ensino Médio

Tutor: **Susi Cristine Britto Ferreira**

Avaliação da implementação do plano de trabalho 1 - Sistemas Lineares

–Introdução

Vários problemas nas áreas científica, tecnológica e econômica são modelados por sistemas de equações lineares e requerem a solução destes no menor tempo possível. Os sistemas de equação são ferramentas muito comuns na resolução de problemas em várias áreas (matemática, química, física, engenharia,...) e aparecem sempre em concursos e exames, como é o caso do vestibular. Os sistemas, geralmente, são resolvidos com certa facilidade o que causa muitas vezes uma desatenção, por parte do aluno, já que ele não tem dificuldade para encontrar a solução do sistema. Mas ele esquece que a dificuldade está na armação e principalmente na solução final da questão. Os sistemas são ferramentas que mesmo funcionando necessitam de alguém que saiba o construir com elas. Então o principal entrave na solução de um sistema linear não é o sistema linear em função dos n processos de resolução o problema esta mais uma vez voltado para interpretação do sistema. Varias são as aulas que alunos ficam vários minutos tentando interpretar o problema e que por muitas vezes são deixados de lado a espera de finalmente serem interpretados pelo professor. Pouco importa a presença da calculadora ou ate mesmo um site que resolva um sistema de matrizes somente colocando os coeficientes do sistema, se o aluno encontra-se órfão na interpretação do problema.

Resolução de Sistemas Lineares

1. Trocar duas equações do sistema de posição.
2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar diferente de zero.
3. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Vídeo ilustrativo da primeira parte de sistema em: <http://youtu.be/8iwlrw63W2c>



lineares Sistemas - parte 1
youtube.com / noiva de Bruno
11:59

Atividade 1

Habilidades relacionadas: Sistema linear de equação com duas incógnitas

Pré-requisito: equação do primeiro grau

Tempo de duração: 100 minutos = 02 aulas

Disposição da turma: Em dupla para solução de exercícios de fixação

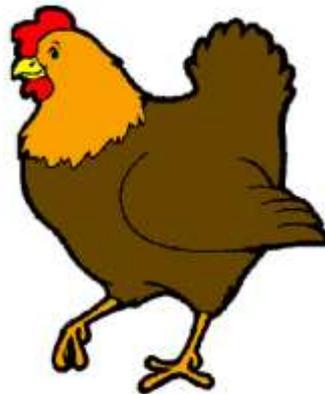
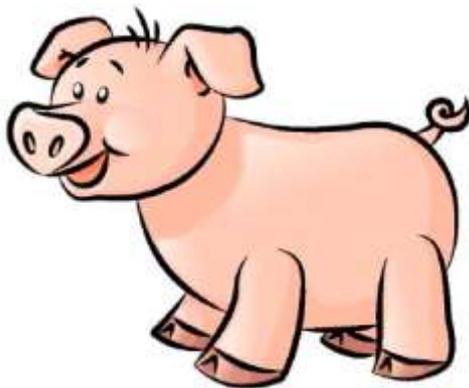
Recurso utilizado: Quadro, Xerox de exercícios de fixação.

Objetivo: Construir base para introdução do sistema linear

Descritores: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

1- Resolvendo um problema do cotidiano:

Com alguns problemas do cotidiano o professor tenta levar os alunos a interpretar e resolver os problemas que determinarão a solução por um sistema linear de duas incógnitas:



Num primeiro momento o professor deverá entregar cinco cartas de cada figura acima para alunos que estão dispostos em duplas, onde os alunos terão de determinar a solução em função da situações envolvendo a seguinte historia:

Em um terreno existem porcos e galinhas num total de _____ animais e com _____ pés. Quantos porcos e galinhas existem no terreno.

O professor deve criar vários problemas com a quantidade de animais bem como a quantidade de pés para que os alunos tenham diferentes soluções, o numero de animais deverá certamente ser inferior a dez para que não fique tão obvio a utilização de todas as cartas de figuras de animais.

2- Resolvendo o problema na forma linear:

Após verificar e resolver todos os problemas demonstrar a solução linear do problema acima onde os alunos por meios de cálculos algébricos poderão verificar a solução do problema. Vamos demonstrar as mais diversas resoluções do problema mostrando que independente da resolução sempre teremos a mesma resposta sendo essa resolução efetuada pelo método da adição, multiplicação ou até mesmo utilizando as matrizes.

3- Criando problema:

Com as figuras abaixo deixar os alunos criarem um problema que envolvam sistema linear:



4) Folha com exercício de fixação (anexo) com resolução com acompanhamento do professor, sanando e resolvendo possíveis dúvidas.

Atividade 2

Habilidades relacionadas: Sistema linear de equação com duas incógnitas

Pré-requisito: aula anterior

Tempo de duração: 100 minutos = 02 aulas

Disposição da turma: Em dupla para solução de exercícios de fixação

Recurso utilizado: Quadro, Xerox de exercícios de fixação.

Objetivo: Construir base para interpretação de problemas com solução de sistema linear

Descritores: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

1 – Interpretando problema com duas incógnitas:

Neste momento começamos a introduzir os problemas matemáticos e levar os alunos as mais diversas interpretações possíveis de cada problema. É importante fazer com que o aluno antes de resolver os problemas tente traçar alguns pontos para depois resolver realmente o problema, tais como:

- Ler todo o problema uma primeira vez
- Entender o que o problema esta propondo
- Ler novamente o problema decidindo quais são as incógnitas envolvidas
- Verificar qual a forma de resolução mais adequada ao problema
- Resolver o sistema linear
- Verificar se a resolução esta de acordo com o que esta sendo perguntado no problema.

EXEMPLO:

Cláudio usou apenas notas de R\$ 20,00 e de R\$ 5,00 para fazer um pagamento de R\$ 140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas?

Passos A e B

x notas de 20 reais y notas de 5 reais

Passo C

Equação do número de notas: $x + y = 10$

Equação da quantidade e valor das notas: $20x + 5y = 140$

$$x + y = 10$$

$$20x + 5y = 140$$

Passo D

Aplicar método da substituição

Passo E

Isolando x na 1ª equação

$$x + y = 10$$

$$x = 10 - y$$

Substituindo o valor de x na 2ª equação

$$20x + 5y = 140$$

$$20(10 - y) + 5y = 140$$

$$200 - 20y + 5y = 140$$

$$- 15y = 140 - 200$$

$$- 15y = - 60 \text{ (multiplicar por -1)}$$

$$15y = 60$$

$$y = 60/15$$

$$y = 4$$

Substituindo y = 4

$$x = 10 - 4$$

$$x = 6$$

Passo F

Seis notas de 20,00 = 120,00 e 4 notas de 5,00 = 20,00 perfazendo um total de 140,00 o que esta correto segundo o problema.

2- Vídeo sobre resolução de sistema com 2 incógnitas em <http://youtu.be/IGdBtMgQIs0>



3) Folha com exercício de fixação (anexo) com resolução com acompanhamento do professor, sanando e resolvendo possíveis dúvidas

Atividade 3

Habilidades relacionadas: Sistema linear de equação com duas incógnitas

Pré-requisito: aula anterior

Tempo de duração: 100 minutos = 02 aulas

Disposição da turma: Em dupla para solução de exercícios de fixação

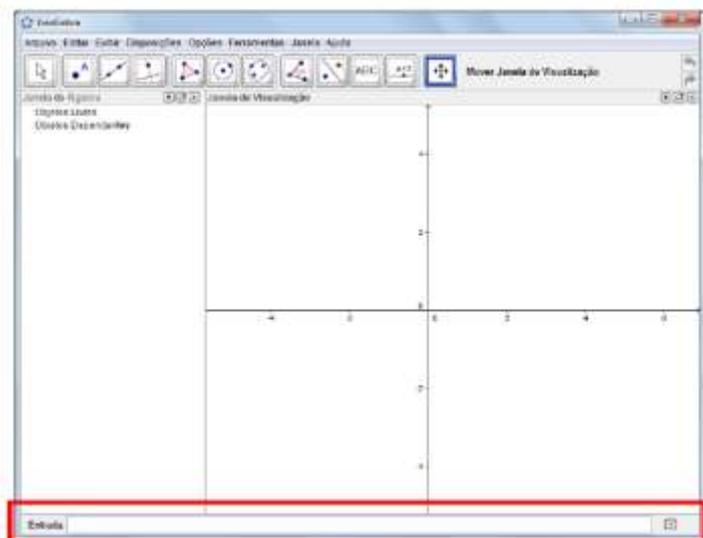
Recurso utilizado: sala de informática – Geogebra

Objetivo: Correlacionar a resolução algébrica de um sistema com duas incógnitas com a solução algébrica

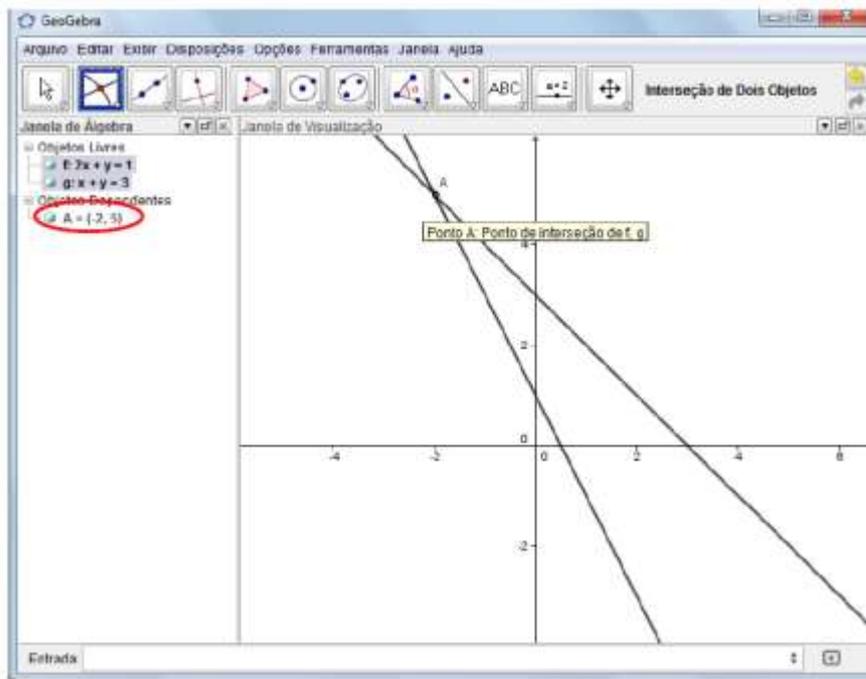
Descritores: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

1- Relacionado as respostas:

Neste momento vamos levar os alunos a verificar a solução dos problemas propostos nas aulas anteriores utilizando o software Geogebra. Os alunos após uma explanação da utilização do software Geogebra deverão interpretar os gráficos e suas soluções.



Na parte entrada deverá ser digitada a primeira e segunda equação linear.



Na intersecção das duas retas esta a solução do sistema (x,y) .

2) Folha com exercício de fixação (anexo) com resolução com acompanhamento do professor, sanando e resolvendo possíveis duvidas

Atividade 4

Habilidades relacionadas: Sistema linear de equação com três incógnitas

Pré-requisito: aula anterior

Tempo de duração: 100 minutos = 02 aulas

Disposição da turma: Em dupla para solução de exercícios de fixação

Recurso utilizado: Quadro, Xerox de exercícios de fixação.

Objetivo: resolução de sistema com 3 incógnitas

Descritores: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

1- Resolvendo um sistema linear de 3 incógnitas por escalonamento;

Utilizamos a regra de Cramer para discutir e resolver sistemas lineares em que o número de equações (**m**) é igual ao número de incógnitas (**n**). Quando **m** e **n** são maiores que três, torna-se muito trabalhoso utilizar essa regra. Por isso, usamos a técnica do *escalonamento*, que facilita a discussão e resolução de quaisquer sistemas lineares.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

- Fixamos como 1^o equação uma das que possuem o coeficiente da 1^o incógnita diferente de zero.
- Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1^a incógnita das demais equações.
- Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Vamos então aplicar a técnica do escalonamento, considerando dois tipos de sistema:

I. O número de equações é igual ao número de incógnitas ($m=n$)

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 1:

1^o passo: Anulamos todos os coeficientes da 1^o incógnita a partir da 2^o equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes:

- Trocamos de posição a 1^o equação com a 2^o equação, de modo que o 1^o coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Trocamos a 2^o equação pela soma da 1^o equação, multiplicada por -2, com a 2^o equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Trocamos a 3^o equação pela soma da 1^o equação, multiplicada por -3, com a 3^o equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

2^o passo: Anulamos os coeficientes da 2^o incógnita a partir da 3^o equação:

- Trocamos a 3^o equação pela soma da 2^o equação, multiplicada por -1, com a 3^o equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \leftarrow [(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + y = 3 \text{ (I)} \\ -7y - 3z = -2 \text{ (II)} \\ -2z = -6 \text{ (III)} \end{cases} \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Agora o sistema está escalonado e podemos resolvê-lo.

$$-2z = -6 \Rightarrow z = 3$$

Substituindo $z=3$ em (II):

$$-7y - 3(3) = -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow y = -1$$

Substituindo $z=3$ e $y=-1$ em (I):

$$x + 2(-1) + 3 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Então, $x=2$, $y=-1$ e $z=3$

3) **Vídeo com escalonamento** em <http://youtu.be/JO-ths7cFX4>



Sistemas de Equações 3x3 - Por substituição

youtube.com / Tareasplus English

06:30

2) Folha com exercício de fixação (anexo) com resolução com acompanhamento do professor, sanando e resolvendo possíveis dúvidas

Anexo:

Folha de exercícios:

Segue folha de exercícios proposta para o estudo de sistemas lineares de duas e três incógnitas que acompanha todo o plano de curso, os problemas ao final estão com as respostas para facilitar a conferência pelos alunos.



Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação
CIEP Brizolão 456 -Marco Polo
Decreto nº19.011/93 – Diário Oficial de 16/09/1993
Rua Iglesias Lopes, 870 – Cantagalo - CEP 25806-040– Três Rios – RJ – UA 181838
Tel.: (24) 2255 5695 e-mail: ciepmarcopolotr@gmail.com CGC: 00.900.469/0001.87



Primeira - Lista de Exercícios com problemas de sistema linear com duas incógnitas

- 1) A idade de César é o quádruplo da idade de Carlos e a soma das idades é 78 anos. Quais são as idades?
- 2) Atualmente, Gilda tem 14 anos e Aluisio 4 anos. Daqui a quantos anos Gilda terá o dobro da idade de Aluisio?
- 3) A soma das idades de duas pessoas A e B é 36 anos. A idade da pessoa A diminuída de 2 anos é igual a idade da pessoa B aumentada de 4 anos. As idades são?
- 4) Eduardo e José tem hoje 12 e 15 anos respectivamente. Daqui a quantos anos a soma das idades será 61 anos?
- 5) A soma das idades de Renata e Denise é 28 anos. A idade de Renata é igual a $\frac{3}{4}$ da idade de Denise. Quantos anos tem cada uma?
- 6) Eu tenho 37 anos e minha aluna tem 15 anos. A quantos anos eu tive o triplo de sua idade?
- 7) Do triplo da idade de Marcelo subtraímos 3 anos. Do dobro da mesma idade adicionamos 5 anos. Tendo obtido resultados iguais. Qual a idade de Marcelo?
- 8) Um pai tem 56 anos e seus filhos tem 3, 5 e 8 anos. No fim de quantos anos a idade do pai será a soma das idades dos filhos?
- 9)) A soma das idades de Ivo, Rubens e Vicente é 85 anos. Ivo tem 7 anos mais que Vicente e Rubens é 4 anos mais moço que Ivo. Quais são as idades?
- 10) Daniel tem atualmente 3 anos mais que Carla. A soma das idades é 31 anos. Qual a idade de cada um? Há quanto tempo Daniel tinha o dobro da idade de Carla?
- 11) Maria tem hoje 31 anos a menos que sua mãe. Há dez anos atrás a soma das idades das duas era 49 anos. Qual é a idade da mãe de Maria?

12) Marisa tem 3 anos mais do que Sonia. Há 5 anos a soma de suas idades era 51 anos. Quantos anos elas tem?

13) Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Em anos, qual a soma das idades ?

14) Quando José nasceu, Bruno tinha 4 anos. Decorridos 17 anos, qual a diferença das idades?

15) Quando o filho de Ana nasceu ela tinha 21 anos. O dobro da idade que ela tem hoje é igual a 45 anos a mais que o sêxtuplo da idade atual dele. Onde esta o pai da criança hoje?

16) Quando Roberto nasceu, eu tinha 25 anos. Nossas idades hoje somam 56 anos a mais que a idade de Vera, que tem 29 anos. Que idade tem Adriana que nasceu quando Roberto tinha 21 anos?

17) Há 4 anos as idades de duas pessoas estavam entre si como 8 está para 11. Se hoje a razão entre elas é $\frac{4}{5}$ daqui a 8 anos elas terão juntas quantos anos ?

18) Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que você tem. Quando você tiver a idade que eu tenho a soma das nossas idades será 72 anos. A minha idade é igual a?

Segundo - Problemas com sistemas lineares com três Incógnitas

01. (FMTM-MG) Três pacientes usam, em conjunto, 1830mg por mês de um certo medicamento em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5mg, o paciente B, de 10mg, e o paciente C, de 12mg. O paciente A toma metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Quantas cápsulas tomam cada paciente: **Resposta A 30, B 60 C 90**

02. (UFRN) Três amigos, denominados X, Y e Z, utilizam o computador todas as noites. Em relação ao tempo em horas em que cada um usa o computador, por noite, sabe-se que:

- o tempo de X mais o tempo de Z excede o tempo de Y em 2;
- o tempo de X mais o quádruplo do tempo de Z é igual a 3 mais o dobro do tempo de Y;
- o tempo de X mais 9 vezes o tempo de Z excede em 10 o tempo de Y.

A soma do número de horas de utilização do computador, pelos três amigos, em cada noite, é igual a: **resposta 6 h**

03. (Unifor-CE) Sejam X, Y e Z três artigos distintos que são vendidos em certa loja. Sabe-se que:

- X custa tanto quanto Y e Z juntos; o preço de Y é a diferença entre o dobro de X e 50 reais;
- o preço de Z é a diferença entre o triplo do de Y e 80 reais. Nessas condições, pela compra dos três artigos, sendo um único exemplar de cada tipo, deverão ser desembolsados: **resposta R\$ 80,00**

04. (Unifesp 2007) Em uma lanchonete, o custo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é R\$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma torta de maçã, o custo vai para R\$ 30,50. O custo de um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã, em reais, é **resposta 6,50**

05) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha do pará. Sabendo-se que o quilo do amendoim custa R\$5,00, o quilo da castanha de caju, R\$ 20,00 e o quilo da castanha do pará R\$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser R\$ 5,75. Além disso a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas. Determine a quantidade de gramas de cada ingrediente. **Resposta Amendoim 250g castanha caju 125g castanha para 125 g**

06) Roberto gosta de fazer caminhada em uma pista próximo a sua casa. Ao longo da pista existem uma lanchonete, um posto medico e uma banca de revista. Roberto constatou que da lanchonete a banca de revista passando pelo posto medico caminhou 1000 passos do posto medico a lanchonete passando pela banca de revistas caminhou 800 passos, e da banca de revistas ao posto medico passando pela lanchonete caminhou 700 passos . Considerando que o passo de Roberto tem 80 cm qual é o comprimento da pista? **Resposta 1000m ou 1 Km**

Avaliação:

» Separar a turma em grupo de 2 alunos, onde deverá ser colocado um problema, o grupo resolverá o problema e demonstrará a interpretação e a estratégia na solução do problema com sistema lineares

» Um trabalho em sala de aula com consulta as anotações do aluno feito em seu caderno, onde deve ficar bem claro que cada aluno deverá consultar somente o seu caderno, valorizando o aluno que anotou e participou da aula.

» Avaliação individual escrita onde serão cobrados do aluno os conhecimentos adquiridos na interpretação e elaboração da solução final de cada problema

Segue abaixo a primeira **avaliação um trabalho de consulta**, e a seguir uma avaliação da **forma tradicional**.



Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação
CIEP Brizolão 456 -Marco Polo
Decreto nº 19.011/93 – Diário Oficial de 16/09/1993

Rua Iglesias Lopes, 870 – Cantagalo - CEP 25806-040– Três Rios – RJ – UA 181838
Tel.: (24) 2255 5695 e-mail: ciepmarcopolotr@gmail.com CGC: 00.900.469/0001.87



Aluno _____ nº _____ Tuma _____ avaliação de matemática 2º ano médio

01-. Um feirante estava vendendo embalagens com 10 pêras, 5 maçãs e 10 laranjas por R\$ 4,05. O seu concorrente da barraca ao lado vendia um pacote contendo 12 pêras, 3 maçãs e uma dúzia de laranjas por R\$ 4,41 e em uma outra barraca vendia 4 pêras, 7 maçãs e 15 laranjas por R\$ 3,25. Sabendo-se que o preço de cada espécie de fruta era o mesmo nas três barracas, qual o preço a se pagar por 8 pêras, 2 maçãs e 10 laranjas em qualquer uma dessas barracas?

02) Sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = -6 \\ 3x - y + z = 0 \end{bmatrix}$$



Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação
CIEP Brizolão 456 -Marco Polo

Decreto nº 19.011/93 – Diário Oficial de 16/09/1993
Rua Iglesias Lopes, 870 – Cantagalo - CEP 25806-040– Três Rios – RJ – UA 181838
Tel.: (24) 2255 5695 e-mail: ciepmarcopolotr@gmail.com CGC: 00.900.469/0001.87



Nome _____ nº _____ trabalho de matemática em sala – Prof Carlos Namorato
Temos o destino que merecemos. O nosso destino está de acordo com os nossos méritos. [Albert Einstein](#)

01) Determine o valor de x e y no sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 20 \\ 2x - y - z = -15 \\ -4x + y - 5z = -41 \end{cases}$$

02) Caio foi a papelaria, e adquiriu três cadernos duas canetas e uma lapiseira por R\$ 34,00, Silvio também foi a mesma papelaria e adquiriu dois cadernos, uma caneta e uma lapiseira por R\$ 22,00, em seguida Kelly indo a mesma papelaria comprou um caderno, duas canetas e uma lapiseira gastando R\$ 18,00. Qual o custo de cada item.

Referências

Roteiro de ação: Curso de aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do ensino médio

DANTE matemática- volume único Editora Ática cod livro 102400

FTD Matemática, Benigno Barreto Filho/Claudio Xavier da Silva

Site: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/area-setor-circular.htm>

Site: <http://www.brasile scola.com/matematica/volume-piramide.htm>

Site: <http://professornamorato.blogspot.com.br/>

Site: <http://www.youtube.com/>