

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 4º Bimestre/2014
Plano de Trabalho 1

SISTEMAS LINEARES

$$\begin{array}{l} 2.\text{maçãs} + 5.\text{laranjas} = \text{R\$ } 9,60 \\ 23.\text{maçãs} + 18.\text{laranjas} = \text{R\$ } 54,31 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 23 & 18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{maçãs} \\ \text{laranjas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,60 \\ 54,31 \end{bmatrix}$$

Acesso 14.10.14 - <http://exclfromhell.blogspot.com.br/2013/03/23-velhas-sistema-de-equacoes-lineares.html>

Tarefa 1

Cursista: Thais Monteiro Pereira

Grupo: 1

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

S U M Á R I O

Introdução.03

Desenvolvimento.04

Avaliação.17

Referências bibliográficas.18

INTRODUÇÃO

A proposta do presente plano de trabalho é uma abordagem dinâmica e diferenciada do estudo das Sistemas Lineares, onde o objetivo principal é permitir que os alunos atuem diretamente na construção do seu próprio conhecimento através das atividades propostas.

É fundamental oferecer subsídios que desperte no aluno o interesse em aprender formas rápidas, com significado, determinando facilmente o resultado buscado. Dar significado ao conteúdo estudado torna a aula mais atrativa, pois mostra o aluno a aplicabilidade da Matemática, normalmente vista em muitos conteúdos pelos alunos como sem utilidade alguma.

Trabalhar com novos meios e ferramentas dinâmicas de ensino, disponibilizadas pelo avanço tecnológico, procura-se desenvolver e despertar novas habilidades em nossos alunos. Nesse sentido o uso de vídeos, softwares e situações-problemas vividas dia a dia pelos alunos, auxilia o professor numa prática mais atrativa de modo que as estratégias de aprendizagem desenvolvidas por ele alcance a maioria dos alunos.

A avaliação ocorrerá no decorrer da aplicação do conteúdo, levando em conta a participação do aluno ao executar as atividades, sejam individualmente, em duplas ou em grupos, através de exercícios avaliativos e trabalhos em grupos/duplas/individual. A recuperação de conteúdos ocorrerá de forma paralela, permitindo ao aluno a recuperação no contexto classificatório (nota) através de uma nova estratégia para alcançar o objetivo, que é a assimilação de conteúdo do aluno. Para a aplicação do plano, serão necessários **dez tempos** de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e avaliação totalizando **500** minutos.

Atividade 1 – Relembrando Sistemas

- **Área do conhecimento:** Matemática
- **Assunto:** Sistemas
- **Habilidade relacionada:** Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.
- **Objetivos:** Resolver Sistemas Lineares de Ordem 2.
- **Pré-requisitos:** Sistema e conhecimento de Matemática básica.
- **Tempo de duração prevista:** 100 minutos.
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **Organização da turma:** Em duplas.
- **Metodologia adotada:**

Serão propostas alguns sistemas para que os alunos escolham qual é o melhor método para resolvê-los, procedendo da maneira que achar mais viável. Após, serão apresentadas algumas situações problemas para que os alunos identifiquem as equações ali representadas e resolvam os sistemas.

Para o bom andamento da atividade, em alguns momentos será necessário que o professor faça as intervenções necessárias, pois alguns alunos podem demonstrar dificuldades para transformar a linguagem materna em linguagem matemática.

1) Resolva os sistemas abaixo:

$$S_1: \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$S_3: \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$S_4: \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

2) No aniversário de Alice, a sua mãe Natalia notou que se colocasse 3 cadeiras em cada mesa, sobrariam 14 das cadeiras disponíveis, mas se colocasse 4 em cada, faltariam 8 cadeiras para preencher todos os lugares. Construa o modelo matemático que traduza o problema proposto. Depois calcule quantas mesas e quantas cadeiras estão disponíveis.

3) Num aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se os pequenos fossem mais um, seria o dobro dos grandes. Escreva o sistema linear que representa o problema proposto acima, e calcule quantos peixes pequenos e grandes há no aquário.

4) Um estudante estava resolvendo uma prova de matemática constituída de 20 questões. Para evitar que o estudante apenas chutasse uma alternativa sem efetivamente ler e tentar resolver a questão, criou-se um sistema de pontuação no qual o candidato ganha 5 pontos por resposta correta, mas perde 2 pontos por resposta incorreta e, dentro deste sistema ele totalizou 58 pontos? Quantos são os acertos e os erros?

5) Numa discoteca, o preço da entrada estava indicado na bilheteria:

Homem = R\$ 30,00

Mulher = R\$ 25,00

Sabe-se que foram vendidos, no total, 100 ingressos e que o valor arrecadado com a venda dos ingressos foi de R\$ 2 700,00. Escreva o sistema linear que represente a situação proposta e calcule quantos homens e mulheres entraram na discoteca.

6) A população da cidade de São Gonçalo é três vezes maior que a população da cidade de Tanguá. Somando a população das duas cidades temos o total de 200.000 habitantes. Qual é a população de cada cidade?

7) João usou apenas notas de R\$ 20,00 e de R\$ 5,00 para fazer um pagamento de R\$ 140,00. Sabendo que foram utilizadas um total de 10 notas, qual é o número de notas de R\$ 5,00 e R\$ 20,00 para que fosse feito o pagamento?

Atividade 2 – Sistemas Lineares 3x3

- **Área do conhecimento:** Matemática
- **Assunto:** Sistemas
- **Habilidade relacionada:** Resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas.
- **Objetivos:** Resolver Sistemas Lineares de Ordem 3 utilizando a regra de Cramer.
- **Pré-requisitos:** Sistema e conhecimento de Matemática básica.
- **Tempo de duração prevista:** 100 minutos.
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividades, lousa, caneta para quadro, lápis e borracha.
- **Organização da turma:** Em duplas.
- **Metodologia adotada:** O conteúdo será apresentado de maneira que os alunos consigam compreender a aplicação dos determinantes na resolução dos sistemas lineares.

Considerando os sistemas abaixo, iremos identificar os determinantes por eles formados.

$$S_1: \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{2 equações e 2 incógnitas} \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{array} \right| \neq 0 \end{array}$$

$$S_2: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x + 3y - 2z = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{3 equações e 3 incógnitas} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{array} \right| \neq 0 \end{array}$$

Regra de Cramer

Um dos métodos mais simples para a resolução de sistemas lineares é através da regra de Cramer.

Gabriel Cramer, matemático suíço, (1704 – 1752), sistematizou um procedimento que permite resolver um sistema linear por meio de resolução de determinantes.

Vamos explicar de forma bem simples como resolver um sistema 2x2 pelo método de cramer. Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

A solução será dada por $x = \frac{Dx}{D}$ e $y = \frac{Dy}{D}$

Mas quem é D, Dx e Dy? Acompanhe os cálculos abaixo:

D = Determinante da Matriz dos coeficientes.

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det D} = [1 \times (-1)] - [1 \times 3] = -1 - 3 = -4$$

$$Dx = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det Dx} = [20 \times (-1)] - [1 \times 8] = -20 - 8 = -28$$

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det Dy} = [1 \times 8] - [20 \times 3] = 8 - 60 = -52$$

$$x = \frac{-28}{-4} = 7$$

$$y = \frac{-52}{-4} = 13$$

$$S = \{(7, 13)\}$$

OBS: Para realizar Dx é necessário substituir a igualdade do sistema pelos coeficientes da incógnita x. Para o Dy, procede-se da mesma maneira na substituição.

Para resolver os sistemas lineares 3x3, o procedimento é o mesmo que para o realizado na ordem 2, porém terá o cálculo do determinante da 3ª incógnita.

Classificação de Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ser classificado de acordo com o número de soluções que ele possui.

Dessa maneira, se um sistema linear apresentar pelo menos uma solução, dizemos que é um sistema possível. Caso esse sistema tenha uma única solução ele será determinado, mas se o sistema tiver mais de uma solução, dizemos que ele é indeterminado. Entretanto, se o sistema não possui solução alguma, dizemos que ele é impossível.

Simbolicamente, utilizamos as seguintes siglas:

SPD – Sistema Possível Determinado

SPI – Sistema Possível Indeterminado

SI – Sistema Impossível

Mas, como é possível verificar o número de solução de um sistema?

Vamos considerar um sistema de duas equações nas incógnitas x e y . Utilizando a regra de Cramer, a solução será dada por: $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$

Assim, temos, as seguintes condições para classificação do sistema linear:

Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD)

Se $D = 0$ e $D_x = 0$, $D_y = 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI)

Se $D = 0$ e ao menos um dentre os determinantes D_x , D_y for diferente de zero, o sistema será impossível (SI).

Exercícios

1) Resolva os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 4y - z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y = 6 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - z = -4 \\ +y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = -5 \\ x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

2) O sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -3x + 6y = -15 \end{cases}$$

- (a) É possível e determinado
- (b) É possível e indeterminado
- (c) É impossível
- (d) Tem determinante principal diferente de zero
- (e) É impossível e determinado

3) O sistema

$$\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \text{ é possível e determinado:}$$

- (a) Para qualquer valor de a
- (b) Somente para $a = 0$
- (c) Se $a \neq 0$
- (d) Se $a \neq -6$

Atividade 3 – Resolvendo problemas

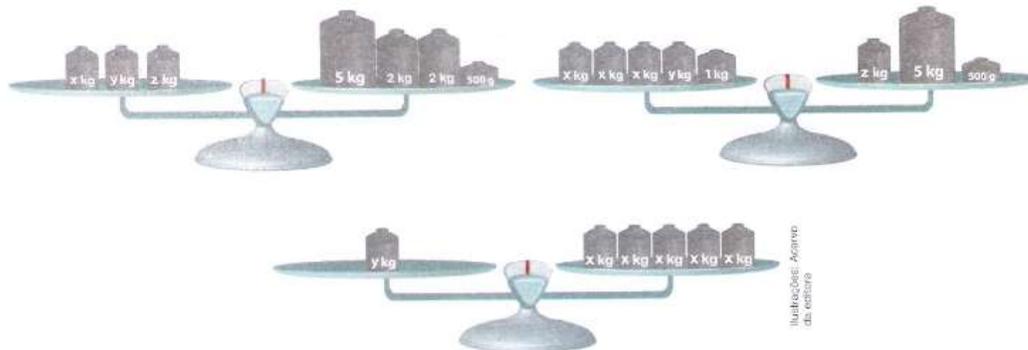
- **Área do conhecimento:** Matemática
- **Assunto:** Sistemas
- **Habilidade relacionada:** Resolver problemas utilizando sistemas lineares.
- **Objetivos:** Resolver problemas envolvendo sistemas lineares de ordem 2 e 3.
- **Pré-requisitos:** Sistema e conhecimento de Matemática básica.
- **Tempo de duração prevista:** 200 minutos.
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **Organização da turma:** Em duplas.

Metodologia adotada:

Apresentar algumas situações problema e solicitar que através dos sistemas lineares os alunos consigam encontrar as soluções. Nesse momento o professor deverá fazer as intervenções quando necessários, pois os alunos podem demonstrar dificuldades para transformar a linguagem materna em matemática, não conseguindo, portanto, solucionar os problemas.

1)

R6. (Ufla-MG) Calcule os valores dos pesos x , y e z para os quais as balanças estão equilibradas.



2) Uma companhia de navegação tem três tipos de recipientes A, B e C, que carrega cargas em containers de três tipos I, II e III. As capacidades dos recipientes são dadas pela matriz:

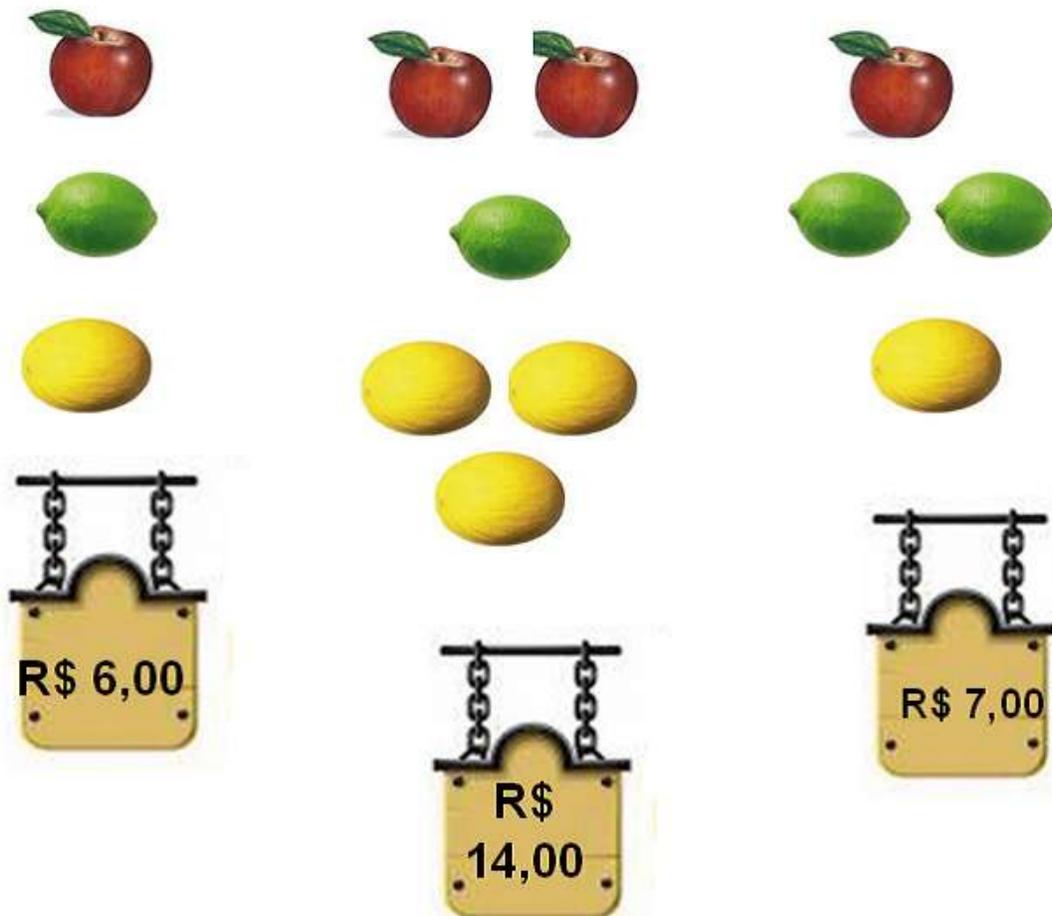
Tipo do Recipiente	I	II	III
A	4	3	2
B	5	2	3
C	2	2	3

Quais são os números de recipientes x_1 , x_2 e x_3 de cada categoria A, B e C, se a companhia deve transportar 42 containers do tipo I, 27 do tipo II e 33 do tipo III?

3) Em um campeonato de futebol, a vitória vale três pontos, o empate vale um ponto e a derrota não conta ponto. Se a equipe A teve 2 vitórias, 3 empates e 5 derrotas, qual será o seu total de pontos? Sabendo que a equipe B tem 12 pontos e não sofreu nenhuma derrota, quantas partidas essa equipe pode ter disputado? A equipe C obteve 14 pontos nos 12 jogos que disputou. Se ela perdeu apenas 2 desses 12 jogos, quantas vitórias e empates essa equipe obteve nesses jogos?

4) Luzia utilizou apenas notas de R\$ 10,00 e de R\$ 50,00 para fazer um pagamento de R\$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

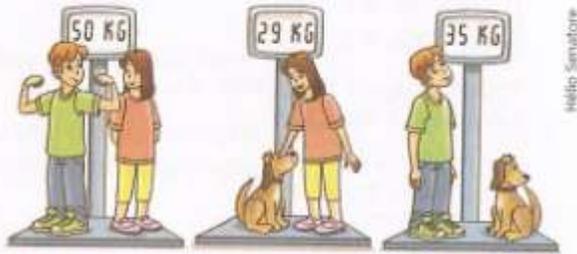
5) Antônio Carlos gosta muito de desafios e resolveu fazer uma brincadeira com seus fregueses. Em vez de colocar os preços de cada uma de suas frutas (maçã, limão e melão), colocou as tabuletas:



De acordo com as informações das tabuletas, quanto custa uma dúzia de limões?

6)

Você consegue descobrir o "peso", em kg, de cada um desses indivíduos?



Tente de dois modos: sem fazer um sistema e utilizando um sistema.

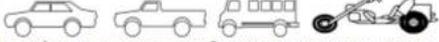
7) Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de eletrodomésticos, de maneira que o consumidor interessado paga: R\$ 590,00 por um forno micro-ondas e um aspirador de pó. R\$ 1300,00 por um forno de micro-ondas e uma geladeira. R\$ 1250,00 por um aspirador de pó e uma geladeira. Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho, se o preço unitário de cada um deles é constante em todos os casos?

8) A RJ-124, mais conhecida como Via Lagos, é uma rodovia do estado do Rio de Janeiro que percorre a Região dos Lagos. Tendo como concessão a empresa CCR. Com 55 quilômetros de extensão, seu trajeto se inicia no município de Rio Bonito, e vai até o município de São Pedro da Aldeia.

Saindo da BR-101, passa pelo distrito de Boa Esperança, atravessa os municípios de Araruama e Iguaba Grande até o entrocamento com a Rodovia Amaral Peixoto (RJ-106), no município de São Pedro da Aldeia.

Sendo uma das mais importantes estradas em direção a Região dos Lagos, a Via Lagos é pedagiada. As tarifas de pedágios são diferenciadas entre dias de semanas e finais de semanas, conforme tabela abaixo.

Informações retiradas do site: http://pt.wikipedia.org/wiki/Via_Lagos

  		
DURANTE A SEMANA Tarifa Básica Das 12 h de 2ª feira às 12 h de sexta feira Exceto Feriados Nacionais		
FINAIS DE SEMANA E FERIADOS NACIONAIS Tarifa Básica com adicional Das 12 h de 0ª feira às 12 h de segunda feira Feriados Nacionais Das 12 h de véspera às 12 h do dia seguinte		
9,90	 AUTOMÓVEL, CAMINHONETE, FURGÃO (RODAGEM SIMPLES) E TRICICLO.	16,40
19,80	 CAMINHÃO LEVE, CAMINHÃO TRATOR, ÔNIBUS E FURGÃO (RODAGEM DUPLA).	32,80
14,85	 AUTOMÓVEL COM SEMI-REBOQUE E CAMINHONETE COM SEMI-REBOQUE.	24,60
29,70	 ÔNIBUS, CAMINHÃO, CAMINHÃO TRATOR, CAMINHÃO TRATOR COM SEMI-REBOQUE.	49,20
19,80	 AUTOMÓVEL COM REBOQUE E CAMINHONETE COM REBOQUE.	32,80
39,60	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	65,60
49,50	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	82,00
59,40	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	98,40
4,95	 MOTOCICLETAS, MOTONETAS E BICICLETAS A MOTOR.	8,20

Disponível em: <http://www.rodoviadoslagos.com.br/tarifas>

O retorno de feriados prolongados provocam um grande fluxo de veículos que saem da Região dos Lagos. Numa blitz realizada num dia de domingo, foram observados os veículos que estavam se dirigindo no sentido RJ, durante 30 minutos foram obtidas as seguintes informações:

- ao todo, passaram na ponte nesse período 100 veículos, dentre carros, motos e ônibus (rodagem dupla).
- o total arrecadado foi de R\$ 1763,00
- o quádruplo da quantidade de motos mais a quantidade de ônibus é igual à quantidade de carros mais 5.

a) Escreva uma equação correspondente para a primeira informação “ao todo passaram na Via Lagos nesse período 100 veículos”:

b) Consulte a tabela com os valores do pedágio e escreva uma equação que traduza a segunda informação que diz que “o total arrecadado foi de R\$ 1763,00”:

c) Escreva uma equação para a situação: o quádruplo da quantidade de motos mais a quantidade de ônibus é igual à quantidade de carros mais 5.

d) Reescreva as equações na forma de um sistema de 3 equações e 3 incógnitas.

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

e) Resolva o sistema e descubra a quantidade de cada veículo que passou pelo pedágio da Via Lagos nesses 30 minutos.

OBS: Após a realização de todas as atividades, os alunos serão encaminhados à sala de informática para verificarem os cálculos com o auxílio do software: Calculadora para sistemas Lineares.

Links: <http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=21>

<http://www.calculadoraonline.com.br/sistemas-lineares>

Atividade 4 – Exercício Avaliativo

- **Área do conhecimento:** Matemática
- **Assunto:** Sistemas
- **Habilidade relacionada:** Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática. Resolver problemas utilizando sistemas lineares.
- **Objetivos:** Avaliar a aprendizagem dos alunos acerca do conteúdo estudado.
- **Pré-requisitos:** Sistema e conhecimento de Matemática básica.
- **Tempo de duração prevista:** 100 minutos.
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **Organização da turma:** Individual

Metodologia adotada: Será proposta uma folha de atividades avaliativa para analisar o conhecimento adquirido ao longo do estudo dos Sistemas lineares.

1) (Mackenzie-SP) Um supermercado vende três marcas diferentes, A, B, e C, de sabão em pó embaladas em caixas de 1 kg. O preço da marca A é igual à metade da soma dos preços das marcas B e C. Se um cliente paga R\$ 14,00 pela compra de dois pacotes do sabão A, mais um pacote do sabão B e mais um do sabão C, o preço que ele pagaria por três pacotes do sabão A seria:

- a) R\$ 12,00 b) R\$ 10,50 c) R\$ 13,40 d) R\$ 11,50 e) R\$ 13,00

2) Ao ser perguntado sobre os valores do pedágio, um caixa respondeu: “Quando passam 2 carros e 3 ônibus, arrecada-se a quantia de R\$26,00; quando passam 2 ônibus e 5 caminhões arrecada-se a quantia de R\$47,00, e quando passam 6 carros e 4 caminhões arrecada-se a quantia de R\$52,00”.

Qual é o valor do pedágio para cada veículo citado?

3) Resolva os sistemas lineares abaixo pelo método de sua preferência:

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y + 5z = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ x + y - z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

4) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado:

5) Um casal de namorados jantou em um fast-food de cozinha árabe três vezes em uma mesma semana.

- Na primeira noite consumiram 2 quibes, 5 esfirras e 2 sucos, e pagaram R\$11,00.

- Na segunda noite consumiram 3 quibes, 6 esfirras e 3 sucos, e pagaram R\$15,30.

- Na terceira noite consumiram 2 quibes, 10 esfirras e 3 sucos e pagaram R\$17,00.

Qual é o preço unitário do quibe, da esfirra e do suco?

AVALIAÇÃO

A avaliação deverá envolver as habilidades necessárias ao aprendizado do aluno para o conteúdo trabalhado.

Todas as atividades propostas no plano de trabalho serão determinantes na avaliação de aprendizagem do aluno.

Além do exercício avaliativo que analisará o aluno individualmente, as resoluções dos demais exercícios presentes no PT serão utilizadas para verificação da aprendizagem, visto que durante toda aplicação do PT os alunos serão auxiliados e direcionados pelo professor, visto que muitos podem demonstrar dificuldades em avançar com o conteúdo.

A recuperação será paralela a cada avaliação proposta e aplicada sempre que o aluno não atingir a metade da nota determinada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Juliane Matsubara (ed.). **Conexões com a Matemática**. 1ª ed. São Paulo: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, Gelson (et al.). **Matemática: ciência e aplicações**. Volume 2: Ensino Médio, 7. Ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

ROTEIROS DE ACAO – Sistemas Lineares – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/> acesso em 10/10/2014.

Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada – 04 – 2º ano – Ensino Médio.

Caderno de Atividades do Projeto reforço Escolar.

Endereços eletrônicos acessados ao longo da pesquisa, de 10/10/2014 a 21/10/2014:

<http://exclfromhell.blogspot.com.br/2013/03/23-velhas-sistema-de-equacoes-lineares.html>

http://pt.wikipedia.org/wiki/Via_Lagos

<http://www.rodoviadoslagos.com.br/tarifas>

<http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=21>

<http://www.calculadoraonline.com.br/sistemas-lineares>