



FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ

Matemática 2ª série – 4º Bimestre/2014

PLANO DE TRABALHO

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Acesso em 12.10.14. <http://fatosmatematicos.blogspot.com>

Tarefa 1

CURSISTA: Vandete Freire de Souza

ESCOLA: C.E.Rui Guimarães de Almeida/ CERGA/ S.A.Pádua

TUTORA: Susi Cristine Britto Ferreira



SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
DESENVOLVIMENTO.....	4
AVALIAÇÃO.....	12
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15

INTRODUÇÃO

Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações aplicadas num mesmo conjunto, igualmente finito, de variáveis.

O *sistema linear* também pode ser conceituado como um sistema de equações do primeiro grau, ou seja, um sistema no qual as equações possuem apenas uma incógnita em cada termo. Em outras palavras, num *sistema linear*, não há potência diferente de um ou zero tampouco pode haver multiplicação entre *incógnitas*.

Um sistema de m equações lineares em n variáveis (ou incógnitas) é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ij} , b_k para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$, são constantes reais, chamados coeficientes do sistema.

A teoria de sistemas lineares surgiu em meados do século XVII, paralelamente a dos determinantes. Esse estudo contou com a colaboração de vários matemáticos, dentre eles: o suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752), os alemães Carl G. Jacobi (1804 – 1851), Karl F. Gauss (1777 - 1855), Leopoldo Kronecker (1823 – 1891) e Ferdinand G. Frobenius (1849 – 1917), o francês Eugène Rouché (1832 – 1910), etc.

Diversas situações-problemas são modeladas matematicamente por sistemas de equações lineares em várias áreas do conhecimento. Em torno de 1800 a.C. já eram conhecidos dos babilônios os sistemas lineares com duas equações que eram resolvidos pelo método denominado, atualmente, de Método de Eliminação de Gauss ou Escalonamento.

Existem vários métodos de resolução de sistemas lineares, destacando:

- **Método das Tentativas** – consiste em descobrir as respostas de forma aleatória e verificar se são soluções de todas as equações.

- **Método da Substituição** – consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações do sistema (2x2) e substituir o valor isolado na outra equação e retornar o valor encontrado para a anterior.
- **Método da Adição** – consiste em somarmos as variáveis semelhantes das duas equações com o intuito de obter resultado igual a zero e eliminar uma delas. Assim, encontramos o valor de uma incógnita e depois da outra.
- **Método da Comparação** – consiste em compararmos as duas equações do sistema, após termos isolado a mesma variável nas duas equações.
- **Método da Eliminação Gaussiana ou Escalonamento** – consiste em aplicar operações elementares à matriz aumentada de um sistema até que ela esteja na forma escalonada reduzida.
- **Regra de Cramer** – é uma fórmula explícita para solução de um sistema de equações lineares com cada variável expressa por um quociente de dois determinantes.
- **Método Gráfico** – faz-se a representação gráfica de cada equação e a solução do sistema é a interseção. Caso não tenha interseção discute-se o sistema de acordo com as posições das retas e/ou dos planos.

DESENVOLVIMENTO

OBJETIVOS

- Modelar e resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares de 2 ou 3 equações e 2 ou 3 incógnitas.
- Visualizar graficamente a solução de um sistema de equações lineares.
- Resolver um sistema de equações lineares.
- Correlacionar a representação algébrica de um sistema com sua representação gráfica.
- Discutir um sistema de equações lineares pelos métodos geométrico e algébrico.

METODOLOGIA

O tema central deste projeto é a compreensão dos conhecimentos relacionados com o estudo dos Sistemas Lineares. Serão desenvolvidas algumas atividades que possibilitarão o entendimento dos conceitos relativos ao conteúdo em estudo. O plano teve inspiração em todos os roteiros, especialmente o Roteiro de Ação 5..

HABILIDADES RELACIONADAS

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações – problemas para a linguagem matemática.
- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

PRÉ-REQUISITOS

- Saber operar com números com sinais.
- Passar da linguagem corrente para a linguagem matemática.
- Equação do 1º grau.
- Plano cartesiano.

Tempo de Duração: 10 horas-aula

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

- 1) Os alunos serão divididos em duplas.
- 2) Cada dupla receberá uma folha com as atividades sugeridas.
- 3) De acordo com a orientação da professora deverão realizar as atividades e responder aos questionamentos feitos.

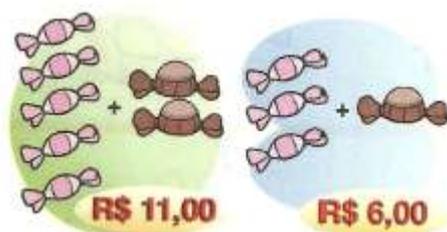
1ª Atividade – Descobrimos os Sistemas Analisando as Figuras.

I-



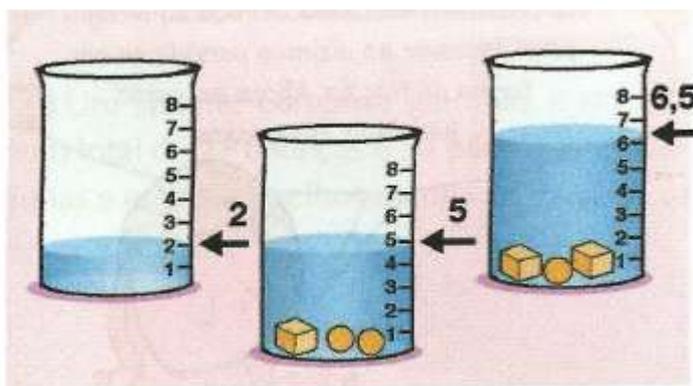
Essa sorveteria vendeu 70 picolés e faturou R\$100,00. Quantos picolés com cobertura foram vendidos?

II- Observe os anúncios e responda.



- a) Qual é o preço de cada bala?
- b) Qual é o preço de cada bombom?

III- Os sólidos do mesmo tipo são idênticos. Observe e responda.



- a) Qual é o volume do cubo?
- b) Qual é o volume da esfera?

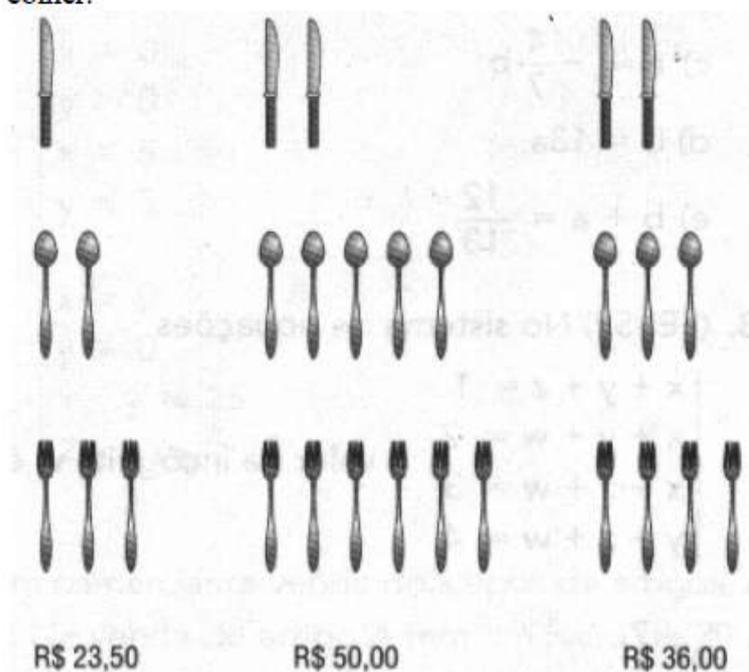
IV- Com 48 palitos de mesmo tamanho eu montei 13 figuras: alguns triângulos e alguns quadrados.



Quantos quadrados eu montei?

V-

(UFES) Examinando os anúncios abaixo, conclua o preço de cada faca, garfo e colher.



É importante discutir com os alunos que o melhor método para resolver cada um dos sistemas é aquele em que eles se sentem mais confiantes em usar e, por isso, conseguem acertar.

2ª Atividade – Descobrimos os Sistemas e Interpretando os Enunciados

I- Em um estacionamento há carros e motos num total de 12 veículos e 40 rodas.

Assinale a quantidade correta de carros e motos.

- 6 carros e 6 motos.
- 4 carros e 8 motos.
- 5 carros e 7 motos.
- 8 carros e 4 motos.
- 10 carros e 2 motos.

II- Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e 39 pés. Quantos animais de cada espécie há nessa fazenda?

- A) 15 galinhas e 2 coelhos.
- B) 10 galinhas e 7 coelhos.
- C) 9 galinhas e 8 coelhos.
- D) 2 galinhas e 15 coelhos.
- E) 7 galinhas e 10 coelhos.

III- A soma das idades de Marlon e Taís é igual a 60. Já a diferença de suas idades é igual a 6. Qual é a idade de cada um, sabendo que Marlon é o mais velho?

- A) Marlon tem 33 anos e Taís 27 anos.
- B) Marlon tem 34 anos e Taís 26 anos.
- C) Marlon tem 45 anos e Taís 15 anos.
- D) Marlon tem 56 anos e Taís 4 anos.

IV- Em um escritório de advocacia, trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como Dr. Pedro e o Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária Juliana coloca 01 grampo em cada processo do Dr. Pedro e 02 grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que ao todo são 78 processos nos quais foram usados 110 grampos. Podemos concluir que o número de processos do Dr. Carlos é

- A) 32 B) 46 C) 40 D) 64 E) 28

V- As moedas de um determinado país são de três tipos: de 3g que vale \$10; de 5g que vale \$ 20; e de 9g que vale \$ 50. Uma pessoa tem 100 moedas, num total de 600g, somando \$ 2800. Quantas moedas ela tem de cada tipo?

3ª Atividade – Procurando o x e o y da questão

Resolver os sistemas lineares e dar a interpretação gráfica de cada um deles.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = -8 \\ -x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$



A atividade gráfica será realizada utilizando papel quadriculado ou milimetrado.



O aluno perceberá que de acordo com as posições das retas, o sistema receberá uma classificação diferente. Em um sistema de equações com duas equações e duas incógnitas, cada equação representa uma reta. Assim, temos que o sistema pode ser possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

- SPD – O sistema possui uma única solução formada pelo ponto de interseção das duas retas.
- SPI – O sistema possui infinitas soluções. As retas são coincidentes.
- SI – O sistema não possui solução algébrica. As retas são paralelas.

3ª Atividade – Discutindo os Sistemas com o Auxílio de um Software Gráfico.

Utilizando o software Winplot discuta os sistemas a seguir.

Dicas de utilização:

1) Dê um clique duplo no ícone abaixo para abrir o programa.



2) Dê um clique em “Janela” e selecione “3-dim”. Uma outra tela com fundo branco se abrirá e nela você encontrará três eixos perpendiculares entre si designados como x,y e z.

3) Clique em “Equação” e escolha a opção “explícita”.

4) Surgirá uma caixa. Isole a incógnita z da primeira equação e digite no espaço “z=.....” que aparece em destaque na cor azul. Deixe marcada a opção “desenho rápido”. Altere também os valores de “x mín” e “x max” para -10.00000 e 10.00000 respectivamente. Faça o mesmo para “y mín” e “y max”.

5) Escolha a cor e a espessura de sua preferência e clique em “ok”.

6) Agora insira a 2ª equação. Isole a incógnita z da equação (2) e clique novamente em “Equação”, depois “Explícita” e digite a equação.

7) Repita o processo para a 3ª equação.

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x + 3y - 3z = 10 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y - z = -8 & 1 \\ x + y - z = 5 & 2 \\ 3x + 2y - z = -4 & 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$



O aluno perceberá que de acordo com as posições dos planos, o sistema receberá uma classificação diferente. Em um sistema de equações com três equações e três incógnitas, cada equação representa um plano no espaço tridimensional. Assim, temos que o sistema pode ser possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Existem oito posições possíveis para os três planos.

- SPD – 1 posição (o sistema possui solução única, os três planos se encontram em um único ponto)
- SPI – 3 posições

1º caso: Os três planos são diferentes e possuem uma reta em comum. Qualquer ponto dessa reta pertence ao conjunto solução do sistema.

2º caso: Os três planos são coincidentes, ou seja estão sobrepostos. Qualquer ponto dos planos é uma solução do sistema.

3º caso: Dois planos são coincidentes e são intersectados por um terceiro, tendo como interseção uma reta. Qualquer ponto dessa reta pertence ao conjunto solução do sistema.

- SI – 4 posições

1º caso: Dois planos são coincidentes e o terceiro plano é paralelo a eles. Não há interseção dos três planos mutuamente.

2º caso: Os três planos são paralelos, o que não permite que exista um ponto de interseção entre eles.

3º caso: Existem dois planos paralelos e um terceiro intersectando os dois. Não há interseção dos três planos simultaneamente.

4º caso: Os três planos se intersectam dois a dois segundo retas paralelas.

4ª Atividade – Desenvolvendo Competências e Ampliando o Conhecimento



O uso dos sistemas lineares contribuindo para a análise dos fenômenos científicos e sociais.

A deficiência visual pode ser herdada ou adquirida. Uma das causas dessa deficiência é a degeneração senil de mácula. Estudos comprovam que há redução do risco de desenvolver a doença em indivíduos submetidos à suplementação alimentar composta de vitaminas C e E, betacaroteno e zinco. A tabela I a seguir mostra as doses diárias de vitaminas C e E, betacaroteno e zinco recomendadas para a redução desse risco. A tabela II mostra as quantidades de vitamina C, betacaroteno e zinco presentes em 100 g de cada um dos alimentos listados.

Tabela I

vitamina C	vitamina E	betacaroteno	zinco
60 mg	30 UI*	900 μ g	8 mg

* unidade de padrão internacional.

Tabela II

alimento	vitamina C	betacaroteno	zinco
brócolis	75 mg	1.028 μ g	0
tomate	19 mg	—	0
cenoura	8 mg	740 μ g	0,30 mg
arroz	—	—	0,50 mg
carne bovina	—	—	5,50 mg

Considerando que v , w , x , y e z são, respectivamente, as quantidades, em porções de 100 gramas, de brócolis, de tomate, de cenoura, de arroz e de carne bovina ingeridas diariamente por uma pessoa, julgue os itens seguintes, como CERTO ou ERRADO.

i) Considere que 1 L de suco homogêneo feito de tomate e água foi produzido com 400 g de tomate. Nessa situação, um copo de 300 mL desse suco é suficiente para suprir a necessidade diária de vitamina C recomendada para um adulto. _____

ii) As quantidades diárias, em porções de 100 g, de brócolis, de tomate e de cenoura, v , w , e x , respectivamente, que um adulto deve ingerir para atender exatamente às necessidades diárias de vitamina C e de betacaroteno constituem uma solução do seguinte sistema. _____

$$\begin{cases} 75v + 19w + 8x = 60 \\ 257v + 185x = 225 \end{cases}$$

iii) As necessidades diárias de zinco e de betacaroteno requeridas por um adulto são atendidas ingerindo-se um alimento composto de 100 g de arroz, 100 g de carne bovina, 50 g de brócolis e 50 g de cenoura. _____

iv) O sistema de equações lineares que permite determinar as quantidades diárias, em porções de 100 g, dos alimentos contidos na tabela II para atender às necessidades diárias de um adulto em vitamina C, betacaroteno e zinco tem solução única se $y = 1$ e $v = \frac{1}{2}$. _____

5ª Atividade – Formalizando os conhecimentos adquiridos

Cada aluno deverá fazer o registro em seu caderno dos conhecimentos adquiridos durante as atividades, sob a orientação da professora e com sugestões dos colegas.

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados no decorrer das atividades levando em consideração os objetivos propostos. Em aulas posteriores será feita uma avaliação formalizada para saber se os conteúdos trabalhados foram consolidados, levando em conta, principalmente, os descritores:

- D73 – Determinar a solução de um sistema associado à uma matriz.
- D78 – Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.
- D79 – Identificar a relação entre as representações algébricas e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.
- H114 – Resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas.

QUESTÕES PROPOSTAS

1-

(M11192S) Três vizinhos compraram, no supermercado "Compre Aqui", mercadorias de mesma marca.

O primeiro comprou 1 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 3 kg de café, pagando R\$ 28,00.

O segundo comprou 3 kg de amendoim, 1 kg de sabão e 2 kg de café, pagando R\$ 26,00.

O terceiro comprou 2 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 2 kg de café, pagando R\$ 18,00.

É **CORRETO** afirmar que o sistema gerado por esta situação é:

$$A) \begin{cases} a + 2s + 3c = 28 \\ 3a + s + 2c = 26 \\ 2a + 2s + 2c = 18 \end{cases}$$

$$B) \begin{cases} a + 2s + 3c = 28 \\ 3a + 2s + 1c = 26 \\ 2a + 2s + 2c = 18 \end{cases}$$

$$C) \begin{cases} a + 2s + 3c = 26 \\ 3a + s + 2c = 28 \\ 2a + 2s + 2c = 18 \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} a + 2s + 3c = 28 \\ 3a + s + 2c = 18 \\ 2a + 2s + 2c = 26 \end{cases}$$

$$E) \begin{cases} a + 2s + 3c = 28 \\ 3a + s + 2c = 18 \\ 2a + 2s + 2c = 26 \end{cases}$$

2-

(M090042ES) O produto de dois números é 64 e o quociente entre eles é 4.

Qual é o sistema de equação que representa essa situação?

$$A) \begin{cases} x + y = 64 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$B) \begin{cases} x + y = 64 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$$

$$C) \begin{cases} xy = 64 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} xy = 64 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

3-

(M1124351) As idades de Joana (J), Paula (P) e Iara (I) somam 52 anos. A idade de Paula é igual a soma das idades de Joana e Iara menos 4 anos. A idade de Joana é igual a soma das idades de Paula e Iara mais 2 anos. O sistema linear que representa esta situação é:

A)
$$\begin{cases} J + P + I = 52 \\ J - P + I = 4 \\ J - P - I = 2 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} J + P + I = 52 \\ J + P + I = 4 \\ J + P - I = 2 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} J + P + I = 52 \\ J + P - I = 4 \\ J - P + I = 2 \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} J + P + I = 52 \\ J + P - I = 4 \\ J + P + I = 2 \end{cases}$$

E)
$$\begin{cases} J + P + I = 52 \\ J + P + I = 4 \\ J + P + I = 2 \end{cases}$$

4-

(M120421A8) Alberto, Bernardo e Caio possuem juntos 90 figurinhas.

Alberto é o que possui mais figurinhas, ele tem o dobro do total de figuras de Bernardo e Caio juntos.

Caio é o que tem menos figurinhas, ele tem um quarto da diferença entre o número de figurinhas de Alberto e Bernardo.

Um sistema linear que permite calcular o número de figurinhas de Alberto, Bernardo e Caio é

A)
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - c = 0 \\ a - 4b - 4c = 0 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - 2c = 0 \\ a - b - 4c = 0 \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a + 2b + 2c = 90 \\ a + b + 4c = 90 \end{cases}$$

E)
$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - 2b - 2c = 90 \\ a - b - 4c = 90 \end{cases}$$

5-

(PAMA08147MS) Maria comprou 2 pacotes de biscoito e 4 latas de creme de leite, pagando 7 reais pela compra.

Se ela tivesse comprado 4 pacotes de biscoito e 3 latas de creme de leite, pagaria 9 reais. Represente por x e y, respectivamente, os preços de um pacote de biscoitos e de uma lata de creme de leite.

Para calcular esses preços, qual é o sistema de equações que Maria deve utilizar?

A)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

6-

(PAMA08086AC) Eva tem R\$ 115,00, em notas de cinco e vinte reais, sendo o total de 17 notas. Um sistema de equações que corresponde às informações dadas no problema acima é

A)
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 20y = 115 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} 5x + 20y = 17 \\ x + y = 115 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 20y = 5x \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 20y - 5x = 115 \end{cases}$$

7- Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

8- Resolva os sistemas das questões 5 e 6 e faça a representação geométrica dos mesmos.

9- Expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática. V. único. São Paulo: Ática, 2005.

LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. V 3. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula. 2 ed. São Paulo: 2005.

SMOLE, Katia C.Stocco; DINIZ, Maria Ignez de S.Vieira. Matemática Ensino Médio. V 1. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

