

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 321 – DR. ULYSSES GUIMARÃES
PROFESSOR: Maiqui B. Lacerda
MATRÍCULA: 00/0938600-8
SÉRIE: 2º ano
TUTOR (A): Susi Cristine Britto Ferreira

Sistemas Lineares

Matemática - 2º ano - 4º bimestre

Maiqui B. Lacerda

makedoran@msn.com

Outubro 2014

Sumário

Introdução.....	2
Desenvolvimento.....	3
Sistemas Lineares	4
ATIVIDADE 1.....	4
Representação Gráfica (Sistema 2x2)	6
ATIVIDADE 2.....	6
Exercícios propostos I:	7
Pelo método de Cramer (Sistema 2x2)	8
Exercícios propostos II:	8
Representação Gráfica (Sistema 3x3)	10
Pelo método de Cramer (Sistema 3x3)	14
Exercícios propostos III:	16
Avaliação.....	20
Bibliografia:.....	21

Introdução

Um sistema de equações lineares (abreviadamente, sistema linear) é um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis.

Em matemática, a teoria de sistemas lineares é um ramo da álgebra linear, uma matéria que é fundamental para a matemática moderna. Algoritmos computacionais para achar soluções são uma parte importante da álgebra linear numérica, e tais métodos têm uma grande importância na engenharia, física, química, ciência da computação e economia. Um sistema de equações não lineares frequentemente pode ser aproximado para um sistema linear, uma técnica útil quando se está fazendo um modelo matemático ou simulação computadorizada de sistemas complexos.

▪ **Habilidade relacionada:**
Sistema de Equação Linear

▪ **Pré-requisitos:**
Equação do 1º grau, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

▪ **Tempo de Duração:**
300 minutos

▪ **Recursos Educacionais Utilizados:**
Projutor, internet, Geogebra, Folha de atividades, lápis, borracha, lápis de cor ou caneta.

▪ **Organização da turma:**
Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e cooperativo

▪ **Objetivos:**
Introduzir métodos de resolução das equações lineares.

▪ **Metodologia adotada:**
Trabalhar vários métodos de resolver os sistemas lineares, as possíveis situações de suas soluções. Para este trabalho, usar situações problemas.

Sistemas Lineares

ATIVIDADE 1

1. Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo



b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.



2. Considere o seguinte sistema linear
$$\begin{cases} 4x - 9y = 1 \\ -5x + 6y = 4 \end{cases}$$

O que você faria para eliminar uma das incógnitas do sistema usando o método da adição?

Uma possibilidade é multiplicar a primeira equação por **2** e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em y.

Uma outra possibilidade é multiplicar a primeira equação por ____ e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em x.

3. William tentou resolver o sistema $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y - x = 5 \end{cases}$. Ele substituiu x por $10 - 2y$ na segunda equação e fez $y - 10 - 2y = 5$, encontrando $y = -15$. Substituindo $y = -15$ na primeira equação encontrou $x = 40$. Mas a resposta não satisfaz o sistema.

O que William fez de errado?

4. Usando tentativa e erro, Marcos encontrou a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2(x + y) = 6 \end{cases}$ como sendo $x = 1$ e $y = 2$. Você concorda? Explique sua resposta.

5. Voltando ao exercício 1:

a) **resolva o sistema,**

b) Você também pode tentar visualizar as soluções para esse sistema graficamente. No mesmo eixo cartesiano trace o gráfico das duas retas que representam o sistema e encontre a solução para o problema. Use papel quadriculado ou milimetrado.

Com o Roteiro de Ação 1, relembrar os métodos de resolução do Sistemas de Equações Lineares. Preferi iniciar com exercício 5 do Roteiro para começar a criar um sistema linear de forma lúdica, demos trabalhar os métodos e voltando a esta atividade para resolução.

Representação Gráfica (Sistema 2x2)

ATIVIDADE 2

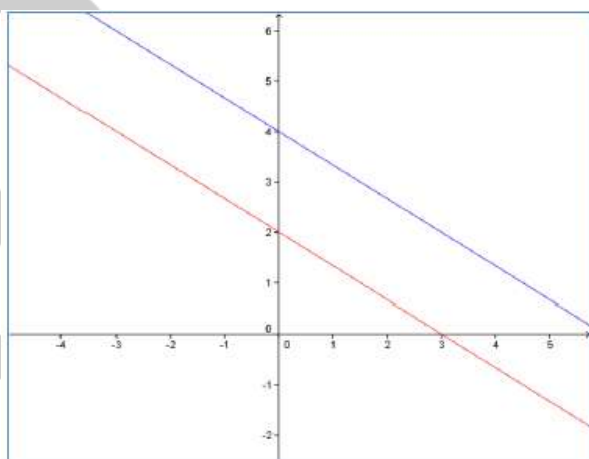
Associe cada sistema com seu o gráfico correspondente e justificando sua resposta depois de resolvê-los:

$$(A) \begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

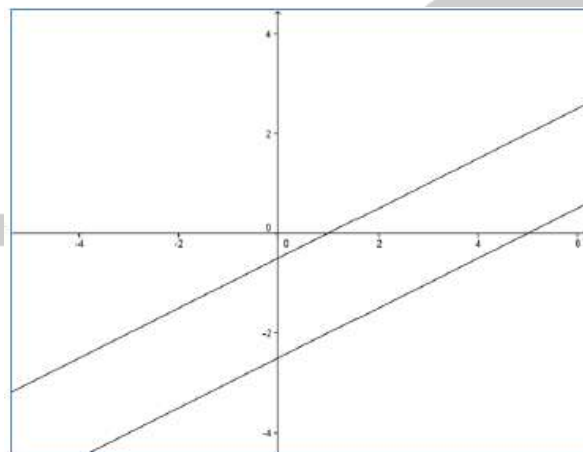
$$(C) \begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

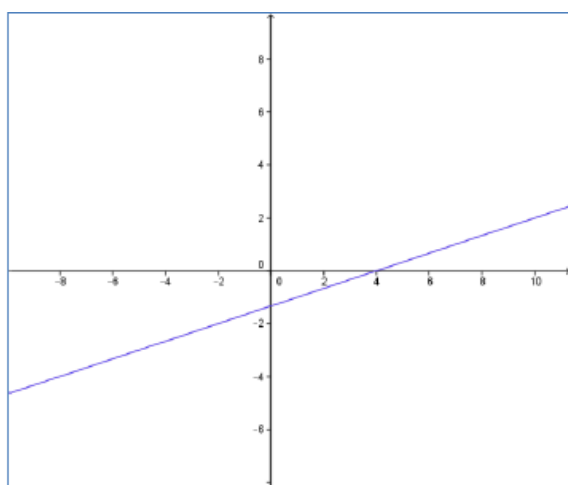
$$(D) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$



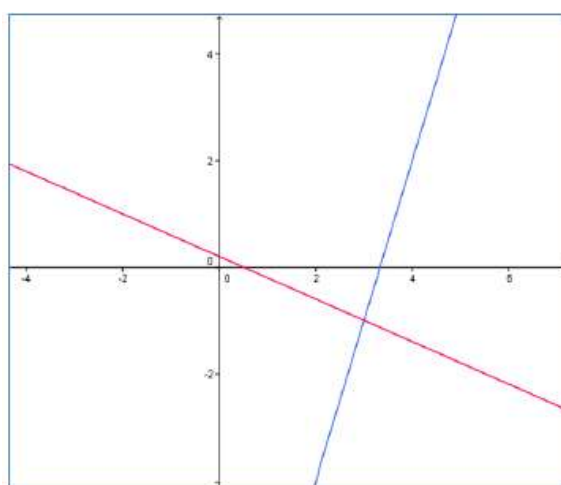
()



()



()



()

Exercícios propostos I:

1. Esboce o gráfico dos sistemas abaixo, determinando se o sistema tem solução possível, impossível ou infinita:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 4y = 8 \\ x - 4y = 12 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

Com o Roteiro de Ação 4, trabalhar com gráfico como prova de soluções das equações. E exercícios proposto para fixar o conteúdo.

Pelo método de Cramer (Sistema 2x2)

Pelo método de Cramer:

Consiste em calcular o valor de cada variável x_i através de $x_i = \frac{Dx_i}{D}$, onde $D = \det A$ (determinante principal) e Dx_i é o determinante da matriz obtida quando em A a i -ésima coluna é substituída por B .

Classificação de sistema linear: *Pelo método de Cramer.*

$D \neq 0 \rightarrow$ O sistema é compatível determinado.

$D = 0$ e $Dx_i = 0$ para todo $i \rightarrow$ sistema compatível indeterminado.

$D = 0$ e pelo menos um $Dx_i \neq 0 \rightarrow$ sistema incompatível

Exemplo:

$$\begin{cases} 16x + 8y = 8 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \det A = 96$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \det A_x = 0$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \det A_y = 96$$

São formadas três matrizes:
1) Matriz A com os coeficientes de x e y .
2) Matriz A_x com os valores independentes na coluna dos coeficientes de x .
3) Matriz A_y com os valores independentes na coluna dos coeficientes de y .

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = 0$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = 1$$

Os valores de x e y são calculados pelo quociente entre os determinantes das matrizes A_x e A_y e a matriz dos coeficientes.
1) Se $\det A = \det A_x = \det A_y = 0$, há infinitas soluções.
2) Se $\det A = 0$ e $\det A_x \neq 0$ ou $\det A_y \neq 0$, não haverá soluções.

Verificação

$$\begin{cases} 16 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 8 \\ 4 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 8 \end{cases}$$

Exercícios propostos II:

1. Refaça os exercícios anteriores usando o método de Cramer:
2. Use a Regra de Cramer para resolver cada sistema a seguir:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x = 2y + 7 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 7 = y \\ x + 5y = -6 \end{cases}$$

Mostra como trabalhar com o método de Cramer, lembrando eles que eles terão a opção na hora da avaliação resolver do método que acham mais práticos para si.

Representação Gráfica (Sistema 3x3)

A Ponte Presidente Costa e Silva, popularmente conhecida como Ponte Rio-Niterói, tem 13,29 km e liga o município do Rio de Janeiro ao município de Niterói.

A Diretoria da Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT) autorizou recentemente mudanças no preço dos pedágios de várias rodovias importantes do país e também da Ponte Rio-Niterói, para vigorarem a partir de agosto de 2012.

A tarifa básica de pedágio subirá de R\$ 4,60 para R\$ 4,90, com um acréscimo de 6,52%, para automóveis, caminhonetes e furgões.

Veja a tabela com os novos valores do pedágio cobrados na Ponte Rio-Niterói.








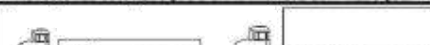
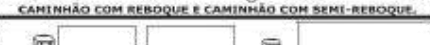


  CCR Ponte ANTT AGÊNCIA NACIONAL DE TRANSPORTES TERRESTRES	
TABELA DE TARIFAS	
 AUTOMÓVEL, CAMINHONETE, FURGÃO (RODAGEM SIMPLES).	4,90
 CAMINHÃO LEVE, CAMINHÃO TRATOR, ÔNIBUS E FURGÃO (RODAGEM DUPLA).	9,80
 AUTOMÓVEL COM SEMI-REBOQUE E CAMINHONETE COM SEMI-REBOQUE.	7,35
 ÔNIBUS, CAMINHÃO, CAMINHÃO TRATOR, CAMINHÃO TRATOR COM SEMI-REBOQUE.	14,70
 AUTOMÓVEL COM REBOQUE E CAMINHONETE COM REBOQUE.	9,80
 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	19,60
 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	24,50
 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMI-REBOQUE.	29,40
 MOTOCICLETAS, MOTONETAS, BICICLETAS A MOTOR E TRICICLO.	2,45
OBS: PARA VEÍCULOS COM MAIS DE 6 EIXOS, A TARIFA É IGUAL AO NÚMERO DE EIXOS DO VEÍCULO, MULTIPLICADO PELO VALOR DA TARIFA BÁSICA.	

Tabela de Tarifas Ponte Rio Niterói - Disponível em <http://www.ponte.com.br/pedagio/>

Durante uma *blitz* realizada em um determinado período do dia passaram pela ponte vários tipos de veículos. As seguintes informações são conhecidas:

- ao todo, passaram na ponte nesse período 85 veículos, dentre carros, motos e ônibus (rodagem dupla).
- o total arrecadado foi de R\$ 539,00
- o triplo da quantidade de carros mais a quantidade de motos é igual à quantidade de ônibus mais 115.

a) Escreva uma equação correspondente para a primeira informação “ao todo passaram na ponte nesse período 85 veículos”:

Nota ao DI: deixar 1 linha para resposta.

b) Consulte a tabela com os valores do pedágio e escreva uma equação que traduza a segunda informação que diz que “o total arrecadado foi de R\$ 539,00”:

Nota ao DI: deixar 1 linha para resposta.

c) Escreva uma equação para a terceira informação “o triplo da quantidade de carros mais a quantidade de motos é igual à quantidade de ônibus mais 115”:

Nota ao DI: deixar 1 linha para resposta.

d) Reescreva as equações na forma de um sistema de 3 equações e 3 incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y - z = -8 \quad 1 \\ x + y - z = 5 \quad 2 \\ 3x + 2y - z = -4 \quad 3 \end{array} \right.$$

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares ,
vamos visualizar seus gráficos no programa Winplot.

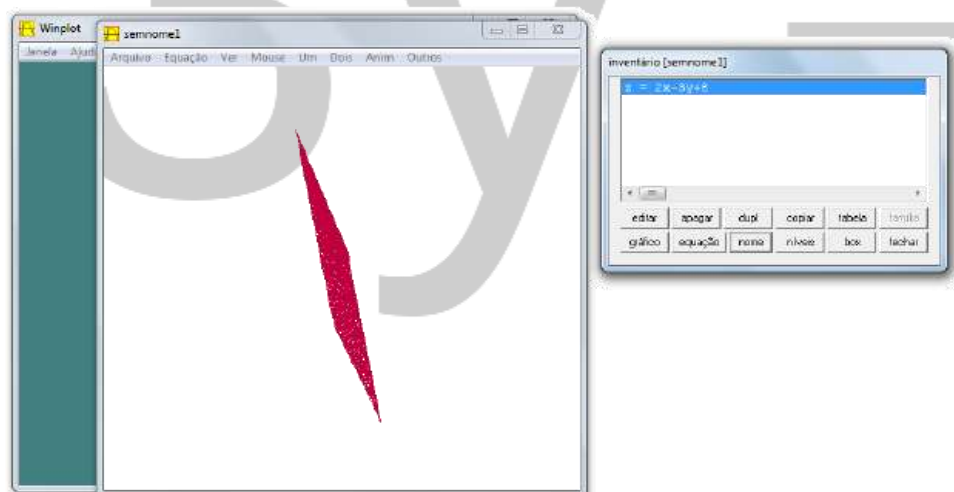


Figura 5 – Visualização do gráfico da equação (1) do sistema no Winplot

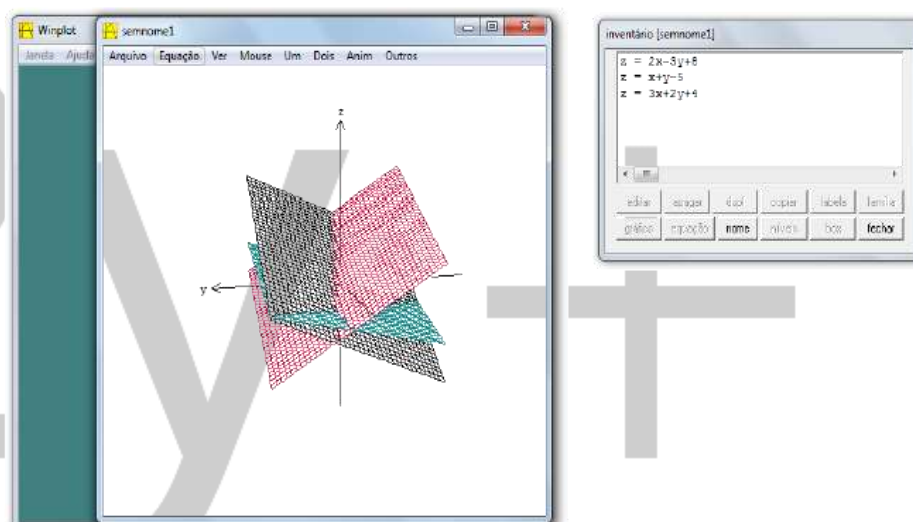


Figura 6 – Visualização do sistema no Winplot

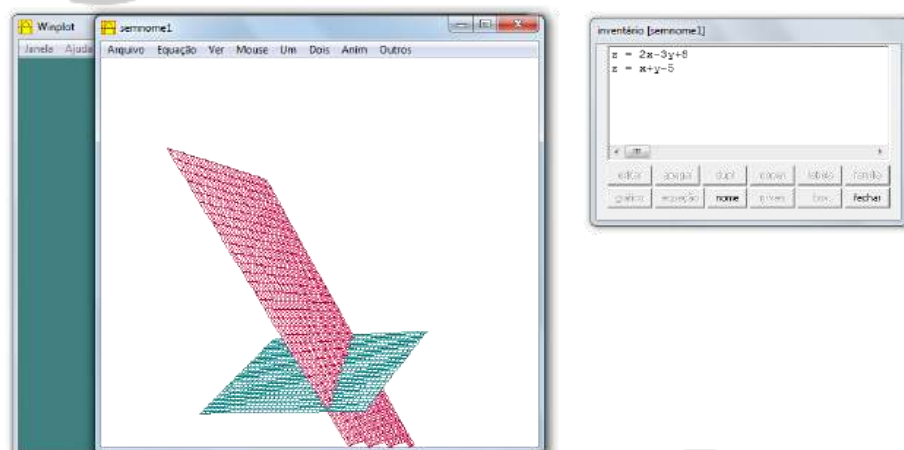


Figura 5 – Visualização do gráfico das equações (1) (2) do sistema no Winplot

Trabalhar a modelação de situação problemas e mostra pelo gráfico as situações dos sistemas 3x3 usando o Roteiro de Ação 4 e 7 como pano de fundo.

Pelo método de Cramer (Sistema 3x3)

Os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Veja no exemplo abaixo de como aplicar essa regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Dado o sistema linear , para resolvê-lo podemos utilizar da regra de Cramer, pois ele possui 3 equações e 3 incógnitas, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Devemos encontrar a matriz incompleta desse sistema linear que será chamada de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante que será representado por D.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 1 + 6 + 2 + 3 - 1 + 4$$

$$D = 15.$$

Agora devemos substituir os termos independentes na primeira coluna da matriz A, formando assim uma segunda matriz que será representada por Ax.

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante representado por Dx.

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 8 + 4 + 3 + 2 - 8 + 6$$

$$D_x = 15$$

Substituímos os termos independentes na segunda coluna da matriz incompleta formando a matriz A_y .

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante D_y .

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -3 + 24 + 4 - 9 - 2 + 16$$

$$D_y = 30$$

Substituindo os termos independentes do sistema na terceira coluna da matriz incompleta formaremos a matriz A_z .

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante representado por D_z .

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = -2 + 18 + 16 + 24 - 3 - 8$$

$$D_z = 45$$

Depois de ter substituído todas as colunas da matriz incompleta pelos termos independentes, iremos colocar em prática a regra de Cramer.

$$\text{A incógnita } x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{15} = 1$$

$$\text{A incógnita } y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\text{A incógnita } z = \frac{D_z}{D} = \frac{45}{15} = 3$$

Portanto, o conjunto verdade desse sistema será $V = \{(1,2,3)\}$.

Exercícios propostos III:

01. Escalonar e resolver cada sistema linear a seguir:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -5x + 3y = -4 \\ 7x - 5y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 7x - y = 30 \\ 2x - 5y = 18 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = 2 \\ 5x - y = -11 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{e)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 5x - 2y + 3z = 12 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 8 \\ x - 3y + z = 3 \\ 5x - y + 2z = 26 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 3x - y + 3z = -8 \\ 2x - 3y + z = -9 \\ 7x + y - 3z = -2 \end{cases} \quad \text{h)}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 8 \\ -x + y + 2z = 7 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

26) Resolva , se possível , cada sistema do exercício anterior usando a **Regra de Cramer** .

02. (U.F.MG) – Determine todos os valores de a e b de modo que o sistema linear a seguir tenha

- a) solução única ;
- b) infinitas soluções ;
- c) nenhuma solução .

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

03. (U.F.MG) – Ache os valores de m para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 3z = 2m \\ 6x + 2y - 6z = m^2 \end{cases}$$

tenha soluções.

04. (U.F.MG) - Em três tipos de alimentos verificou-se que , para cada grama ,

a) O alimento I tem 2 unidades de vitamina A , 2 unidades de vitamina B e 8 unidades de vitamina C .

b) O alimento II tem 2 unidades de vitamina A , 1 unidade de vitamina B e 5 unidades de vitamina C .

c) O alimento III tem 3 unidades de vitamina A , não contém vitamina B e tem 3 unidades de vitamina C .

Ache todas as possíveis quantidades dos alimentos I , II e III que forneçam , simultaneamente ,

11 unidades de vitamina A , 3 de vitamina B e 20 de vitamina C .

04. (U.F.BA) – No sistema
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$
 , determine o valor de $z - xy$.

05. (U.F.PA) – Qual é o valor de m para que o sistema
$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$
 tenha solução única ?

06. (PUC-SP) – Determine a relação entre a e b para que o sistema
$$\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ bx + 4y = 5 \end{cases}$$
 tenha solução determinada .

07. (CESCEM) – Determine os valores de a e b que tornam o sistema
$$\begin{cases} 3x - 2y = a \\ -6x + 4y = b \end{cases}$$
 indeterminado .

08. (PUC-RS) – Determine a relação entre a e b de modo que o sistema
$$\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ bx - 4y = 2 \end{cases}$$
 seja indeterminado .

09. (PUC-SP) – Determine os valores de k de modo que o sistema

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ kx + y + 3z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases} \text{ tenha solução única.}$$

10. (U.F.PE) – Determine todos os valores de λ de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \\ 3x + 3y + \lambda z = 0 \end{cases} \text{ tenha solução única.}$$

11. (PUC-SP) – Verifique quantas soluções tem o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

12. (U.F.BA) - Discutir o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + ay = 5 \end{cases}$ em função do parâmetro a .

13. (CESCEA) – Discutir o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + mz = 3 \end{cases}$ em função do parâmetro

m .

14. (F.G.V. -SP) – Discutir o sistema $\begin{cases} x + y + z = k \\ x - y - z = k \\ x + y - z = k \end{cases}$ em função do parâmetro k .

15. (MACK -SP) – Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases}$ em função do parâmetro m

16. (PUC – SP) – Para que valores de b o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 0 \\ x + by = b \end{cases}$ tem solução ?

17. (ITA – SP) - Qual deve ser a relação que a , b e c devem satisfazer para que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução ?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x + 2y + 7z = c \end{cases}$$

18. (CESGRANRIO) – Se o sistema $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y = b \end{cases}$ tem uma infinidade de

soluções, determine a e b .

19. (U.F.CE) – Se o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$ não admite solução, calcule o valor de

$$\log_{2m} 32.$$

20. (CESGRANRIO) - Que condição deve satisfazer os parâmetros α e β para que o sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ \alpha x + 3y + 4\alpha z = 4 \\ 3x + \alpha z = \beta \end{cases} \text{ não tenha solução ?}$$

Trabalhar com o método de Cramer no sistema 3x3, trabalhando com exercícios de concursos para fixar o conteúdo e mostrar como é fácil as resoluções.

Avaliação

Mediarei o aluno entre o sujeito e o objeto do conhecimento, trabalhando de forma que, a partir dos conteúdos, dos conhecimentos apropriados pelos alunos, eles possam compreender a realidade, atuar na sociedade em que vivem e transformá-la. Assim, buscando que o conhecimento sobre o tema para o aluno passe a ter um caráter significativo.

Valores:

Teste: 3,0 pontos

Prova: 4,0 pontos

Saerjinho: 2,0 pontos

Qualitativo*:2,0 pontos

*será avaliada a participação do aluno nos trabalhos em grupos e na realização dos trabalhos propostos para casa, sendo destes dois pontos, um ponto extra..

Bibliografia:

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática ciência e aplicações volume 2**. 6ªed. São Paulo: Saraiva. 2010. 304p.

SILVA, C.; FILHO, B. **Matemática: aula por aula 2ª série**. 2ªed. São Paulo: FTD. 2005.416p.

BRASIL. **Site Só Matemática**. < <http://www.somatematica.com.br/>>. Acesso em: 20 out 2014.

BRASIL. **Site InfoEscola**. < <http://www.infoescola.com/>>. Acesso em: 20 out 2014.

BRASIL. **Site Brasil Escola**. < <http://www.brasilecola.com/>>. Acesso em: 20 out 2014.

BRASIL. **Formação Continuada - Roteiro de Ação (Sistema Linear)1,4 e 7** – Material de Estudo, 2014.

BRASIL. **Site Google Imagem**. < <https://www.google.com.br/>>. Acesso em: 20 set 2014.

BRASIL. **Blog Matemática da Mariclei**. < <http://matematiclei.blogspot.com.br> >. Acesso em: 20 out 2014.