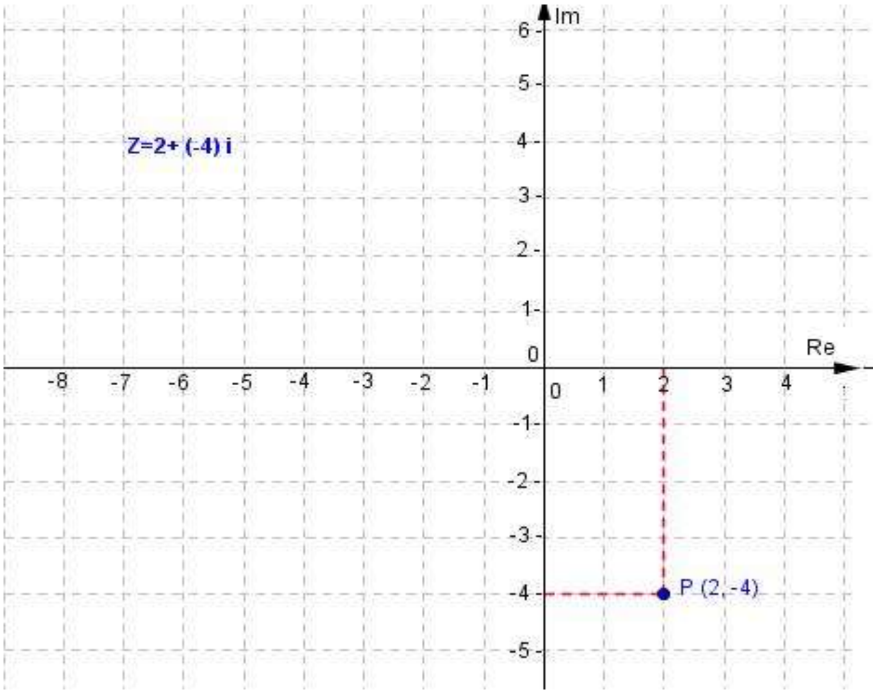
Formação Continuada em MATEMÀTICA
Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

PLANO DE TRABALHO 1

Representação Geométrica de um Número Complexo



Matemática 3ª Série E.M. - 3º Bimestre 2014

Tarefa 1

Cursista: Sandra Cristina Rainha Castro da Silva
Tutor: Bianca Coloneze

Sumário

Introdução

É reconhecido que os Números Complexos representam um novo campo numérico e simbolizam um conhecimento que nasce na Matemática para a resolução de equações que, por exemplo, a Física e áreas da Engenharia e da Aerodinâmica utilizam em modelos para explicar fenômenos relacionados à eletricidade e movimentos em fluidos como ar e água.

Apesar de fazer parte do currículo escolar, conceitos ligados aos Números Complexos ainda hoje são pouco compreendidos pela grande maioria dos alunos e, muitas vezes, pelos próprios professores. Muitos são os questionamentos feitos por nós, educadores, sobre os meios mais eficazes de proporcionarmos aos nossos alunos a capacidade de estabelecerem as relações necessárias à compreensão dos estudos realizados neste nível de ensino.

“A falta de motivação e interesse dos alunos pela Matemática é um dos principais problemas que faz com que o rendimento escolar nessa disciplina seja desastroso em todos os níveis de ensino. Isto ocorre porque, na grande maioria das vezes, as aulas são monótonas,sem relação com o cotidiano e nada desafiadoras”. (KIPPER, 1985)

A fim de despertar maior interesse por tais conhecimentos, realizaremos a introdução de um recurso tecnológico para abordagem de conceitos ligados ao estudo dos Números Complexos, fornecendo ao nosso aluno um ambiente dinâmico. É nesse ambiente que ele será o responsável direto pela construção do seu saber, através de experimentos e investigações. Com base nessas ideias, faremos a representação geométrica de um número complexo utilizando o software GeoGebra.

Para atingir o sucesso de tal proposta, será necessário realizar um paralelo entre os elementos do conjunto dos Números Complexos e os pontos no plano cartesiano, como também relembrar as operações algébricas. A execução deste Plano de Trabalho ocorrerá por meio de quatro tempos de quarenta minutos, levando em conta que se trata de turmas do noturno, para desenvolvimento dos conceitos e mais dois tempos para avaliação da aprendizagem.

Desenvolvimento

Atividade 1

- **<u>HABILIDADE RELACIONADA</u>**

Associar as partes real e imaginária de um número complexo às coordenadas de um ponto no plano cartesiano.
H02 - Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.
H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos.

- **<u>PRÉ-REQUISITOS</u>**

Compreender os sistemas de localização e posicionamento no plano cartesiano.

- **<u>TEMPO DE DURAÇÃO</u>**

80 minutos

- **<u>RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS</u>**

Ficha 1 – O Plano de Argand-Gauss (em anexo), Software GeoGebra e Data Show.

- **<u>ORGANIZAÇÃO DA TURMA</u>**

Individual.

- **<u>OBJETIVOS</u>**

Apresentar tópicos relacionados ao surgimento do Plano de Argand-Gauss, levando o aluno a estabelecer um paralelo entre este e o Plano Cartesiano, bem como a realizar a representação de números complexos no plano e utilizando o software GeoGebra.

- **<u>METODOLOGIA ADOTADA</u>**

Abordar para a turma os tópicos relacionados a seguir.

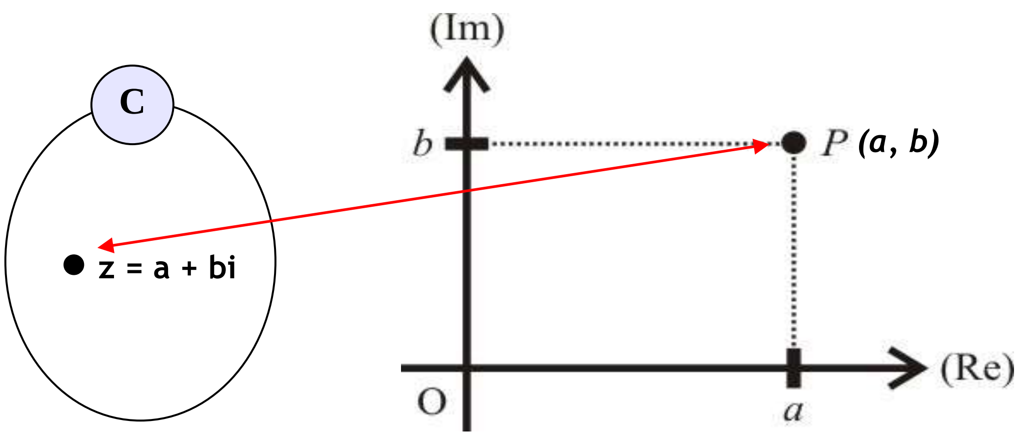
O Plano de Argand-Gauss

No início do século XIX, trabalhando de maneira independente, Gauss e Jean Robert Argand, com base nas ideias de Gaspar Wessel, notaram uma associação entre as partes real e imaginária de um número complexo e as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, tornando mais fácil a visualização desses números.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Jean Robert Argand (1768-1822)

Da mesma forma que a cada número real pode-se associar um único ponto da reta real, a cada elemento a + bi do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto P(a, b) do plano cartesiano e vice-versa. A parte real de z é representada no eixo das abscissas, que é chamado de **eixo real**, e a parte imaginária, no eixo das ordenadas, que é o **eixo imaginário.**



O plano cartesiano assim definido passa a ser chamado de **plano de Argand-Gauss** ou **plano complexo**. O ponto *P(a, b)* é a **imagem de z** nesse plano ou o **afixo** do número complexo *z* = *a* + *bi*.

Fique ligado!

A correspondência entre os números complexos e suas imagens é ***biunívoca****; por isso podemos fazer a identificação*

z = a + bi = (a, b)

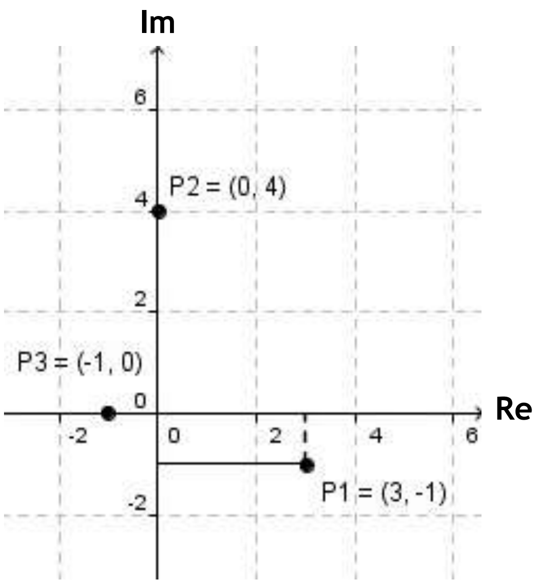
Observe que:

- O número real zero é representado pelo ponto (0, 0);
- Todo número complexo real puro tem a sua parte imaginária igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo real (Re);
- Todo número complexo imaginário puro tem sua parte real igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo imaginário (Im);
- Os demais números complexos (a + bi, com a≠ 0 e b ≠ 0) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de a e b;
- Para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

Exemplo

Vamos representar no plano complexo as imagens dos números complexos: $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 4i$ e $z_3 = -1$.

<u>**SOLUÇÃO**</u>: Neste momento, será projetado no quadro branco, com o auxílio do data Show, a imagem do software GeoGebra para que os alunos observem a representação geométrica dos números complexos dados. Note que as imagens de z_1, z_2 e z_3 são, respectivamente, os pontos P_1 $(1, -1)$, P_2 $(0, 4)$ e P_3 $(-1, 0)$. Logo, a solução será dada pela seguinte figura:



Exercícios

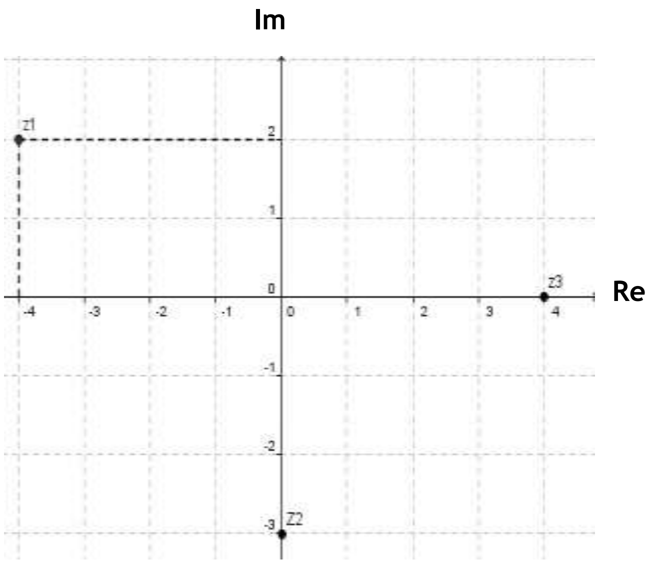
1. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, localize, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

Solução

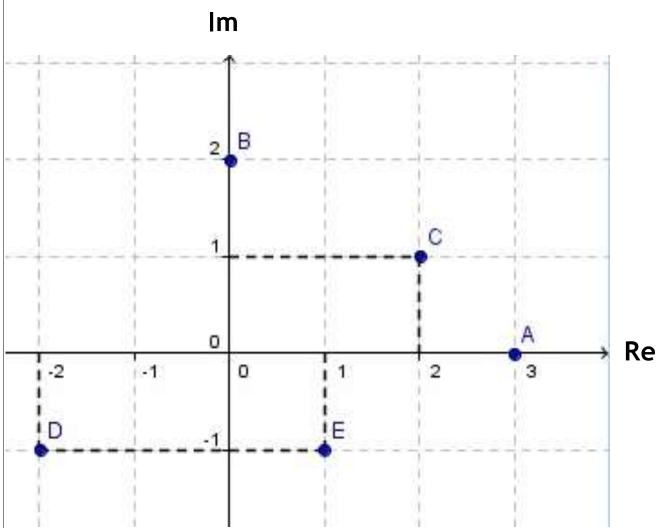
$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4, 2)$

$z_2 = -3i \Rightarrow (0, -3)$

$z_3 = 4 \Rightarrow (4, 0)$



2. Determine os números complexos correspondentes aos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** na figura abaixo.



(Figura construída no GeoGebra e projetada no quadro branco)

Solução:

$A(3, 0) \Rightarrow z_1 = 3$

$B(0, 2) \Rightarrow z_2 = 2i$

$C(2, 1) \Rightarrow z_3 = 2 + i$

$D(-2, -1) \Rightarrow z_4 = -2 - i$

$E(1, -1) \Rightarrow z_5 = 1 - i$

3. Utilizando o software Geogebra, refaça a questão 1.

Para a resolução desta questão, os alunos utilizarão o computador, em dupla, para fazer a representação geométrica dos pontos dados. Durante a experimentação, poderão ser inseridos outros números complexos para que realizem a representação com o uso do software.

Atividade 2

- **HABILIDADE RELACIONADA**

Associar a cada complexo .z = a + bi um único vetor com extremidade no ponto **O** (origem do sistema) e no ponto **P** (a, b). Dessa forma, representar dois números complexos dados, $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, e a soma deles, $\mathbf{z_1 + z_2}$, obtendo a diagonal do paralelogramo formado por essa soma.
H02 - Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.
H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

- **PRÉ-REQUISITOS**

Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica.
Identificar **vetor** como um segmento de reta orientado.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**

80 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**

Ficha 2 – Representação Geométrica dos Números Complexos, Software GeoGebra e Data Show.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**

Individual.

- **OBJETIVOS**

Apresentar tópicos relacionados à representação geométrica de números complexos e suas respectivas somas, associando tais números a vetores no plano.

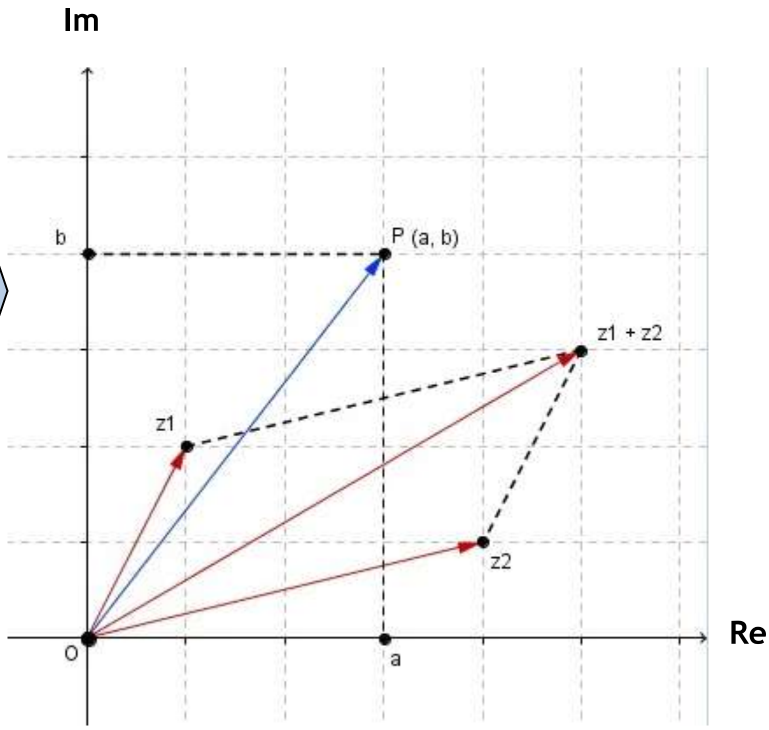
- **METODOLOGIA ADOTADA**

Abordar para a turma os tópicos relacionados a seguir.

Representação Geométrica dos Números Complexos

Podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ um único vetor com extremidades no ponto **O**, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e no ponto **P** (a, b).

No plano complexo ao lado, além do número $z = a + bi$, estão representados outros dois números complexos, $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, e a soma deles, $\mathbf{z_1 + z_2}$ (diagonal do paralelogramo formado por $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$).



Exemplo

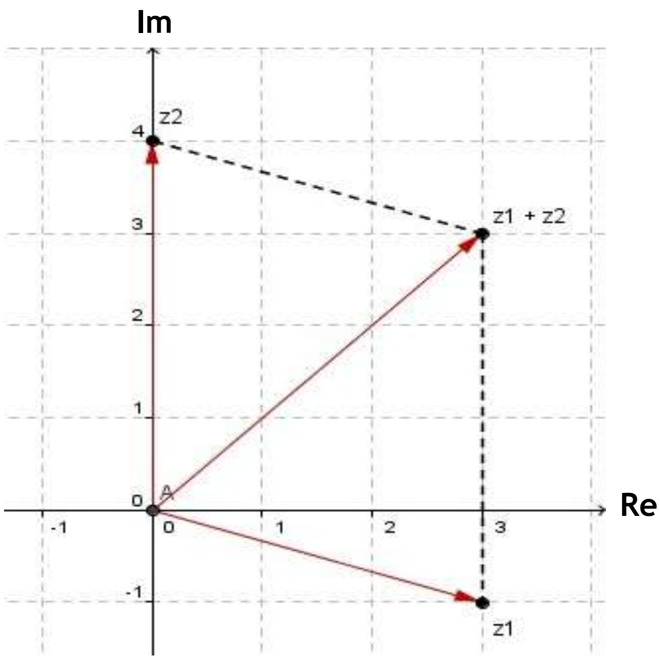
Vamos efetuar algebricamente e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 4i$

SOLUÇÃO:

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (3 - i) + (4i) = 3 + 3i$

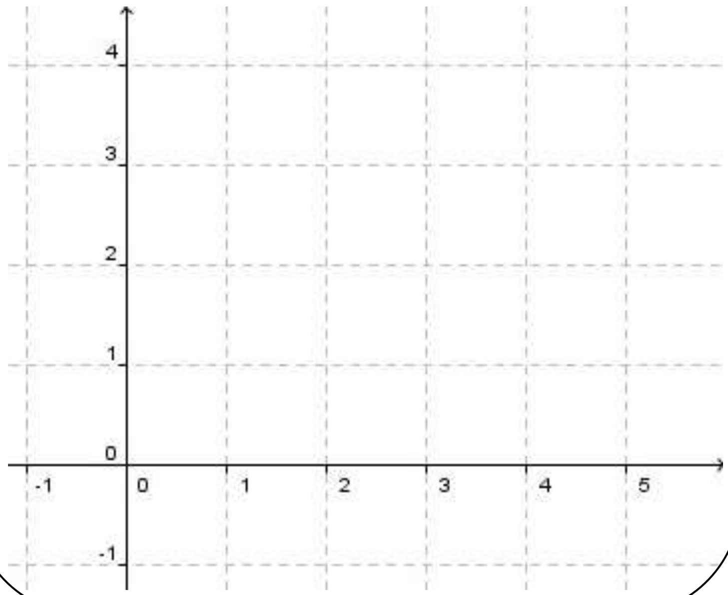
Geometricamente, temos



Exercício

1. Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

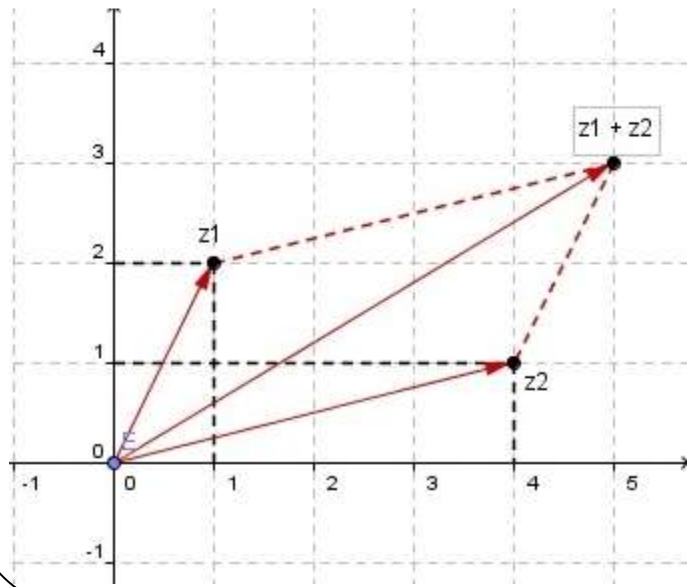
Geometricamente



Algebricamente

Solução:

Geometricamente



Algebricamente

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i$

2. Utilizando o software GeoGebra, represente geometricamente a soma realizada na questão 1

Para a resolução desta questão, os alunos utilizarão o computador, em dupla, para fazer a representação geométrica dos pontos dados. Durante a experimentação, poderão ser inseridos outros números complexos para que realizem a representação com o uso do software.

Atividade 3

- **HABILIDADE RELACIONADA**

Localizar no Plano de Argand-Gauss pontos correspondentes a números complexos dados, bem como representar algebrica e geometricamente a soma entre eles.

H02 - Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.

H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos.

- **PRÉ-REQUISITOS**

Compreender os sistemas de localização e posicionamento no plano cartesiano.
Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica.
Identificar **vetor** como um segmento de reta orientado.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**

80 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**

Ficha 3 – Folha de Atividade, Software GeoGebra e Data Show.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA**

Em dupla

- **OBJETIVOS**

Revisão e fixação através de atividades relacionadas aos tópicos estudados.

- **METODOLOGIA ADOTADA**

Distribuição de folhas com atividades diversificadas relacionadas aos tópicos estudados e utilização do software GeoGebra para complementação dos conceitos desenvolvidos.

Atividades

1. Num mesmo plano complexo, localize os pontos **A, B, C, D, E, F** e **G,** correspondentes aos seguintes números complexos: **Im**

$z_1 = -3 + 3i$

$z_2 = 1 + 4i$

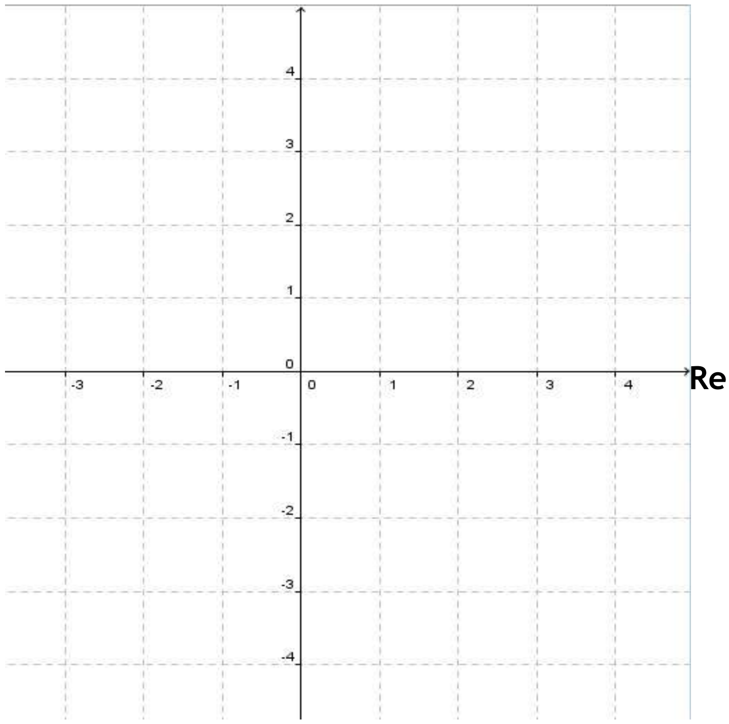
$z_3 = 2i$

$z_4 = -4i$

$z_5 = 2 - 3i$

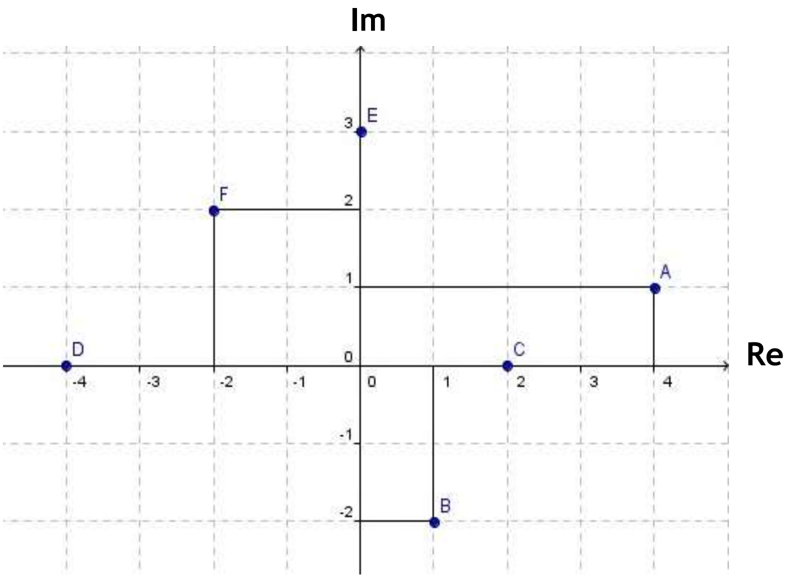
$z_6 = 3$

$z_7 = -i$



2. Com base nos números complexos dados na questão 1, calcule, algébrica e geometricamente, a adição $\mathbf{z_1 + z_2}$, $\mathbf{z_2 + z_4}$, $\mathbf{z_1 + z_5}$ e $\mathbf{z_3 + z_6}$.

3. Escreva os números complexos correspondentes aos pontos **A, B, C, D, E** e **F** do plano:

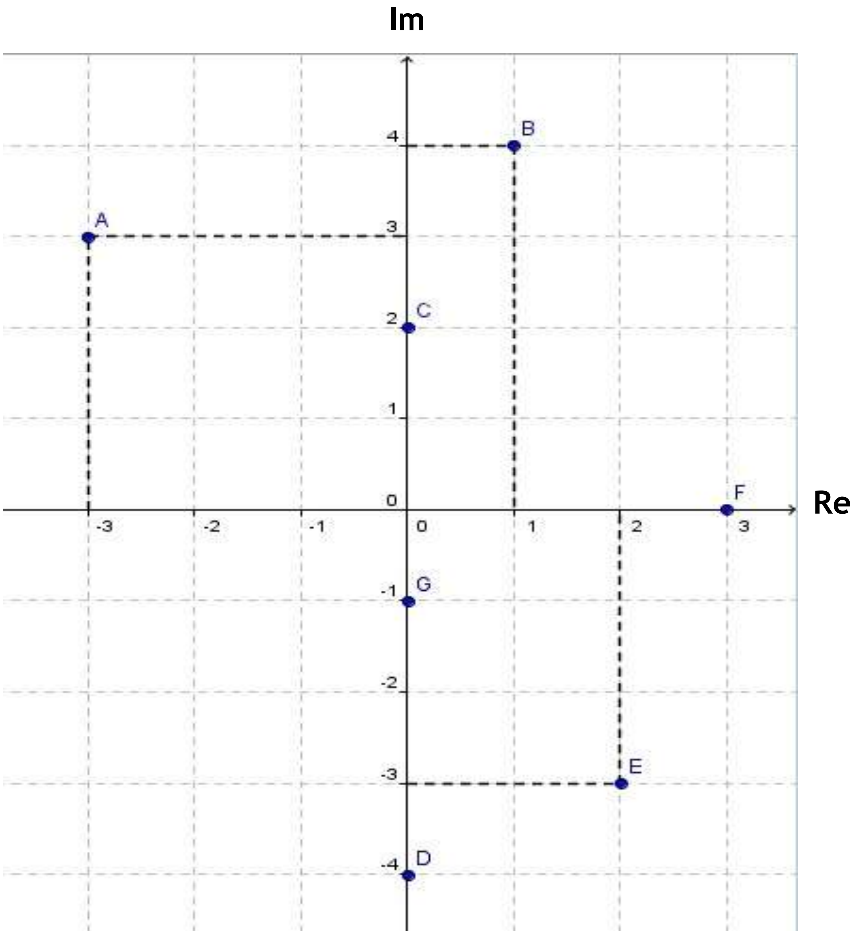


4. Utilizando o software GeoGebra, refaça as questões 1, 2 e 3.

Para a resolução desta questão, os alunos utilizarão o computador, em dupla, para fazer a representação geométrica dos pontos dados.

Solução:

1.



2.

Algebricamente

$z_1 + z_2 \Rightarrow (-3 + 3i) + (1 + 4i) \Rightarrow -2 + 7i$

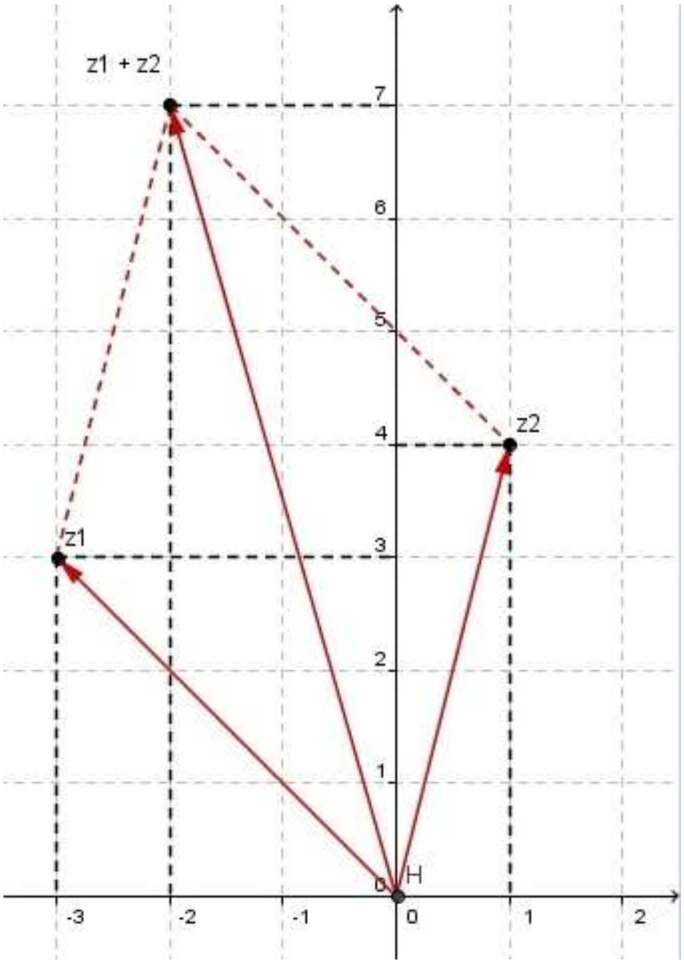
$z_2 + z_4 \Rightarrow (1 + 4i) + (-4i) \Rightarrow 1$

$z_1 + z_6 \Rightarrow (-3 + 3i) + (3) \Rightarrow 3i$

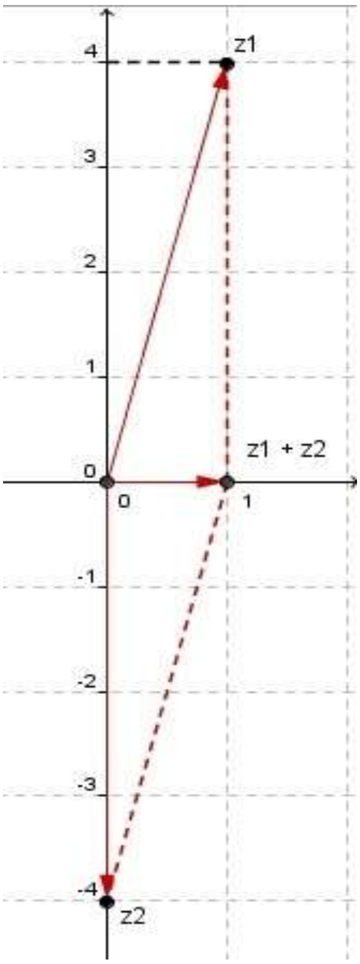
$z_3 + z_6 \Rightarrow (2i) + (3) \Rightarrow 3 + 2i$

Geometricamente

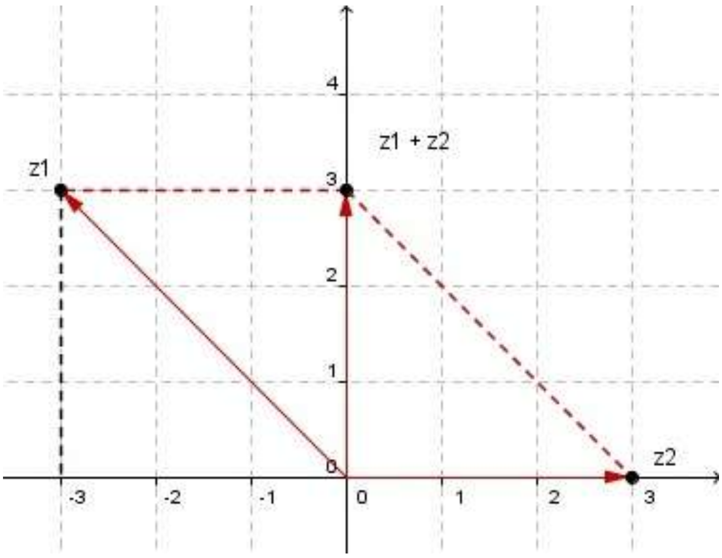
$z_1 + z_2 \Rightarrow (-3 + 3i) + (1 + 4i) \Rightarrow -2 + 7i$



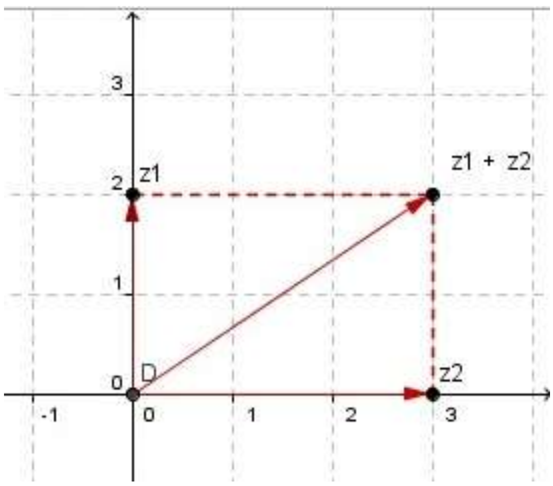
$z_2 + z_4 \Rightarrow (1 + 4i) + (-4i) \Rightarrow 1$



$z_1 + z_6 \Rightarrow (-3 + 3i) + (3) \Rightarrow 3i$



$z_3 + z_6 \Rightarrow (2i) + (3) \Rightarrow 3 + 2i$



3.

A(4, 1) $\Rightarrow \underline{z_1 = 4 + i}$

B (1, -2) $\Rightarrow \underline{z_2 = 1 - 2i}$

C (2, 0) $\Rightarrow \underline{z_3 = 2}$

D (-4, 0) $\Rightarrow \underline{z_4 = -4}$

E (0,3) $\Rightarrow \underline{z_5 = 3i}$

F (-2, 2) $\Rightarrow \underline{z_6 = -2 + 2i}$

Fica a dica

A associação dos números complexos z = a + bi aos vetores permite o uso destes números em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior, nos quais os conceitos de corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. Usam números complexos.

Avaliação

A avaliação de Matemática, para o professor, é a possibilidade constante de reflexão sobre o projeto pedagógico, seus objetivos, suas possibilidades, e a localização de cada aluno em relação às metas estabelecidas. Já para o aluno, a avaliação tem a função de torná-lo ator e autor de sua aprendizagem. Dessa forma, embora os conceitos desenvolvidos tenham sido apresentados prontos para o aluno, ao trabalhar em dupla, durante a resolução das questões propostas, e, ao utilizar o software GeoGebra, é dada a ele a oportunidade de investigar, analisar e consolidar as informações recebidas acerca dos conteúdos estudados.

Por se tratar de alunos que, em sua maioria, estão afastados da escola há algum tempo, a abordagem dos temas foi feita de forma muito sucinta e objetiva e as questões propostas mantiveram o mesmo enfoque. Além disso, deverão trabalhar em duplas, o que permitirá a troca de ideias e maior segurança ao desenvolver as atividades sugeridas. Dessa forma, o aluno será avaliado, não somente pelo acerto ou erro das questões, mas em uma totalidade: atenção, interesse, trabalho em dupla, busca e desempenho.

Assim, avaliar se torna ação regulada e refletida, que usa as informações coletadas por meio de diversos instrumentos, em função do valor atribuído à aprendizagem.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ao desenvolver este trabalho, levei em consideração o tempo disponível para as turmas 3001, 3002 e 3003 do Colégio Estadual Aura Barreto no ano letivo em curso (2014), o fato de se tratar de turmas do ensino noturno (cujo tempo das aulas é reduzido e muitos dos alunos estão há algum tempo sem estudar), o 3º bimestre , que é mais curto e a certeza de que irei implementar este Plano de Trabalho com eles. Informo que, infelizmente, não constam muitas atividades que envolvam o software GeoGebra ou utilização intensa do computador porque a sala de informática de minha escola não está em funcionamento. Logo,só é possível realizar as atividades com um computador e os alunos divididos em duplas, o que dificulta trabalhos desse tipo.

Fontes de Pesquisa

BARROSO, Juliane Matsubara. ***Matemática***: Ensino Médio. Volume 3 – 3ª série – 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

CURRÍCULO MÍNIMO: Matemática. Área: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Governo do Estado do Rio de Janeiro, SEE, 2011;

DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática***: *contextos e aplicações.* Volume 3 – 3ª série. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. ***Matemática***: Volume Único. São Paulo: Atual, 1997.

Matrizes de Referência para Avaliação Diagnóstica do Saerjinho. SEEDUC, RJ,2014.

PAIVA, Manoel. ***Matemática***: Volume Único. 1 ed. São Paulo: Moderna, 1999.

Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnologia. – Brasília: Ministério da Educação, 1999.

.

ROTEIROS DE ACAO – Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente a 3ª série do Ensino Medio – 3º bimestre/2014 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 01/09/2012.

SILVA, Cláudio Xavier da; FILHO, Benigno Barreto. ***Matemática Aula por Aula***. Ensino Médio. Volume 3 – 3ª série – 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

SILVA, Jorge Daniel; FERNANDES, Valter dos Santos. ***Matemática***: *Coleção Novos Horizontes.* Ensino Médio. São Paulo: IBEP, 2005.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. ***Matemática***: Ensino Médio. Volume 3 – 3ª série – 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.