Formação Continuada em Matemática

Matemática 3º ano - 3º Bimestre / 2014

Plano de Trabalho 1

Números Complexos

Tarefa 1

Cursista**: Marciele Euzébio de Oliveira Nascimento**

Grupo**:1**

Tutora:**Bianca Coloneze**

Sumário

Introdução

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebessem, através de assuntos cotidianos, a utilização da matemática e que possam entendê-la com mais clareza.

Foi elaborado visando à transmissão do conhecimento através da construção feita pelos alunos, com resoluções de situações problemas e generalizações. Hoje temos que utilizar estratégias que tornem os conteúdos mais atrativos, pois os alunos apresentam desinteresse e grande dificuldade de interpretação de questões e raciocínio lógico.

Obviamente não usaremos os números complexos em situações cotidianas, mas é muito importante que os alunos saibam que o mundo dos números se expande além dos números reais, que existam problemas para os quais não temos a solução no conjunto dos Números Reais mas temos solução no conjunto dos números complexos. Ao diferenciar a aula, os alunos se interessam de modo natural e espontâneo. Este conhecimento básico serve para saber que sem os números complexos não seriam possíveis grandes avanços nas áreas de Engenharia Elétrica, Mecânica Quantica, Aerodinâmica, Mecânca de Fluidos entre outros.

Serão utilizados exemplos práticos, para a totalização do plano e também serão necessários seis tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento do conteúdo e mais quatro tempos para avaliação da aprendizagem.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Números Complexos

- **Habilidade relacionada** – Identificar um número complexo; Efetuar adição , subtração , multiplicação e a divisão de números complexos na forma algébrica. H-36.

- **Pré- requisitos** – Reconhecer, interpretar, identificar, aplicar e resoluções de problemas que envolvem o conteúdo.

- **Tempo de duração** – 100 minutos.

- **Recursos educacionais** – Livro didático e Roteiros disponibilizados pelo curso.

- **Organização da turma** – Dupla.

- **Objetivos** – Mostrar aos alunos a importância do tema estudado e sua aplicabilidade.

- **Metodologia adotada -** Apresentar o vídeo para os alunos com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado.

Você sabia?

Os números complexos são utilizados em várias áreas do conhecimento, tais como engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos, além da própria matemática, em que são estudadas análise complexa, álgebra linear complexa, álgebra de Lie complexa, com aplicações em resolução de equações algébricas e equações diferenciais.

Vídeo


http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187


http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141


http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1142

NÚMEROS COMPLEXOS

Resolver a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$:

SOLUÇÃO:

$\rightarrow \quad x^2 - 2x + 5 = 0$

$Com: \quad a = 1; \quad b = -2; \quad c = 5$

$\rightarrow \quad 1x^2 - 2x + 5 = 0$

$\rightarrow \quad ax^2 - bx + c = 0$

Como se sabe, toda a equação do 2º grau apresenta sempre 2 Raízes ou Soluções. Obtemos as soluções da equação utilizando a fórmula quadrática:

$\boldsymbol{Fórmula\ Quadrática}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad como \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Ver cálculo auxiliar 1.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4.i}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm 2.i)}{\cancel{2}} = 1 \pm 2.i$$

Ver cálculo auxiliar 2.

$$x_{1,2} = 1 \pm 2.i \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2.i \\ \quad ou \\ x_2 = 1 + 2.i \end{cases}$$

$\rightarrow$ **CA 1.** (***calculo auxiliar***)

$\Rightarrow$ *não existem raizes de números negativos, então, neste ponto vamos substituir o número negativo por* $i = \sqrt{-1}$.

$\Rightarrow \sqrt{-16} = \sqrt{16 \times (-1)} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4 \times i$

$\rightarrow$ **CA 2.** (***calculo auxiliar***)

$\Rightarrow$ *não estaria errado se se deixasse o resultado da equação, desta forma,* $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4.i}{2}$

mas existe uma fracção no resultado; dificultando o cálculo.

Atenção: todos os elementos da fracção são múltiplos de 2, e o denominador é o próprio 2.

colocando em evidência o 2 do numerador pode − se anular o denominador:

$\Rightarrow 2 \times (1 \pm 2.i) = 2 \times 1 \pm 2 \times 2.i = 2 \pm 4.i$

Atividade Extra:

Em uma folha separada para ser entregue no final da aula, uma equação onde a solução tem números complexos para que eles possam resolver.

Atividade Proposta: Foi utilizado o livro didático.

Atividade 2 – Números Complexos

- **Habilidade relacionada** – Identificar um número complexo; Efetuar adição, subtração, multiplicação e a divisão de números complexos na forma algébrica. H-36.

- **Pré- requisitos** – Reconhecer, interpretar, identificar, aplicar e resoluções de problemas que envolvem o conteúdo.

- **Tempo de duração** – 100 minutos.

- **Recursos educacionais** – Software Geogebra e Roteiros disponibilizados pelo curso.

- **Organização da turma** – Dupla.

- **Objetivos** – Mostrar aos alunos a importância do tema estudado e sua aplicabilidade.

- **Metodologia adotada** - Apresentar o vídeo para os alunos com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado.

Números Complexos

Conjunto de Números Complexos (C) é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) de números reais para os quais:
Graficamente, os eixos de representação das suas coordenadas x e y denominam-se: eixo de números reais(x) e eixo dos números imaginários(y).

z é complexo na forma ou algébrica ou binomial.

$$z = x + yi$$

z é complexo na forma de par ordenado.

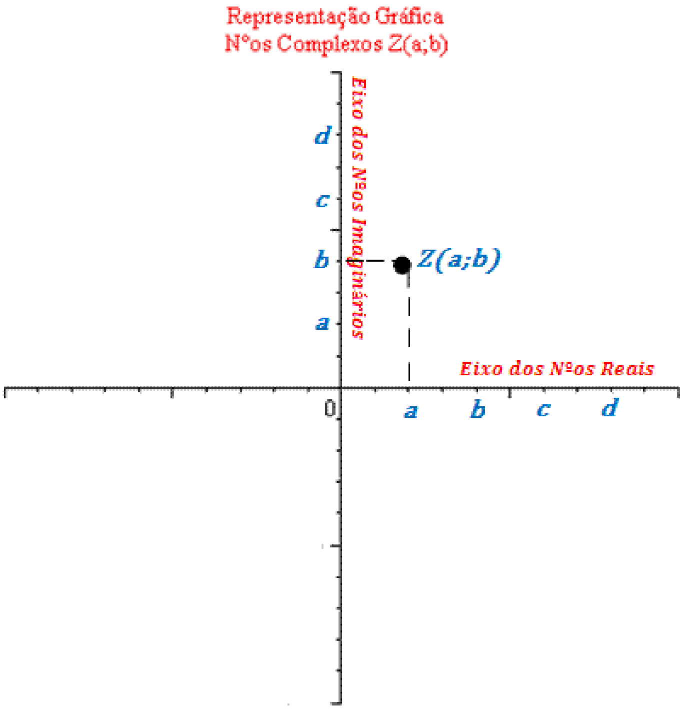
$$\Rightarrow z = (x, y) = x + yi$$

Onde:
x - parte real de z

y - parte imaginária de z

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE COMPLEXOS Z(x,y) = Z(nºreal; nºimaginário)

Onde: a coordenada x = *um número real*
a coordenada y = *um número imaginário*



Atividade Extra:

Laboratório de Informática - Software Geogebra - Dados os números complexos :

z = -1 + i; **w = 3 + 5i**

z1 = 6 + 3i; **w1 = 2 – 4i**

z2 = -2 + 4i; **w2 = 3 – 5i**

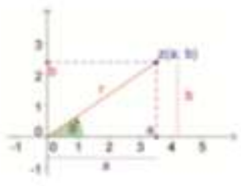
z3 = 3 – 5i; **w3 = -2 + 4i**

Representar seus afixos no Plano de Argand Gauss.

Atividade Proposta: Foi utilizado o roteiro de ação 2.

Enxergando os números complexos através de outros olhos: a Representação Polar

Observe a figura:



Nela você pode ver a representação de um número complexo qualquer, destacados o segmento que liga o número complexo à origem – indicado por r – e o ângulo formado entre esse segmento e o eixo X – indicado por θ.

1. Podemos afirmar que para cada número complexo temos um único tamanho e um único ângulo a ele associado? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

2. A tarefa agora é escrever a parte real do número complexo em função de r e θ. Use as relações trigonométricas no triângulo retângulo para escrever uma relação entre a, r e θ.

3. Utilizando ainda o triângulo retângulo indicado na figura acima, escreva a parte imaginária do número complexo em função de r e θ.

4. Utilizando esses valores, escreva o número complexo em função de r e θ.

Leia cada uma das perguntas a seguir troque ideias com seus colegas e registre as conclusões.

5. Dado um ponto no plano, sempre haverá um raio (tamanho) e um ângulo associado a esse ponto? Justifique sua resposta.

6. Dois pontos diferentes podem estar associados ao mesmo raio e ao mesmo ângulo? Por quê?

7. Dado um ponto no plano, o raio e o ângulo a ele associados são únicos? Em outras palavras: pode um mesmo ponto ter mais de um raio ou mais de um ângulo associados a ele? Justifique sua resposta.

8. Pense no número 0. Qual seria a sua representação na forma polar? Ela é única? Como isso é possível? Troque ideias com os colegas e registre suas conclusões.

Atividade 3 – Operações com os Números Complexos

- **Habilidade relacionada** – Identificar um número complexo; Efetuar adição, subtração, multiplicação e a divisão de números complexos na forma algébrica. H-36.

- **Pré- requisitos** – Reconhecer, interpretar, identificar, aplicar e resoluções de problemas que envolvem o conteúdo.

- **Tempo de duração** – 100 minutos.

- **Recursos educacionais** – Software Geogebra e Roteiros disponibilizados pelo curso.

- **Organização da turma** – Dupla.

- **Objetivos** – Mostrar aos alunos a importância do tema estudado e sua aplicabilidade.

- **Metodologia adotada -** Apresentar o vídeo para os alunos com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado.

OPERAÇÕES ENTRE COMPLEXOS

➔ *Correspondência entre Complexo na forma de Par Ordenado(um ponto de um gráfico) e a Forma Algébrica*

$$z = (a,b) = a + bi$$

➔ *Igualdade*

$$(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c, bi = di$$

$$(a + bi) = (c + di) \Rightarrow a = c, bi = di$$

➔ *Adição*

soma nºos reais

$$(a,b) + (c,d) = (a + bi) + (c + di)$$

soma nºos imaginários

$$\Rightarrow (a + b) + (b + d)i$$

➔ *Conjugado*

$$z = a \boxed{+} bi$$

$$\bar{z} = a \boxed{-} bi$$

➔ *Divisão*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = z$$

➔ *Multiplicação*

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di)$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

<u>*EXEMPLOS*</u>

Considere os complexos *Z1* e *Z2*, onde *Z1* é número complexo na forma algébrica e *Z2* é numero complexo na forma de par ordenado (uma coordenada cartesiana):

Z1 = 2 + 3i e *Z2(-4;5)*

Determine: Z1+Z2; Z1.Z2; 7Z1-6Z2

O primeiro passo é passar Z2 para a forma algébrica, e assim conseguir efectuar as operaçoes acima proposta, então:

Z2 = (-4;5) = -4 + 5i

______________________**Exemplo 1.**__________________________

(+) + (-) = (-)

→ atribuindo-se o sinal do maior número (-4)

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-4 + 5i) = -2 + 8i = (-2; 8)$$

(+) + (+) = (+)

Exemplo 2.

(+) x (+) = (+)

(+) x (-) = (-)

$$z_1.z_2 = (2+3i)+(-4+5i) = -8+10i-12i+15i^2$$

(+) x (-) = (-)

(+) x (+) = (+)

$$C.A. \Rightarrow \quad i=\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad (i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

$$\Rightarrow z_1.z_2 = -8+10i-12i+15.(-1) = -8+10i-12i-15$$

$$\Rightarrow z_1.z_2 = -23-2i = (-23;\ -2)$$

Exemplo 3.

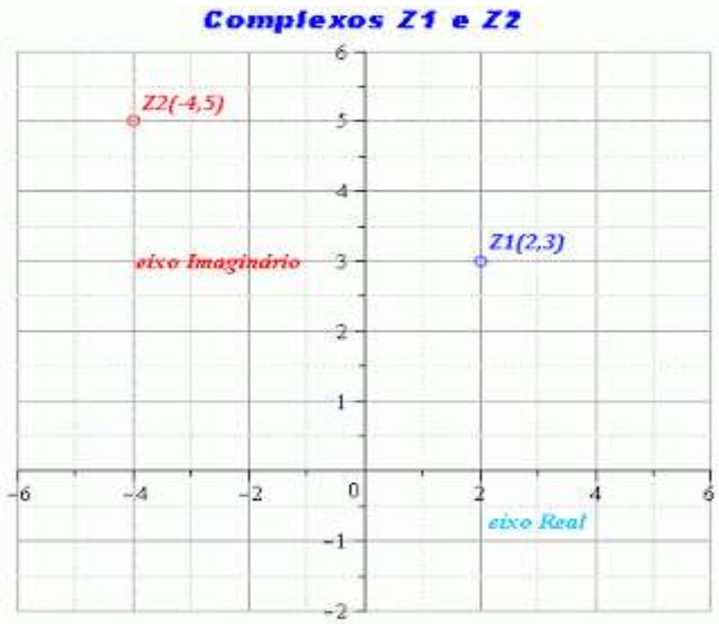
(-) x (-) = (+)

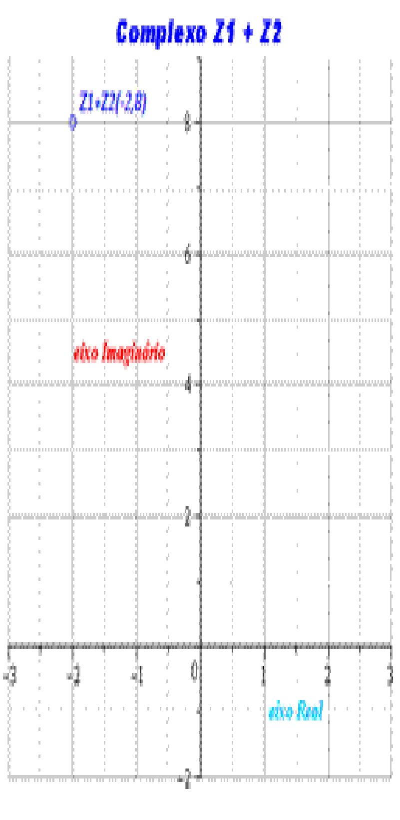
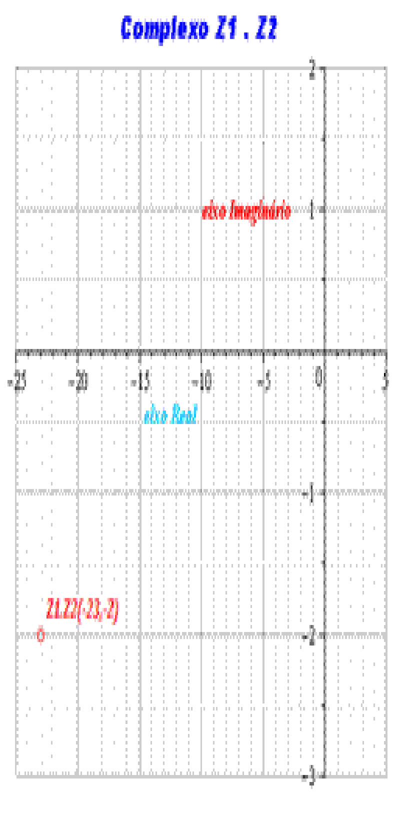
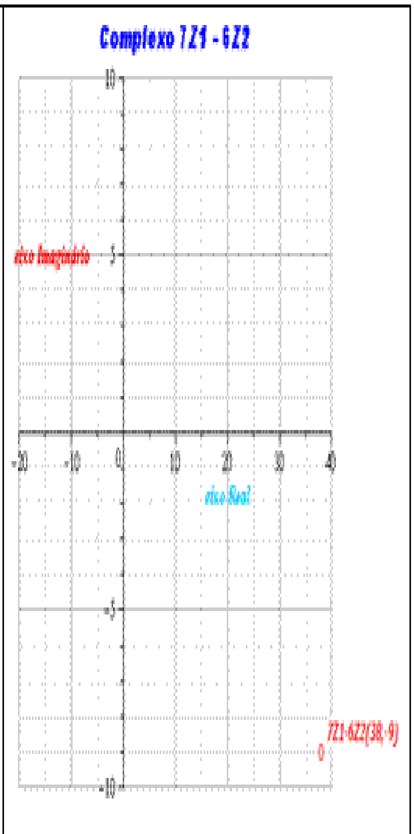
$$7z_1 - 6z_2 = 7.(2+3i) - 6.(-4+5i) = 14+21i+24-30i$$

(-) x (+) = (-)

$$\Rightarrow 7z_1 - 6z_2 = 38-9i = (38;-9)$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA *Z1(2,3)* **e** *Z2(-4;5)*



		
Representação Gráfica Z1 + Z2	Representação Gráfica Z1 . Z2	Representação Gráfica 7Z1 - 6Z2

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Foram utilizados os roteiros de ação 3.

1. Agora efetue as somas z + w abaixo:

a. z = 3; w = 5

b. z = 2i; w = 4i

c. z = 5; w = 3i

d. z = 2 + 3i; w = 3

e. z = 3 + 5i; w = 3 + 2i

2. Agora, efetue z – w nos casos abaixo:

a. z = 6 + 3i; w = 2 – 4i

b. z = -2 + 4i; w = 3 – 5i

c. z = 3 – 5i; w = -2 + 4i

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

z = 1,5 + 5,4i; w = -3,1 - 1,2i

a- z + w. 1
b- z * w, com z = 3 + 2i e w = 4
c- z * w, com z = 2 + 4i e w = 3i
d- w – z, com z = - π + 5,17i; w = 8,9 + 3,6i

Dica: Tente fazer usando π = 3,14.

e- z - w + v , com z = 44,3 - 1,8i; w = 4,2 + 2,7i; v = -i

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

5. Obtenha os valores de i5, i6, i7 e i8.

6. Efetue $(2 + 3i)^2$

7. Efetue as operações solicitadas:

a) z * w, sendo que z = -1 + i; w = 3 + 5i

b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = -i

c) w : z, sendo que z = 2 - 2i; w = 5 + 2i

d) z * w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i

e) w : z, sendo que z = 4; w = 4 + 3i

f) z^3, sendo que z = 3 – i

g) z^2, sendo que z = 4 + 2i

Atividade Extra:

Laboratório de Informática - Software Geogebra - Dados os números complexos :

z = -1 + i; **w = 3 + 5i**

z1 = 6 + 3i; **w1 = 2 – 4i**

z2 = -2 + 4i; **w2 = 3 – 5i**

z3 = 3 – 5i; **w3 = -2 + 4i**

Representar no Plano de Argand Gauss, operações com esses números complexos.

Avaliação

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

O trabalho foi desenvolvido em sala de aula. A participação dos alunos foi quase total. O vídeo foi um dos elementos essenciais para o auxílio na aprendizagem e motivação dos alunos. Surgiram dúvidas durante a exibição do vídeo. Em um momento oportuno, aplicar um exercício individualmente.

Tenho costume de verificar os acertos dos alunos nas questões, com isso, posso verificar a aprendizagem do aluno.

Referências Bibliográficas

- Roteiro de ação – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano doEnsino Médio – 3º bimestre/2014.

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

- Vídeo sobre Números Complexos (DVD- Coleção Aulão- Cedic)

- Matemática:contexto e aplicações.

Ensino Médio -2ª edição- São Paulo: Ática 2004

- Matemática: participação e contexto.

Silva, Cláudio Xavier da

Ensino Médio -1ª edição- São Paulo: FTD 2009

- Endereços eletrônicos acessados

www.infoescola.com › Matemática › numeroscomplexos

*www.somatematica.com.br/emedio/**numeroscomplexos**.php*