Formação Continuada em Matemática

Fundação CICIERJ/Consórcio Cederj

Matemática 3º Ano – 4º Bimestre/2014

Plano de Trabalho

GEOMETRIA ANALÍTICA: "retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações" e "equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e o raio".

Tarefa 2

Cursista: Herlan Mendonça Peixoto
Tutora: Danubia de Araújo Machado

Sumário

INTRODUÇÃO

O objetivo deste plano de estudo é apresentar para os alunos o conceito de Geometria Analítica: “retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações” e “equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e o raio”, fazendo principalmente uma abordagem da importância deste conteúdo no estudo de diversas possibilidades e permitir que os alunos percebam a aplicação do conteúdo denominado “retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações” e “equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e o raio”.

Todo professor acredita ser importante o ensino da Álgebra, mas é uma tarefa árdua trabalhar com ela, porque os alunos possuem dificuldades para entendê-la e fazer operações. O processo de ensino e aprendizagem da Álgebra inicia-se desde o ensino fundamental e muitas vezes não é bem entendida provocando deficiências que, se não sanadas, geram dificuldades na compreensão de conteúdos que são estudados mais tarde.

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicação do conteúdo denominado “retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações” e “equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e o raio”.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades na interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico, além da falta de interesse. Por isso, é extremamente importante mostrar em quais áreas da vida e/ou profissões o tema estudado é utilizado e mostrar que eles têm capacidade de aprender e não simplesmente “gravar” como se faz isso ou aquilo. Basta um pouquinho de boa vontade!

Para a aplicação do plano serão necessários quatro tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais dois tempos para avaliação da aprendizagem.

DESENVLVIMENTO

Duração prevista: 300 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Geometria Analítica: “retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações” e “equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e o raio”

Objetivos: Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações e determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecendo o centro e raio.

Pré-requisitos: *Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta; distância entre dois pontos e sistemas de equações do 1° grau.*

Material necessário: Folha de atividade, régua, caneta, papel quadriculado, *lápis de cor ou caneta hidrográfica.*

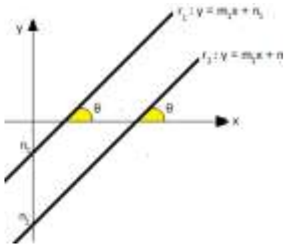
Organização da classe: Grupos de dois alunos cada e individual (avaliação).

Descritor Associado :
H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas relações.
H15 - Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
H16 - Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Nesta aula continuidade ao estudo da geometria analítica, vamos agora estudar as condições necessárias de paralelismo e a perpendicularidade entre retas.

1 - PARALELISMO:

Certamente você já viu em alguma situação do cotidiano retas paralelas! Mas, que condições são necessárias para que esta posição seja definida? Para melhor entendimento, observe a ilustração abaixo. Vamos abordar qual *a condição necessária para que duas retas sejam paralelas*.



Sendo assim, vamos considerar que as r_1 e r_2 sejam paralelas.
Desta forma, r_1 e r_2 formam com o eixo das abscissas (eixo x), ângulos congruentes, no caso. Congruentes significa iguais! Assim, podemos afirmar que ambas retas possuem coeficientes angulares iguais. Retomando alguns conceitos referente a aula passada, podemos dizer matematicamente que:

$$\boxed{r_1 \,//\, r_2 \quad \Leftrightarrow \quad tg\theta = m_1 = m_2}$$

EXEMPLO 01:
Verifique a posição relativa entre as retas de equação r: y = 3x + 1 e s: 9x - 3y - 8 = 0.

Resolução:
Inicialmente, vamos escrever a equação 9x - 3y - 8 = 0 na forma reduzida, ou seja, isolar y na equação de s:
y = 3x - 8/3.
Assim, mr = ms = 3.
Como os coeficientes lineares nr = 1 e ns = - 8/3, isto é, são diferentes, dizemos que r e s são paralelas distintas.

EXEMPLO 02:
Verifique a posição relativa entre as retas de equação: r: 2x - 5y + 1 = 0 e s: 4x - 10y + 2 = 0.

Resolução:
Vamos iniciar isolando y na equação r e s, temos:

Y = 2 x/5 + 1/5 e y = 4 x/10 + 2/10

Simplificando os coeficientes na equação reduzida da reta s, observamos que os coeficientes angulares mr = ms = 2/5 e os coeficientes lineares nr =ns = 1/5 , assim dizemos que r e s são paralelas coincidentes.

EXEMPLO 03:
A reta y = mx - 5 é paralela à reta 2y = - 3x + 1. Determine o valor de m.

Resolução:
Chamando a reta r: y = mx - 5 $\Rightarrow$ *mr = m*

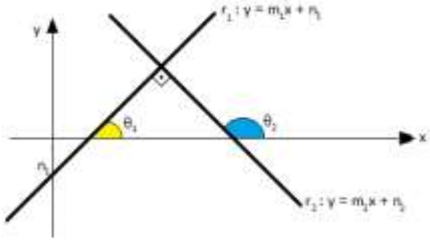
Chamando a reta s: 2y = - 3x + 1, e isolando y, temos:

s : y = - 3x/2 + ½ $\Rightarrow$ ms = - 3/2

Para que as retas r e s serem paralelas, mr = ms $\Rightarrow$ *m = - 3/2*

2 - PERPENDICULARIDADE:

Vamos, agora, através da ilustração abaixo, estabelecermos a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si.



Tomemos inicialmente uma reta oblíqua (inclinada) r_1 que forme ângulo $\theta 1$, com o eixo das abscissas.

Seja r_2 uma reta perpendicular a r_1, de maneira que r_2 forme um ângulo $\theta 2$ com o eixo das abscissas.

Assim, $\theta 2 = \theta 1 + 90°$,

Como $\theta 2$ é ângulo externo do triângulo formado pelas retas r_1, r_2 e o eixo das abscissas, isto é, o ângulo externo ($\theta 2$) é igual à soma dos dois internos não adjacentes ($\theta 1 + 90°$).
Aplicando a tg em ambos membros, temos:

tg $\theta 2$ = tg($\theta 1$ + 90°)
Mas, tg($\theta 1$ + 90°) = - cotg ($\theta 1$) = - 1 /tg $\theta 1$

Assim,

tg $\theta 2$ = - 1 / tg $\theta 1$

m2 = - 1/m1

m1 m2 = - 1

Logo, para que duas retas sejam perpendiculares é necessário que o produto dos seus respectivos coeficientes angulares seja igual a - 1, isto é:

$$\boxed{r_1 \perp r_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1}$$

EXEMPLO 01:
Verifique a posição relativa entre as retas de equação r: 3x + 5y - 7 e s: 10x - 6y + 3.

Resolução:
Inicialmente, vamos isolar y na equação de r e s, para identificar os coeficientes angulares:

(r): y = 3 x/5 + 7/5 *(s): y* = 10 x/6 + 3/2

Observe que mr = - 3/5 e ms = 10/6

Então, mr ms = (- 3/5) . (10 /6) = -30/30 = - 1

Portanto, r e s são perpendiculares entre si.

EXEMPLO 02:
As retas 4x - 5y - 8 = 0 e px - 6y + 2 = 0 são perpendiculares. Determine p.

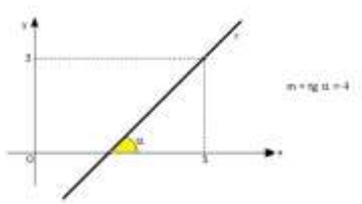
Resolução:
Isolando y nas equações das retas dadas, temos:
r: 4x - 5y - 8 = 0 s: x - 6y + 2 = 0

- 5y = -4x + 8	*- 6y = - px - 2*
5y = 4x – 8	*6y = px + 2*
y = 4 x/5 – 8/5	y = px/6 + 2/6
mr = 4/5	*ms* = p/6

Como r e s são perpendiculares então, mr. ms = - 1.
Logo, 4/5 . p/6 = - 1 ⇒ *4 p = - 30* ⇒ p = - 30/4 = - 15/2

Equação Fundamental da Reta

Caro aluno, considere a seguinte situação ilustrada abaixo:



Observe que a reta r passa pelo ponto P(5,3) e possui coeficiente angular m = 4.
Você sabia que podemos obter uma equação da reta r em função do ponto P(5, 3) e do coeficiente angular m = 4 ? Acompanhe os cálculos!

1 - COMO OBTER A EQUAÇÃO DA RETA DADO UM PONTO E O COEFICIENTE ANGULAR.

Se r é uma reta oblígua que passa pelo ponto P(x0, y0) e possui coeficiente angular m, então uma equação de r é **y - y0 = m(x - x0)**, denominada **equação fundamental da reta.**
Retornando ao exemplo inicial , temos que P(x0, y0) = (5, 3) e m = 4. Então:

y - 3 = 4(x - 5)
y - 3 = 4x - 20
4x - y - 17 = 0

Essa equação obtida representa todos os pontos pertencentes a reta.
Vamos verificar o resultado abaixo:
4 (5) - (3) - 17 = 0

Aplicando o ponto na equação obtida, verificamos que a igualdade está correta!

Exemplo 01:
Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto P(2, - 3) e tem coeficiente angular m = - 5.

Resolução:
Na equação fundamental da reta y - y0 = m(x - x0), substituindo x0, y0 e m, respectivamente, por 2, - 3 e - 5, temos:
y - (- 3) = - 5(x - 2)
y + 3 = - 5x + 10
5x + y - 7 = 0

Logo, uma equação da reta r é 5x+ y - 7 = 0.

Exemplo 02:
Determinar a equação geral da reta r que passa pelo ponto P(0, 1) e é paralela a reta (s): y = 3x - 4.

Resolução:

Sendo (s): y = 3x - 4 $\Rightarrow$ ms = 3

Como r // s mr = ms $\Rightarrow$ mr = 3

Assim, para determinar a equação da reta r utilizaremos a equação fundamental da reta y - y0 = m(x - x0), onde substituíremos x0, y0 e m, respectivamente, por 0, 1 e 3, e assim obteremos:
y - (1) = 3(x - 0)
y - 1 = 3x - 0
- 3x + y - 1 = 0 ou 3x -y + 1 = 0.
Logo, uma equação da reta r procurada é - 3x + y - 1 = 0.

Exemplo 03:
Seja P = (a, 1) um ponto da reta r de equação 4x - 2y - 2 = 0. Determine a equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r.

Resolução:

P $\in$ *r* $\Rightarrow$ *4(a) - 2(1) - 2 = 0*
4a - 2 - 2 = 0
4a = 4
a = 1

Assim, (r) 4x - 2y - 2 = 0 $\Rightarrow$ *mr = 2*
mr ms = - 1 $\Rightarrow$ *2 ms = - 1* $\Rightarrow$ *ms = - ½*

Logo, a reta s que passa por P e tem coeficiente angular ms = - ½ é :

y - y0 = m(x - x0)

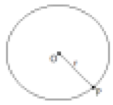
y - 1 = - ½ (x - 1) $\Rightarrow$ *x + 2y - 3 = 0*

Equação Reduzida da Circunferência

Caro aluno, nesta aula daremos ênfase ao estudo de circunferência, desse modo, vamos, em primeiro momento, fazer uma breve revisão de circunferência.

1 - DEFINIÇÃO:

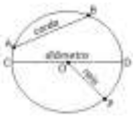
Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto dado. O ponto dado é denominado centro da circunferência e o segmento que une o centro da circunferência a um ponto qualquer da circunferência é denominado raio da circunferência, conforme a ilustração a seguir:



2 - ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA:

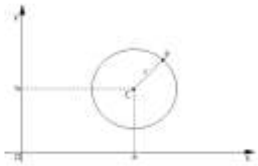
Em toda circunferência podemos identificar os seguinte elementos:

- **Corda** - segmento que une dois pontos distintos pertencentes à circunferência.
- **Raio** - segmento que une o centro a um ponto qualquer pertencente à circunferência.
- **Diâmetro** - é uma corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro é o dobro do comprimento do raio.



3 - EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA:

Como vimos anteriormente, definimos uma circunferência de centro C(a, b) e raio r ao conjunto de todos os pontos que distam r de C. Tomemos um ponto P(x, y) pertencente a circunferência, conforme a ilustração a seguir:



Como P(x, y) representa todos os pontos pertencentes a circunferência, logo a distância destes ao ponto C(a,b) é igual a r.
Assim, aplicando a fórmula da distância entre os pontos C(a, b) e P(x, y), temos:

d(C, P) = $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r}$

Elevando membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$$

Definida como **equação reduzida da circunferência**, onde:

- a e b são as coordenadas do centro C da circunferência;
- r é o raio da circunferência;
- x e y são as coordenadas do ponto qualquer P pertencente a circunferência.

4 - EQUAÇÃO NORMAL DA CIRCUNFERÊNCIA:

Vimos que a equação reduzida da circunferência de centro C(a, b) e raio r é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$$

Desenvolvendo os binômios, temos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

Assim,

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

Esta equação é denominada **equação normal da circunferência** de centro C(a, b) e raio r.

EXEMPLO 03:
Determine a equação normal da circunferência de centro C(3, 1) e raio 5.

Resolução:
A equação reduzida da circunferência é: (x - 3)2 + (y - 1)2 = 52.
Desenvolvendo os binômios, obtemos:
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$.
$(x - 3)(x - 3) + (y - 1)(y - 1) = 25$.
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 25$.
Assim, a equação normal dessa circunferência é: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y - 24 = 0$.

Atividades

1 - Determine o valor de a para que as retas x + ay - 3 = 0 e 2x - y + 5 = 0 sejam paralelas.

2 - Determine os valores de a e c, respectivamente, para que as retas r: 2x - y + 4 = 0 e s: ax - 2y = - c sejam coincidentes.

3 - As retas 2x + 3y = 1 e 6x - ky = 1 são perpendiculares. Determine o valor de k.

4 - Determine α e β para que as retas (r) α x - 2y + 6 = 0 e (s) β x + 4y - = 0 sejam perpendiculares.

5 - Determine a equação geral da reta paralela a (r) 5x + 7y + 1 = 0 e que passa pelo ponto P(6, - 5). (*DICA: Primeiro encontre o coeficiente angular da reta r.)*

6 - Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto P(3, 1) e é perpendicular a reta (r) 3x - 7y + 2 = 0.

7 - Dada a reta (r) y = 2x - 1, determine a equação geral da reta paralela a r que passa pelo ponto A(1, 4).

8 - Determine a equação geral da reta que é perpendicular a reta (r) y = 3x + 1 traçada pelo ponto B(4, 0).

9 - Determinar a equação reduzida da circunferência que tem o centro sobre a origem e raio igual a 7.

10 - Qual é a equação reduzida da circunferência em que as extremidades de um diâmetro são A(4, 0) e B(0, 4)?

11 - O ponto C(3, -2) é o centro de uma circunferência e seu raio mede 4. Escreva sua equação normal.

12 - A equação reduzida de uma circunferência é $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k^2 - 9$. Diga quais os valores reais possíveis para k.

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das habilidades relacionadas ao tema estudado.

A avaliação será escrita e individual (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver questões envolvendo polinômios.Geralmente os alunos apresentam dificuldades na interpretação de enunciados das questões e falta de interesse. Por isso, é extremamente importante mostrar em quais áreas da vida e/ou profissões o tema estudado é utilizado e mostrar que eles têm capacidade de aprender e não simplesmente “gravar” como se faz isso ou aquilo. Basta um pouquinho de boa vontade!

O meu objetivo ao trabalhar esse conteúdo com eles é mostrar que o homem ao construir sua história, ele está modificando e ampliando constantemente suas necessidades individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura.

A Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja, a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar, é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio na sociedade.

O professor deve fazer um acompanhamento contínuo no contexto escolar, sempre orientando e acompanhando os alunos, para que essa orientação e esse acompanhamento propiciem aos alunos uma melhor compreensão dos conhecimentos matemáticos expostos, onde o professor vai avaliar o seu aluno através de atividades referentes ao conteúdo estudado.

Questões para Avaliação.

1 – Dada a equação de reta (s): $2x - y + 1 = 0$, a equação de reta paralela a s pelo ponto $P(1,1)$ será:

a) $2x - y = 0$ b) $2x + y + 1 = 0$ c) $2x + y - 1 = 0$

d) $2x - y - 1 = 0$ e) $2x - y + 2 = 0$

2 - No plano cartesiano, os pontos A (1,2) *e* B (-2,-2) são extremidades de um diâmetro de uma circunferência; essa circunferência intercepta o eixo das abscissas em dois pontos. Um deles é:

a) (4,0) b) (7/2,0) c) (3,0) d) (5/2,0) e) (2,0)

3 – Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (3,5) e é paralela à reta de equação $8x - 2y + 1 = 0$.

4 – Verifique se as retas l_1 e l_2, de equações $10x + 3y - 5 = 0$ e $3x - 10y - 4 = 0$, respectivamente são paralelas.

5 – Dada a reta de equação $2x - y + 5 = 0$ e o ponto P (3,5), determine a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.

6 – Determine a equação da circunferência com centro no ponto C (4,7) e raio r = 2.

7 - Determine a equação da circunferência com centro no ponto C (2,3) e que passa pelo ponto P (- 1, 2).

8 – Determine as coordenadas do centro C e o raio r da circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

9 – Determine a forma geral da equação da circunferência com centro no ponto Q (- 1, 2) e raio r = 3.

10 – A equação de uma circunferência com centro em C (a, b) e raio r é $x^2 + y^2 - 8y + 19 = 0$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Geometria analítica – Curso de perfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre.

SILVA, Cláudio Xavier ; FILHO, Benigno Barreto. Matemática Aula por Aula. São Paulo: FTD, 2005.

GIOVANNI, José Ruy Jr.; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da Matemática. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI, Ruy; PARENTE; Eduardo. Aprendendo Matemática. São Paulo: FTD, 2009.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES Ayrton . São Paulo: FTD, 2006.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática aula por aula.São Paulo: FTD, 2003.

ATIVIDADES AUTORREGULADAS – Organizado CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 .