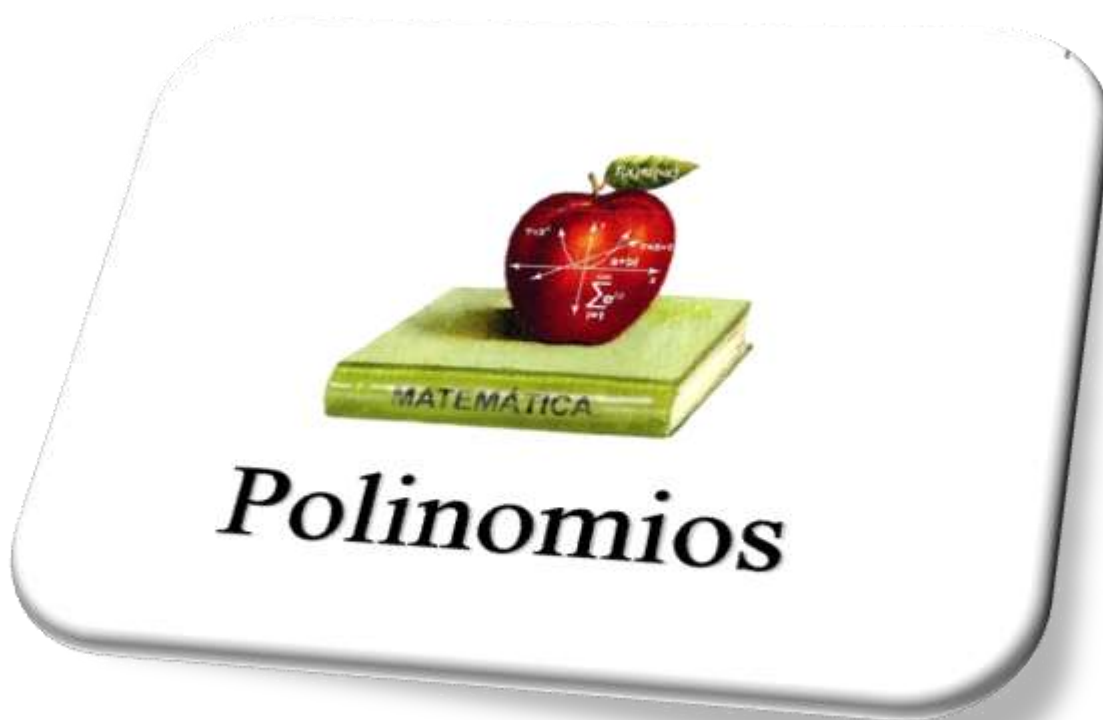


# ***Formação Continuada em Matemática***

***Fundação Cecierj Consórcio Cederj  
Matemática na Escola - 4º bimestre – 3º ano***

**Plano de Trabalho 1**

**Números Complexos**



**Tarefa 1**

**Cursista : Adriana Machado Perucci  
Tutor: Danubia de Araujo Machado  
Grupo 1**

# SUMÁRIO

- Introdução
- Objetivos
- Atividades e desenvolvimento
- Avaliação
- Referência

## Introdução

*“Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis.  
René Descartes”*

Apresentamos a presente atividade como uma alternativa para viabilizar, em sala de aula, formas concretas de abordar conteúdos matemáticos a serem trabalhados no Ensino Médio de escolas de modo a incorporar ao processo de ensino-aprendizagem da matemática orientações teóricas advindas do campo da Educação e da Educação Matemática, com ênfase na utilização de recursos tecnológicos.

Uma das maiores dificuldades de nosso trabalho diário com professores é despertar nos estudantes interesse e motivação em relação aos conteúdos matemáticos a que são apresentados no dia-a-dia das aulas de matemática. A despeito de todo o esforço e dedicação com que vimos desenvolvendo nosso fazer docente, podemos constatar que, muitas vezes, os estudantes participam das aulas de matemática de forma desinteressada e alienada. Na tentativa de cumprir as exigências impostas pelas práticas pedagógicas homogeneizantes, grande parte dos estudantes, limita-se a decorar regras, fórmulas e “macetes” e a desenvolver algoritmos de forma mecanizada e rotinizada.

“É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.” PCN e o recurso da resolução de problemas têm demonstrado que o aluno aprende com mais motivação.

Este Plano de Trabalho veio trazer uma metodologia diferente daquela que esta acostumado, apenas utilizando regras, ou indo por este ou aquele caminho. A intenção é construir conceitos em conjunto, para que o aprendizado aconteça.

## **Objetivos**

### **Competências e habilidades do bimestre**

- Identificar e determinar o grau de um polinômio.
- Calcular o valor numérico de um polinômio.
- Efetuar operações com polinômios.
- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios .
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da Decomposição.
- Representar graficamente uma função polinomial.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

# Atividades

---

## Habilidade relacionada:

- Identificar e determinar o grau de um polinômio.
- Calcular o valor numérico de um polinômio.
- Efetuar operações com polinômios.
- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios .
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da Decomposição.
- Representar graficamente uma função polinomial.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

## Descritores

**D26** – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau

**H57** - Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.

C1 - Resolver problemas que recaiam na resolução de uma equação do 2º grau da forma  $ax^2+bx+c=0$ , com  $a \neq 0$ .

C2 - Resolver problemas que recaiam na resolução de uma equação do 2º grau da forma  $ax^2+bx=0$ , com  $a \neq 0$ .

C3 - Resolver problemas que recaiam na resolução de uma equação do 2º grau da forma  $ax^2+c=0$ , com  $a \neq 0$ .

C4 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do yv como o valor máximo em uma função do 2º grau.

C5 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do yv, como o valor mínimo em uma função do 2º grau.

C6 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do xv, que fornece

o valor máximo de uma função do 2º grau.

C7 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do xv, que fornece o valor mínimo de uma função do 2º grau.

## Tempo de duração:

As atividades serão realizadas em 9 tempos de aula e as atividades serão subdivididas em três etapas.

## Organização da turma:

As atividades serão realizadas em grupos de 4 alunos.

## Objetivos:

Apresentar a alguns algoritmos de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios.

## Pré-requisitos:

Os algoritmos dessas operações com números inteiros.

## Material necessário:

Folha de atividade, lápis e borracha.

## Desenvolvimento da 1ª etapa

1. Você lembra o motivo de ao somarmos 134 com 256 dispormos os números um abaixo do outro respeitando as classes de unidades? Tente descrever tal motivo em uma linha.

---

2. É possível aproveitar a ideia do algoritmo da soma e da subtração de números naturais para realizar somas e subtrações de polinômios. Veja o exemplo inacabado a seguir abaixo e complete o que falta sob a linha pontilhada.

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 \quad \quad + 2x \\ + \quad \quad 2x^3 - x^2 \quad \quad + 1 \\ \hline \text{.....} - x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

3. Considere o que você observou no item anterior e calcule utilizando o mesmo algoritmo, o valor de:

a)  $p(x) + q(x)$ , sabendo que  $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$  e  $q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3$

b)  $p(x) - q(x)$ , sabendo que  $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$  e  $q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3$ .

4. Você se recorda das propriedades comutativas e associativas válidas na soma de números naturais? Elas também são válidas para as operações com polinômios! Utilize-as para refazer os cálculos indicados no item 3, sem o algoritmo do item 2.

COMUTATIVIDADE	$2 + 5 = 5 + 2$
ASSOCIATIVIDADE	$3 + (7 + 4) = (3 + 7) + 4$

5. Para realizar a subtração indicada no item (b) da questão 3 não foi possível operar exatamente como fazemos no algoritmo de subtração de números naturais. Descreva com suas palavras o que mudou.


---

6. Observe o cálculo disposto na primeira coluna (à esquerda) abaixo. Inspire-se nele para sugerir um algoritmo para a multiplicação de polinômios como o que aparece incompleto no lado direito da tabela abaixo.

125	$-x^3 + 2x - 1$
<u>x12</u>	<u>x    <math>x^2 - 3x</math></u>
250	$3x^4 \quad -6x^2 +$
<u>125</u>	<u><math>-x^5</math></u>
1500	

Observe que os algoritmos desse item são “PARECIDOS”, mas há diferenças importantes. No que utilizamos com números, a multiplicação deve seguir a ordem: unidades, dezenas, centenas e etc. Já no outro, isso não é necessário. Além disso, há outras diferenças. Verifique você mesmo!

7. O cálculo de  $p(x) \cdot q(x)$  também pode ser realizado utilizando a distributividade, como assinalado na ilustração abaixo. Utilize esta propriedade para realizar  $p(x) \cdot q(x) = x^2 - 3x - x^3 + 2x - 1$  e compare com o resultado anterior.

$$x^3 - 3x \quad -x^3 + 2x - 1$$


8. Indique algoritmo de sua preferência para a realização da multiplicação de dois polinômios. Pense no que pode acontecer em outros casos para certificar o seu gosto.

9. Observe agora o algoritmo de divisão de números naturais abaixo e tente completar o algoritmo sugerido abaixo.

	$  \begin{array}{r l}  x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 3x - 2 & x^2 - 1 \\  -x^4 & +1x^2 \\  \hline  -2x^3 + x^2 + 3x & \\  +2x^3 & +2x \\  \hline  &   \end{array}  $
--	--

10. Agora fique atento às comparações! Observe o que você fez no item anterior com a ajuda de seu professor e complete a tabela abaixo.

Com números naturais	Com polinômios
O divisor é menor que o dividendo.	O grau...
A multiplicação do quociente pelo divisor somada ao resto é igual ao dividendo.	A multiplicação...
O resto é sempre menor que o divisor.	O grau...
A divisão termina quando o resto é menor que o divisor.	A divisão termina quando o grau do resto é...

11. Agora, considere que ,  $p(x) = 2x + 1$ ,  $t(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ,  $u(x) = x^4 - 5x + 2$  e  $v(x) = -x^3 - x - 1$  . E, quando possível, calcule as operações indicadas abaixo, indicando o resultado, quociente e resto, quando foro caso. Se a operação não for possível justifique!

- $p(x) - u(x)$
- $v(x) \cdot u(x)$
- $p(x) + u(x) - v(x)$
- $p(x) : v(x)$
- $u(x) : t(x)$
- $v(x) \cdot p(x) - v(x) \cdot u(x)$
- $v(x) \cdot u(x) + p(x)$
- $u(x) + p(x)$
- $[p(x)]^2 - [u(x)]^2$
- $[v(x)]^2$

## Avaliação

Nesta primeira etapa os alunos serão observados se resolvem sem maiores dificuldades os cálculos com os polinômios, identificando-os corretamente, bem como as potências das incógnitas e seguindo corretamente suas regras.

## Desenvolvimento da 2ª etapa

**Duração prevista:** 150 minutos

**Objetivos:** Utilizar o desenvolvimento, simplificação e expansão de polinômios para resolução de problemas matemáticos.

**Pré-requisitos:** Propriedades operatórias com polinômios.

**Material necessário:** Folha de atividade, lápis e borracha.

**Organização da classe:** Pequenos grupos de dois ou três alunos cada.

### Desenvolvimento

1. Realize mentalmente a seguinte brincadeira. Nela, a exceção da primeira instrução, cada uma das outras deve ser executada com o resultado obtido na instrução imediatamente anterior.



- ① Pense em um número;
- ② Multiplique-o por 2
- ③ Some 4
- ④ Multiplique-o por 3
- ⑤ Subtraia 2
- ⑥ Divida por 2
- ⑦ Subtraia 5
- ⑧ Divida-o por 3

Se você fez todas as operações sem errar nenhum cálculo, o resultado da última etapa é . . . o número que você pensou inicialmente!

Sabe como seu professor inventou esta brincadeira? Escrevendo as operações para uma variável  $x$  que representasse o número que você imaginou na primeira instrução. Veja:

- ① Pense em um número  $\rightarrow x$
- ② Multiplique-o por 2  $\rightarrow 2x$
- ③ Some 4  $\rightarrow 2x + 4$
- ④ Multiplique-o por 3  $\rightarrow 3(2x + 4)$
- ⑤ Subtraia 2  $\rightarrow 3(2x + 4) - 2$
- ⑥ Divida por 2  $\rightarrow \frac{3(2x + 4) - 2}{2}$
- ⑦ Subtraia 5  $\rightarrow \frac{3(2x + 4) - 2}{2} - 5$
- ⑧ Divida-o por 3  $\rightarrow \frac{\frac{3(2x + 4) - 2}{2} - 5}{3}$

$$\frac{\left(\frac{3 \cdot 2x + 4 - 2}{2}\right) - 5}{3} = \frac{\left(\frac{6x + 12 - 2}{2}\right) - 5}{3} = \frac{\frac{6x + 10 - 10}{2}}{3} = \frac{3x}{3} = x.$$

Mas,

Observe que as instruções também poderiam ser escritas como o seguinte

polinômio:  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} (3 \cdot 2x + 4 - 2 - 5) \right)$ . Simplificando-o obtemos  $x$ .

Agora veja se você aprendeu realmente o que está por trás da brincadeira fazendo os itens 2, 3 e 4 a seguir.

2. Desvende o resultado da brincadeira abaixo.

- ① Pense em um número;
- ② Some o seu dobro
- ③ Subtraia 3
- ④ Divida por três
- ⑤ Some 1
- ⑥ Subtraia o número que você pensou inicialmente

A resposta é sempre o número \_\_\_\_\_

3. Um professor pediu para seu aluno realizar as seguintes instruções:

- ① Pense em um número;
- ② Multiplique por 4
- ③ Some sua metade
- ④ Divida por 3

Depois disso o professor pergunta ao aluno: Que número apareceu como resposta? \_\_\_\_\_

Depois de o aluno lhe revelar, o professor diz ao aluno o número que ele escolheu. Explique como ele faz isso!

\_\_\_\_\_

4. Invente uma dessas brincadeirinhas cujo resultado seja o dobro do número que a pessoa escolheu inicialmente.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

As brincadeiras que vimos até aqui nos dizem que se pudermos escrever sob a forma de polinômio uma sequência de operações podemos entender o resultado final desta sequência de operações. E isto, não para aí!

Vamos brincar de desvendar curiosidades?

5. Considere a afirmação abaixo:

***Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos quaisquer o resultado será sempre um número quadrado perfeito!***

Agora experimente verificar se ela é verdadeira fazendo os cálculos a seguir:

a)  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 =$

b)  $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1} =$

c)  $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1 =$

d)  $\sqrt{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1} =$

e)  $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1 =$

f)  $\sqrt{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1} =$

6. Agora, para cada caso do item anterior faça o seguinte:

- ① Multiplique o primeiro pelo último dos quatro números consecutivos;
- ② Some 1

### 3 Calcule o seu quadrado

A resposta encontrada é a mesma que a do produto dos quatro números somado ao número 1? \_\_\_\_\_

7. Vamos explicar:

1 Considere  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  e  $n+3$  os quatro números consecutivos;

2 No papel, multiplique-os e some 1

3 Registre o polinômio encontrado

4 No papel, desenvolva  $[n(n+3) + 1]^2$

5 Registre o polinômio encontrado

a) O que acontece com os dois polinômios encontrados? \_\_\_\_\_

b) O que isso significa?

\_\_\_\_\_

c) A afirmação de que se somarmos 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos quaisquer o resultado será sempre um número quadrado perfeito é verdadeira?

\_\_\_\_\_

d) Compartilhe com seus colegas de classe.

## Avaliação

Nesta etapa os alunos deverão realizar a simplificação e expansão de polinômios para resolução de problemas matemáticos, identificando adequadamente as regras informadas nas situações problemas.

## Desenvolvimento da 3ª etapa

**Duração prevista:** 100 minutos

**Área de conhecimento:** Matemática

**Assunto:** Fórmulas para solução de equações polinomiais

**Objetivos:** Despertar o interesse pela visão generalista da construção de resultados em matemática.

**Pré-requisitos:** Fórmulas de solução das equações polinomiais do 1º e 2º grau.

**Material necessário:** folha de atividade, lápis e borracha.

**Organização as classe:** disponha-os em grupos de 3 a 4 alunos.

### Desenvolvimento

1. Escrevam em grupo, com a linguagem de sua escolha, como fariam para publicar ao mundo a solução para todas as equações que se assemelham a cada uma das equações a seguir.

- a)  $3x + 6 = 10$   
 b)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$   
 c)  $x^3 - 2x^2 + x = 0$

Use as instruções e informações que desejarem. Pensem em como essas suas instruções serão recebidas por aqueles que se interessarem na solução de alguma equação das três famílias de equações.

---

---

---

---

---

## Avaliação

A intenção desta atividade é despertar o interesse pela visão generalista da construção de resultados em matemática, onde os alunos construirão uma informação e instrução adequada com conhecimentos prévios sobre equações.

## Desenvolvimento da 4ª etapa

**Duração prevista:** 100 minutos

**Área de conhecimento:** Matemática

**Assunto:** Teorema das Raízes Conjugas e o Algoritmo de Briot-Ruffini na investigação de raízes de um polinômio.

**Objetivos:** Apresenta o Teorema das raízes Conjugadas e utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini como ferramenta na busca por raízes de um polinômio.

**Pré-requisitos:** Números Complexos, Fórmula de Determinação das raízes de uma equação do 2º grau, raiz de um polinômio.

**Material necessário:** folha de atividade, lápis e borracha.

**Organização da turma:** disponha-os em grupos com quantidades que lhe forem adequadas para o estímulo de um com os outros.

### Desenvolvimento

#### 1ª PARTE – Raízes Conjugadas

$$1+i^2=2, 1+i^3=1-i, 1-i^2=-2, 1-i^3=-1-i.$$

1. Sabendo que  $1+i$  e  $1-i$  são números tais que  
 Calcule  $p(1+i)$  e  $p(1-i)$  em cada caso abaixo:

a)  $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x$

b)  $p(x) = 2x^2 - 7x - 1$

c)  $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$

2. Lembrando que  $1+i$  e  $1-i$  são números conjugados complexos, o que podemos dizer sobre  $p(1+i)$  e  $p(1-i)$  em todos os três casos anteriores?

3. O que você observou e confirmou com seu professor no item anterior vale para quaisquer dois números complexos conjugados. Ou seja, para todos aqueles números na forma  $a+bi$ , com  $b \neq 0$ . Sabendo disso complete a frase abaixo.

Se  $p(a+bi) = 0 = \overline{0} =$  \_\_\_\_\_.

4. Explique com suas palavras a afirmação da frase que você completou com a ajuda de seu professor no item anterior.

---

---

5. Se  $1+i$  e  $2-3i$  são raízes de um polinômio de grau 4 quais são todas as suas raízes? Qual a expressão desse polinômio?

---

---

6. Se  $-i$  é raiz do polinômio  $p(x) = x^3 + x$ , quais são todas as raízes desse polinômio?

---

---

## 2ª PARTE – O algoritmo de Briot-Ruffini em Ação

1. Quando um número  $r$  é raiz de um polinômio, então  $(x-r)$  é um fator deste polinômio. Ou seja, a divisão desse polinômio por  $(x-r)$  deixa resto zero. Utilize essa informação para responder o que pedimos a seguir.

a) Use o algoritmo de Briot-Ruffini para verificar se  $2i$  é raiz polinômio  $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ .

b)  $-2i$  é raiz de  $p(x)$ ? Por quê?

---

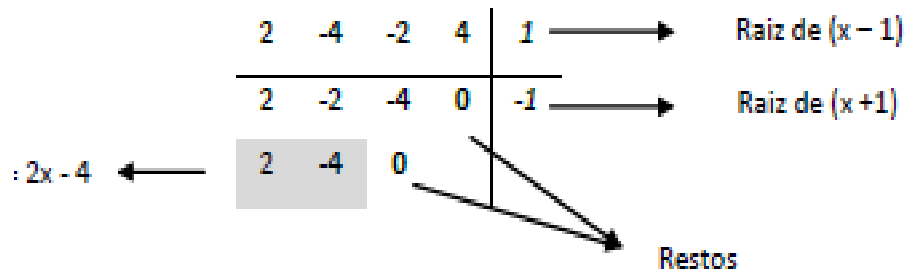
---

c) Qual é o polinômio quociente de  $\frac{p(x)}{(x-2i)(x+2i)}$  ?

d) Calcule as raízes de  $q(x)$ .

e) Quais são todas as raízes de  $p(x)$ ?

Veja que podemos dividir o polinômio  $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8$  por  $x-1$  e  $x+1$  sucessivamente de forma direta pelo algoritmo de Briot-Ruffini:



Quociente =

Desta forma obtemos que:

$$= 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x+1)(2x-4) + 0 = 2(x-1)(x+1)(x-2)$$

$q(x)$

$p(x) =$

Portanto, as raízes de  $p(x)$  são os números 1, -1 e 2.

2. Utilize o mesmo caminho descrito acima para determinar todas as raízes de  $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ , sabendo que  $(2-i)$  é raiz de  $p(x)$ .

3. Utilize o mesmo caminho descrito acima para determinar todas as raízes de  $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 63x + 18$ , sabendo que 2 e  $3i$  são raízes de  $p(x)$ .

## Avaliação

Será observado se os alunos utilizam adequadamente o Teorema das raízes Conjugadas e o algoritmo de Briot-Ruffini como ferramenta na busca por raízes de um polinômio na construção das tarefas desta etapa.

## Referências

**CURRICULO MINIMO 2012** - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – Disponível em: < [file:///C:/Users/PC/Downloads/Curriculo\\_Minimo.pdf](file:///C:/Users/PC/Downloads/Curriculo_Minimo.pdf) >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**MATRIZ DO SAERJINHO 2012** - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – Disponível em:< [file:///C:/Users/PC/Downloads/Matriz\\_do\\_Saerjinho.pdf](file:///C:/Users/PC/Downloads/Matriz_do_Saerjinho.pdf) >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**ROTEIRO DE AÇÃO 2 2014 ALGORITMO POR ANALOGIAS** - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em:< <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=28080> >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**ROTEIRO DE AÇÃO 3 2014 RESOLVENDO PROBLEMAS DE ARITMÉTICA COM POLINÔMIOS** - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=28081> >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**ROTEIRO DE AÇÃO 4 2014 FÓRMULAS PRA QUE TE QUERO-** Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=28082> >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**ROTEIRO DE AÇÃO 6 2014 INVESTIGANDO RAÍZES DE UM POLINÔMIO** - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=28084> >. Acesso em 18 de outubro de 2014.

**MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.** Disponível em < [portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3\\_matematica.pdf](portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3_matematica.pdf) > Acesso em 19/10/2014.