

Mecânica





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Mecânica

Volume 1 - Módulo 1
2ª edição

Joaquim Lopes Neto



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação



Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Joaquim Lopes Neto

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Luciana Messeder

Janeth Pinto

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Débora Barreiros

AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Aroaldo Veneu

REDATOR FINAL

Aroaldo Veneu

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Elaine Bayma

Marcus Knupp

Daniela de Souza

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Sanny Reis

ILUSTRAÇÃO

Eduardo Bordoni

Jefferson Caçador

CAPA

Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz

Patricia Seabra

Copyright © 2006, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

L864p

Lopes Neto, Joaquim.

Mecânica. v. 1 / Joaquim Lopes Neto. – 2ª ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

298p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-464-6

1. Movimento. 2. Oscilação harmônica. 3. Energia potencial. 3. Método Lagrangiano. 4. Colisões. I. Título.

CDD: 530

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieir Alves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 1 – Movimento em uma dimensão	7
Aula 2 – Movimento em uma dimensão e forças conservativas	37
Aula 3 – O oscilador harmônico simples	59
Aula 4 – Oscilações acopladas	85
Aula 5 – Energia potencial em 3-D: o potencial gravitacional	111
Aula 6 – O método Lagrangiano e o Princípio de Mínima Ação	141
Aula 7 – O método Lagrangiano (II): simetrias e leis de conservação, equações de Hamilton e Teorema de Liouville, forças de vínculo	173
Aula 8 – O movimento sob a ação de uma força central	203
Aula 9 – Movimento em um referencial não inercial	235
Aula 10 – Colisões	263

Movimento em uma dimensão

AULA 1

Metas da aula

Discutir a equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula em uma dimensão sob a ação de uma força geral, o método de solução numérica, e o papel das condições iniciais; apresentar métodos simples de solução desta equação quando a força depende somente do tempo ou somente da velocidade; mostrar a utilidade das expansões em séries nas aproximações e análise de resultados.

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- resolver a equação do movimento para forças do tipo $F(t)$ e $F(v)$;
- usar a série de Taylor para obter soluções aproximadas simples a partir das soluções analíticas exatas.

POR QUE MAIS MECÂNICA?

Vamos dar início ao nosso curso de Mecânica Clássica com algumas observações gerais sobre seus objetivos. Você vai ser professor de Física para alunos do Ensino Médio e nas disciplinas Física I e Física II já estudou, provavelmente, mais do que vai poder ensinar de Mecânica para seus alunos. Então, qual a relevância de um aprofundamento maior ainda nos seus estudos? Primeiro, porque você vai ser um professor e não um mero repetidor e não há como ensinar sem um conhecimento sólido dos fundamentos do conteúdo do que está sendo ensinado. Você deverá ter uma noção clara das aproximações envolvidas nas aplicações que apresentar aos seus alunos, assim como ser capaz de analisar situações novas que certamente surgirão. Depois, é importante saber situar a Mecânica Clássica no contexto da Física Moderna e conhecer os limites de validade dos seus resultados. Com o seu maior e melhor conhecimento, acima de tudo você também será mais capaz de motivar seus futuros alunos.

Para concretizar esses objetivos, esperamos treiná-lo neste curso a pensar sobre fenômenos físicos em termos matemáticos. Isso não quer dizer que você deva abandonar uma abordagem qualitativa, guiada por sua intuição do fenômeno mecânico, mas que você desenvolva uma igual intuição para a formulação matemática de problemas físicos e para a interpretação física de soluções matemáticas.

O PROBLEMA GERAL DO MOVIMENTO EM UMA DIMENSÃO

Começaremos estudando o movimento de uma partícula de massa m ao longo de uma linha reta, que vamos tomar como sendo o eixo x . A partícula move-se sob a ação de uma força F dirigida ao longo do eixo x . O movimento da partícula, como você já aprendeu, é dado pela segunda lei de Newton,

$$F = ma \quad (1.1)$$

onde a é a aceleração

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (1.2)$$

A força F em geral depende do que a partícula está fazendo. Para saber o que a partícula está fazendo, é preciso conhecer sua posição e sua velocidade $x(t) = dx(t)/dt$ num dado instante de tempo t . Logo, em geral, a força F é alguma função de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e t , ou seja, $F(x, \dot{x}, t)$. Então, a segunda lei de Newton assume a seguinte forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t) \quad (1.3)$$

Exercício 1.1. Dê exemplos de forças: (a) constantes; (b) que dependem da posição; (c) que dependem da velocidade; (d) que dependem do tempo.

A Equação (1.3) é uma *equação diferencial de segunda ordem* porque ela envolve uma derivada segunda e nenhuma outra derivada de ordem superior. Uma equação diferencial de segunda ordem para x tem, em geral, um número infinito de soluções que podem ser rotuladas pelos valores de x e \dot{x} num dado tempo, digamos, no instante em que começamos a observar o movimento. Estas condições que especificam a solução são chamadas *condições iniciais*. Uma vez dadas as condições iniciais, ou seja, a posição inicial e a velocidade inicial, a solução da equação diferencial estará completamente especificada.

Exemplo 1.1. Considere o problema mais simples da mecânica que é o de encontrar o movimento de uma partícula movendo-se em uma linha reta sob a ação de uma força constante. Neste caso, $F(x, \dot{x}, t) = F_0$ e a Equação (1.3) fica

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} = \text{const} \quad (1.4)$$

Mas $d^2 x/dt^2 = d\dot{x}/dt = dv/dt$ e assim,

$$dv = \frac{F_0}{m} dt \quad (1.5)$$

Integrando

$$\int_{v_0}^v dv' = \frac{F_0}{m} \int_{t_0}^t dt' \quad (1.6)$$

ou

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F_0}{m}(t - t_0) \quad (1.7)$$

Integrando novamente

$$\int_{x_0}^x dx' = \int_{t_0}^t dt' (v_0 + \frac{F_0}{m}(t' - t_0)) \quad (1.8)$$

ou

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{F_0}{2m}(t - t_0)^2 \quad (1.9)$$

A solução geral da Equação (1.4) é, portanto,

$$x(t) = \frac{F_0}{2m}(t - t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \quad (1.10)$$

Dados os valores de $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$ no instante inicial t_0 , a solução $x(t)$ estará completamente especificada e será única.

RESOLVENDO A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NUMERICAMENTE

Se você tiver uma força complicada, dependendo de x , \dot{x} , e t , você não poderá, na maioria das vezes, encontrar uma solução em termos de funções conhecidas. No entanto, você sempre poderá resolver a Equação (1.3) numericamente. O modo de resolver seria assim: se você conhece a posição $x(t_0)$ e a velocidade $\dot{x}(t_0)$ no instante inicial t_0 , você pode usar esta informação para determinar a posição da partícula em um tempo muito curto $t_0 + \Delta t$ posterior (ou anterior) através da expressão

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t \quad (1.11)$$

Esta expressão vem da definição de derivada e é tanto mais acurada quanto menor for Δt . Nós queremos iterar este procedimento e achar $x(t_0 + n\Delta t)$, o que significaria achar $x(t)$ (pelo menos aproximadamente) em toda uma seqüência de tempos futuros (ou passados). Na etapa seguinte à equação (1.11), isto é, para $n = 2$, teremos:

$$x(t_0 + 2\Delta t) = x(t_0 + \Delta t) + \dot{x}(t_0 + \Delta t)\Delta t \quad (1.12)$$

Note que agora precisamos de $\dot{x}(t_0 + \Delta t)$ que não é dado pela condição inicial. Aqui entra em cena a segunda lei de Newton. Como

$$\dot{x}(t_0 + \Delta t) = \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)\Delta t, \quad (1.13)$$

para prosseguir precisamos saber qual o valor de $\ddot{x}(t_0)$. Mas a segunda lei de Newton diz que $\ddot{x}(t_0)$ é dado dividindo-se a força no instante t_0 pela massa da partícula

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{m}F(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0) \quad (1.14)$$

Pondo este valor da aceleração na Equação (1.13), obtemos a velocidade no instante $t_0 + \Delta t$ que, por sua vez, substituído na Equação (1.12), permite encontrar $x(t_0 + 2\Delta t)$. Note que a aceleração necessária em um passo é sempre dada em termos dos valores de x , \dot{x} já calculados no passo anterior. Na próxima etapa, temos de calcular $x(t_0 + 3\Delta t)$, e assim por diante.

Exercício 1.2. Escreva os passos necessários para calcular x , \dot{x} em $t_0 + 3\Delta t$.

O método numérico deixa muito claro o papel da segunda lei de Newton e descreve a estrutura da solução do problema do movimento da partícula em uma forma extremamente simples. Quando precisamos do valor da aceleração em um dado instante, a segunda lei nos diz para tomar o valor da força naquele instante e dividir pela massa. Nada mais simples. Por outro lado, a Equação (1.11), que apresentamos como consequência da definição de derivada, também pode ser vista como obtida a partir da definição da velocidade média

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (1.15)$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ as duas coisas coincidem. O mesmo comentário vale para a Equação (1.13): vem da definição de aceleração média. Você já deve estar pensando: não há nada neste método numérico que não possa ser ensinado a um aluno do ensino médio. Até certo ponto isto é verdade. Você verá este tema abordado nas aulas de Informática para o

Ensino do Professor C.E. M. de Aguiar. Veja também a próxima aula, na qual você terá como exercício resolver numericamente o problema do oscilador harmônico unidimensional.

Uma outra coisa interessante do método numérico diz respeito às condições iniciais e à unicidade da solução da equação diferencial. Observando as Equações (1.11), (1.13) e (1.14) vemos que duas condições iniciais bastam para especificar como a partícula se move, ou seja, para fixar a solução da equação diferencial. Isto porque a equação que descreve o movimento é uma equação diferencial de segunda ordem. Para uma equação diferencial de primeira ordem é evidente que precisaríamos de somente uma condição inicial. Uma equação diferencial de terceira ordem iria requerer três condições iniciais: $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, $\ddot{x}(t_0)$. A derivada terceira seria dada pela equação diferencial. E assim por diante. A nossa partícula, por sua vez, está se movendo somente em uma dimensão. Se o movimento fosse em três dimensões, teríamos uma equação do movimento para cada dimensão e seriam necessárias seis condições iniciais.

O número de graus de liberdade de um sistema é igual ao número de modos independentes no qual o sistema pode se mover. Assim, precisamos de duas condições iniciais por grau de liberdade para dizer como um sistema se move.

FORÇA APLICADA DEPENDENTE DO TEMPO

Para começar a desenvolver nossa intuição na solução de problemas mais complicados, é interessante resolver problemas que possam ser tratados por métodos simples e que tenham solução analítica.

O exemplo mais simples de uma lei de força para a qual a Equação (1.3) pode ser resolvida formalmente por integração é uma força que depende somente de t , $F(t)$. Como $a(t) = dv(t)/dt = d^2x/dt^2$, escrevemos a Equação (1.3) como

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(t) \quad (1.16)$$

Integrando ambos os lados da Equação (1.16), obtemos

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t') + v(t_0) \quad (1.17)$$

onde usamos a condição inicial $\dot{x}(t_0) = v(t)$. Como $v(t) = dx(t)/dt$, repetindo o procedimento, temos para $x(t)$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dt' v(t') \quad (1.18)$$

Então, substituindo a Equação (1.17) na (1.18),

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left(v(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') \right) \quad (1.19)$$

ou

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') \quad (1.20)$$

Esta é a solução procurada, $x(t)$, em termos de duas integrais que podem ser calculadas quando a força $F(t)$ é dada. Uma integral definida pode sempre ser calculada. Se uma fórmula explícita não puder ser encontrada, então ela pode ser computada por métodos numéricos com a precisão que for desejada. Os termos na solução (1.20) são fáceis de entender. O primeiro é onde a partícula começou, a posição inicial. O segundo termo descreve um movimento com velocidade constante $v(t_0)$, que é o que a partícula teria feito se não houvesse uma força atuando sobre ela. E o último termo é o efeito da força.

Exercício 1.3. Faça $F(t) = F_0$ na solução (1.20) e recupere a Equação (1.10).

Exemplo 1.2. Como uma aplicação menos trivial da Equação (1.20), considere uma força do tipo

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (1.21)$$

Esta poderia ser a força sobre uma partícula livre carregada quando submetida a um campo elétrico oscilante ao longo da direção x , de frequência angular ω . A primeira integral na (1.20) dá, tomando o instante inicial como sendo igual a zero,

$$\frac{F_0}{m} \int_0^{t'} dt'' \cos(\omega t'' + \theta) = \frac{F_0}{m\omega} [\sin(\omega t' + \theta) - \sin\theta] \quad (1.22)$$

Fazendo a segunda integral obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F(t'') &= \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t dt' [\sin(\omega t' + \theta) - \sin\theta] \\ &= \frac{F_0 \cos\theta}{m\omega^2} - \frac{F_0 \sin\theta}{m\omega} t - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (1.23)$$

O resultado final para $x(t)$, supondo, por simplicidade, que a partícula está inicialmente em repouso em $x = 0$, é

$$x(t) = \frac{F_0 \cos\theta}{m\omega^2} - \frac{F_0 \sin\theta}{m\omega} t - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta) \quad (1.24)$$

Deixamos para você, como exercício, explicar a origem do termo constante e do termo linear em t na Equação (1.24) em termos da fase da força no instante inicial.

EXEMPLOS DE FORÇAS DEPENDENTES DE VELOCIDADE

Considere uma força dependente da velocidade, $F(v)$, aplicada a uma partícula que se move em uma dimensão. A segunda lei de Newton, $F = ma$, toma a forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(v) \quad (1.25)$$

Usando $v = dx/dt$, podemos reescrevê-la

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (1.26)$$

Para integrar esta equação, é conveniente expressá-la como

$$dt = m \frac{dv}{F(v)} \quad (1.27)$$

Agora integramos os dois lados

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = m \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} \quad (1.28)$$

onde, como de costume, colocamos uma linha nas variáveis do integrando para distingui-las dos limites de integração.

A Equação (1.28) determina implicitamente $v(t)$ em termos de $(t - t_0)$ e da condição inicial $v(t_0)$. Uma vez determinado, podemos integrar

para obter $x(t)$ usando a outra condição inicial $x(t_0)$. Vejamos como isso funciona em dois casos envolvendo uma força dissipativa dependente da velocidade, a força de arrasto: (a) $F = -\beta v$, (b) $F = -m\gamma v^2$.

Antes, diremos o que é uma força de arrasto. Se você é apaixonado por carros esportivos provavelmente já leu ou ouviu citarem coeficientes de arrasto para realçar as qualidades aerodinâmicas de um carro. Então o que significa isso?

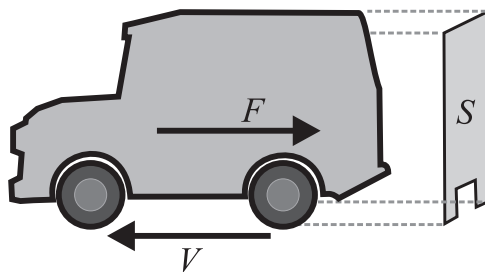


Figura 1.1: Van de seção reta S movendo-se através do ar com velocidade \vec{v} . \vec{F} é a força de arrasto.

A **Figura 1.1** mostra uma van (que tem uma forma nada aerodinâmica mas simplifica nossos argumentos) movendo-se com velocidade v . A van está sujeita a uma força de arrasto de intensidade dada por

$$F = \frac{1}{2} C_A \rho S v^2 \quad (1.29)$$

onde S é a área da seção reta da van, C_A é o coeficiente (adimensional) de arrasto e ρ é a densidade do ar. A força (1.29) tem uma interpretação simples. A quantidade

$$\Delta p = \rho S v^2 \Delta t \quad (1.30)$$

é o momento de um cilindro de ar de seção reta S movendo-se com velocidade v e de comprimento $v\Delta t$. Se supomos que este momento é completamente transferido do ar para o carro no tempo Δt , nós obtemos a força $f = \Delta p / \Delta t = \rho S v^2$. A presença na Equação (1.29) do fator extra $C_A/2 < 1$ sugere que somente uma fração desse momento é transferida.

Pode-se mostrar que, para um escoamento incompressível, o coeficiente de arrasto é uma função de um parâmetro adimensional chamado número de Reynolds, Re ,

$$C_A = C_A(Re) \quad (1.31)$$

O número de Reynolds é definido por

$$Re = \frac{\rho L v}{\eta} \quad (1.32)$$

onde L é um comprimento característico, digamos, $S^{1/2}$, e η é o coeficiente de viscosidade do fluido. Você vai ter que esperar até a Aula 12 para saber mais sobre o número de Reynolds.

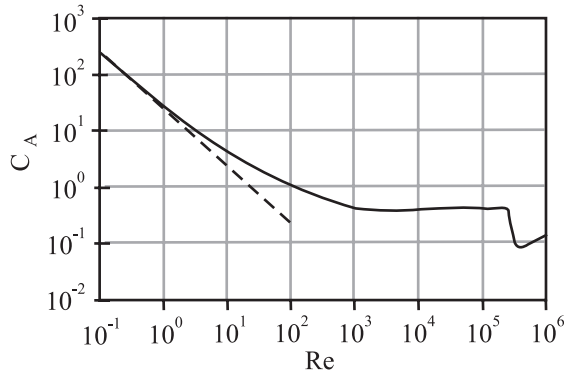


Figura 1.2: Coeficiente de arrasto C_A em função do número de Reynolds Re . A linha cheia é o resultado de medidas realizadas em túneis de vento. A linha tracejada corresponde à fórmula de Stokes (força de arrasto proporcional à velocidade).

A **Figura 1.2** mostra um gráfico típico de medidas precisas do coeficiente de arrasto em função de Re . Na região onde Re é pequeno (velocidades baixas em um gás denso ou líquido), $C_A(Re) \propto Re^{-1}$ e a força de arrasto fica então proporcional à velocidade. Para valores altos do número de Reynolds (velocidades altas), o coeficiente de arrasto é praticamente constante e a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade. Temos, portanto, dois regimes de forças para o objeto movendo-se no fluido, $F = -\beta v = -m\Gamma v$ e $F = -m\gamma v^2$, onde o sinal menos é utilizado para indicar que a força tem sentido oposto ao da velocidade.

Exercício 1.4. Quais são as dimensões dos parâmetros β , Γ e γ ?

Agora que explicamos a origem das forças dissipativas dependentes de velocidade, as forças de arrasto, passemos à solução da equação do movimento em cada caso.

(a) Caso em que $F = -\beta v = -m\Gamma v$

Substituindo esta força na Equação (1.28),

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = - \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{\Gamma v'} \quad (1.33)$$

Efetuada a integral, obtemos:

$$\Gamma(t - t_0) = -\ln v(t) + \ln v(t_0) = -\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \quad (1.34)$$

ou

$$v(t) = v(t_0) e^{-\Gamma(t-t_0)} \quad (1.35)$$

Antes de prosseguir, é bom verificar se a Equação (1.35) faz sentido. Você encontrou acima que Γ tem dimensão de $1/T$ e, portanto, a exponencial é adimensional como deveria ser. Em seguida, note que no limite $\Gamma \rightarrow 0$, onde a força desaparece, a velocidade vai para um valor constante, como deveria ser. Para Γ diferente de zero, o objeto estará perdendo energia, sua velocidade gradualmente diminui.

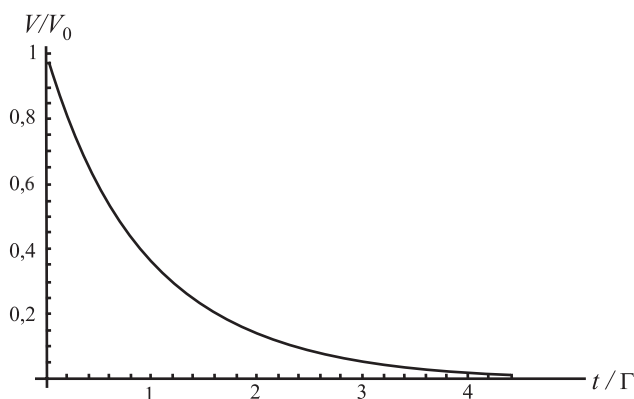


Figura 1.3: Gráfico mostrando a diminuição exponencial da velocidade, medida em unidades de v_0 , em função do tempo, medido em unidades de Γ .

Na **Figura 1.3** temos um gráfico da velocidade como função do tempo mostrando a diminuição exponencial de v .

Agora vamos encontrar $x(t)$ integrando a Equação (1.35)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t dt' v(t') \\ &= x(t_0) + v(t_0) \int_{t_0}^t dt' e^{-\Gamma(t'-t_0)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Se você não se lembra α como calcular a integral da função exponencial, faça uma mudança de variável de t' para $u = e^{-\Gamma(t'-t_0)}$. Assim, $du = -\Gamma e^{-\Gamma(t'-t_0)} dt'$ e então,

$$\int_{t_0}^t dt' e^{-\Gamma(t'-t_0)} = -\frac{1}{\Gamma} \int_1^{-\Gamma(t-t_0)} du = \frac{1}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}) \quad (1.37)$$

Substituindo este resultado na (1.36), encontramos

$$x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}) \quad (1.38)$$

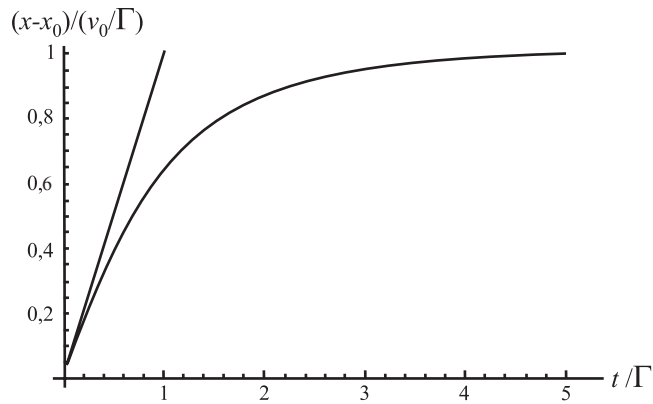


Figura 1.4: Gráfico do deslocamento em função do tempo. A linha reta é a extrapolação linear da velocidade inicial.

Na **Figura 1.4** temos um gráfico do deslocamento da partícula, $\Delta x = x - x_0$ (em unidades de v_0 / Γ) em função do tempo (em unidades de $1/\Gamma$).

Exercício 1.5. A expressão matemática $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\Gamma(t-t_0)} \rightarrow 0$ nos leva a concluir da Equação (1.38) que o objeto leva um tempo infinito para percorrer uma distância finita $v(t_0)/\Gamma$. Analise esta conclusão com base no intervalo de tempo característico $1/\Gamma$.

Para uma função $f(t)$ suave (e a maioria das funções em Física são suaves) podemos usar a expansão de Taylor:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2!}f''(t_0) + \dots \quad (1.39)$$

A expansão de Taylor, ou série de Taylor, é uma das fórmulas matemáticas mais importantes na Física e você vai usá-la com muita frequência. Para a função exponencial,

$$e^{-\Gamma(t-t_0)} = 1 - \Gamma(t - t_0) + \frac{1}{2}\Gamma^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.40)$$

Para intervalos de tempo muito curtos, ou seja, $\Gamma(t - t_0) \ll 1$, você só precisa usar até o primeiro termo da expansão (1.40). Então, substituindo $e^{-\Gamma(t-t_0)} = 1 - \Gamma(t - t_0)$ na (1.38) obtemos

$$x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{\Gamma}(1 - (1 - \Gamma(t - t_0))) \quad (1.41)$$

ou

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) \quad (1.42)$$

que é a aproximação linear da **Figura 1.4**. Vamos dizer isto de outra forma: Quando os efeitos da viscosidade do fluido podem ser desprezados, o objeto se move, na ausência de outras forças, em movimento retilíneo uniforme.

Exemplo 1.3. Considere que o objeto movendo-se no fluido viscoso esteja também sob a ação de uma força constante, F_0 . A força total sobre o objeto é então $F(v) = F_0 - m\Gamma v$, que substituindo na Equação (1.28) e integrando, obtemos

$$v(t) = v(t_0)e^{-\Gamma(t-t_0)} + \frac{F_0}{m\Gamma}(1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}) \quad (1.43)$$

Veja que, quando $(t - t_0) \gg 1/\Gamma$, qualquer que seja sua velocidade inicial $v(t_0)$, a velocidade do objeto tende ao valor $v_T = F_0 / m\Gamma$ chamado velocidade *terminal*. No gráfico da **Figura 1.5** ilustramos esse fato.

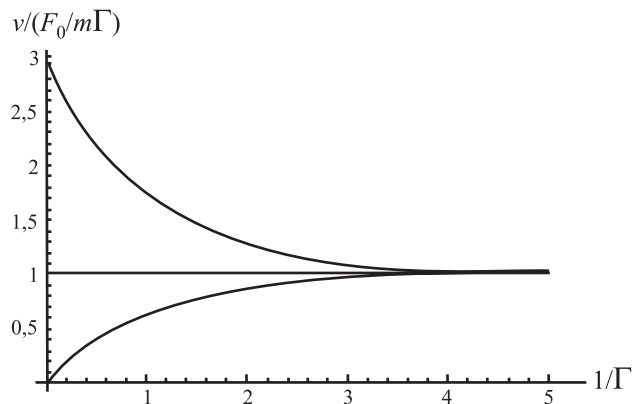


Figura 1.5: Gráfico da velocidade em unidades de $F_0/m\Gamma$. Na curva superior, fizemos $v_0 = 3(F_0/m\Gamma)$. Na curva inferior, a velocidade inicial é $v_0 = 0$. O tempo está em unidades de $1/\Gamma$.

Note que o objeto atinge a velocidade terminal em um tempo da ordem de $1/\Gamma$. Uma vez atingido este regime estacionário, a força exercida por quem está empurrando o objeto satisfaz a relação $F_0 = m\Gamma v_T$, ou seja, é proporcional à velocidade com que o objeto está se movendo.

Imagine um meio muito viscoso. A fase transiente poderia ser tão rápida que as pessoas nem percebessem. Para elas a força seria proporcional à velocidade e não à aceleração como diz a segunda lei de Newton.

Exercício 1.6. Faça uma estimativa do valor de Γ para que a fase transiente não possa ser percebida visualmente. *Sugestão:* aqui vai uma dica: um filme é uma seqüência de fotos. O número de fotos (quadros) por segundo é tal que seu cérebro não percebe a passagem de uma seqüência para a seguinte, dando a impressão de um fluxo contínuo.

Os antigos gregos achavam que um corpo só poderia se mover se estivesse sob a ação de uma força (eles ainda não tinham descoberto a lei da inércia). Eles também achavam que a velocidade com que um corpo se move era proporcional à força aplicada. Como professor de Física você vai notar que muitos alunos, antes de aprenderem as leis de Newton, pensam muito parecido com os gregos antigos.

(b) Caso em que $F = -m\gamma v^2$

Esta é a força de arrasto que atua em uma bola de futebol quando ela está se deslocando no ar.

Exercício 1.7. Calcule o número de Reynolds para velocidades típicas de uma bola de futebol. Depois, na **Figura 1.2** (a que corresponde a uma esfera é muito semelhante) veja como se comporta o coeficiente de arrasto.

Substituindo a força $F = -m\gamma v^2$ na (1.28), agora temos,

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = - \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{\gamma v'^2} \quad (1.44)$$

que fica mais bem escrita na forma

$$\gamma \int_{t_0}^t dt' = \gamma(t - t_0) = - \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{v'^2} \quad (1.45)$$

Fazendo a integral, obtemos:

$$\gamma(t - t_0) = \frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v(t_0)} \quad (1.46)$$

ou

$$v(t) = \frac{v(t_0)}{1 + \gamma v(t_0)(t - t_0)} \quad (1.47)$$

Integrando novamente para obter $x(t)$ chegamos ao resultado

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma v(t_0)(t - t_0)) \quad (1.48)$$

Observe como as condições iniciais aparecem nas Equações (1.47) e (1.48). Nós vamos deixar para você como problema a análise desses resultados.

Na próxima aula, daremos continuidade ao nosso estudo tratando as forças dependentes somente de posição. Em particular, estudaremos as forças conservativas que, você já deve saber, podem ser derivadas de um potencial. Naquele ponto voltaremos novamente a falar das forças dissipativas dependentes de velocidade que estudamos aqui.

Para encerrar, acho que você pode ter ficado um pouco assustado com o número de fórmulas. Para cada lei de força, uma fórmula diferente. Aqui vai um conselho muito útil: *não decore fórmulas. Isso só vai confundir você. Concentre-se em compreender as derivações.*

RESUMO

Nesta aula nos restringimos a estudar o movimento da partícula em uma dimensão, onde a segunda lei de Newton, $F = ma$, fornece a seguinte equação diferencial do movimento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t) \quad (1.49)$$

Vimos que esta equação sempre pode ser resolvida numericamente e que, dadas as condições iniciais, isto é, a posição inicial e a velocidade inicial, sua solução é única. Depois, mostramos como proceder para tentar resolvê-la analiticamente nos casos em que a força aplicada é uma função somente do tempo, $F = F(t)$, ou uma função somente da velocidade, $F = F(v)$. Nos casos em que a solução analítica existe, vimos a utilidade da expansão em séries de Taylor para a análise dos resultados.

PROBLEMAS

1.1. Suponha que a força atuando sobre uma partícula possa ser fatorada em uma das seguintes formas:

$$F(x, \dot{x}, t) = f(x)g(t) \quad (1.50)$$

$$F(x, \dot{x}, t) = f(\dot{x})g(t) \quad (1.51)$$

$$F(x, \dot{x}, t) = f(x)g(\dot{x}) \quad (1.52)$$

Para que casos são integráveis as equações do movimento?

1.2. Uma partícula de massa m está sujeita a uma força $F(t) = me^{-bt}$. A posição inicial e a velocidade inicial são iguais a zero. Encontre $x(t)$.

1.3. Considere uma partícula de massa m cujo movimento parte do repouso em um campo gravitacional constante. Se a força de arrasto for proporcional ao quadrado da velocidade (isto é, $F = -m\gamma v^2$),

(a) Calcule a velocidade e a posição da partícula em um instante t . Tome $v(0) = 0$. Qual a velocidade terminal da partícula?

(b) Mostre que a distância s que a partícula cai ao acelerar de v_0 a v_1 é dada por

$$s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2\gamma} \ln \left[\frac{g - \gamma v_0^2}{g - \gamma v_1^2} \right] \quad (1.53)$$

1.4. Uma partícula é lançada verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0 . Considere a força de resistência do ar como sendo proporcional ao quadrado da velocidade instantânea da partícula. Tomando a direção y positiva para cima, a força resistiva será então $-\gamma m v^2$ quando a partícula estiver se movendo para cima, e $+\gamma m v^2$ quando a partícula estiver se movendo para baixo.

(a) Mostre que, no movimento para cima, a velocidade da partícula varia com a altura de acordo com a expressão

$$v^2 = -v_t^2 + (v_t^2 + v_0^2)e^{-2\gamma y} \quad (1.54)$$

onde y é o deslocamento medido a partir do ponto de lançamento e $v_t = \sqrt{g/\gamma}$ é a velocidade terminal.

(b) Mostre que no movimento para baixo, a velocidade da partícula varia com a altura de acordo com a expressão

$$v^2 = v_t^2 - v_t^2 e^{2\gamma y} \quad (1.55)$$

onde agora y é o deslocamento medido a partir do ponto mais alto da trajetória.

(c) Usando os resultados dos itens anteriores mostre que quando a partícula atinge o ponto de lançamento no seu retorno, sua velocidade é

$$\frac{v_0 v_t}{(v_0^2 + v_t^2)^{1/2}} \quad (1.56)$$

1.5. Um bloco de metal de massa m desliza sobre uma superfície horizontal que foi lubrificada com um óleo pesado fazendo com que o bloco sofra uma força resistiva que varia com a potência $3/2$ da velocidade:

$$F_r = -m\gamma v^{3/2} \quad (1.57)$$

As condições iniciais são $x(t=0) = 0$ e $v(t=0) = v_0$.

(a) Resolva a equação do movimento do bloco para encontrar $v(t)$

(b) Integre $v(t)$ para obter $x(t)$.

(c) Usando a regra da cadeia,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (1.58)$$

obtenha $v(x)$ para esse bloco.

(d) Mostre que, quando $t \rightarrow \infty$, o deslocamento do bloco tende assintoticamente a $2v_0^{1/2}/\gamma$.

1.6. Foguetes são impulsionados pela reação à taxa de variação do momento dos gases expelidos. Desde que os gases têm origem na reação dos combustíveis carregados pelo foguete, a massa do foguete não é constante, mas decresce à proporção que os gases são ejetados. Mostre que a equação do movimento de um foguete, lançado verticalmente para cima em um campo gravitacional uniforme e desprezando a resistência da atmosfera, é:

$$m \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt} - mg \quad (1.59)$$

onde m é a massa do foguete e v_e é a velocidade de escape dos gases em relação ao foguete. Integre esta equação para obter v em função de m , supondo uma taxa temporal constante de perda de gás.

1.7. Uma gota de água começa a formar-se na atmosfera, em torno de um núcleo de condensação, que é uma partícula de poeira de raio r_0 e que tem uma velocidade inicial v_0 . A gota cai através da atmosfera, que, vamos supor, está saturada de vapor de água, e vai aumentando de volume pela condensação. A gota é esférica e adquire massa a uma taxa igual a kA , onde k é uma constante positiva e A é a área de sua seção reta. Suponha que não há força resistiva e mostre (a) que o raio da gota cresce linearmente com o tempo, e (b) que se r_0 é desprezível, então a velocidade da gota cresce linearmente com o tempo.

1.8. Um barco, com velocidade inicial v_0 , perde velocidade devido a uma força de atrito

$$F = -be^{av} \quad (1.60)$$

- (a) Encontre seu movimento.
- (b) Quanto tempo ele leva para parar e que distância ele percorre?

Soluções:

1.1. No texto da Aula 1, nós estudamos situações nas quais a força aplicada depende somente do tempo t , ou somente da velocidade \dot{x} . Na próxima aula veremos forças que dependem somente da posição x . Este problema considera forças que dependem de duas das variáveis, x , \dot{x} , t , porém, a dependência é fatorada. Queremos saber se nesse caso a equação do movimento é integrável.

(a) $F(x, \dot{x}, t) = f(x)g(t)$

A equação do movimento para uma força deste tipo seria:

$$m \frac{dv}{dt} = f(x)g(t) \quad (1.61)$$

que podemos escrever como

$$\int \frac{m}{f(x)} dv = \int g(t) dt \quad (1.62)$$

O lado direito da Equação (1.62) é claramente integrável para uma função $g(t)$ bem comportada. O lado esquerdo, porém, não é integrável genericamente.

$$(b) F(x, \dot{x}, t) = f(\dot{x}) g(t)$$

A equação do movimento para esta força é

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) g(t) \quad (1.63)$$

ou,

$$\int \frac{m}{f(v)} dv = \int g(t) dt \quad (1.64)$$

Para funções $f(v)$ e $g(t)$ bem comportadas, os dois lados da Equação (1.64) são integráveis.

$$(c) F(x, \dot{x}, t) = f(x) g(\dot{x})$$

A equação do movimento para esta força é

$$m \frac{dv}{dt} = f(x) g(v) \quad (1.65)$$

Agora, usamos a regra da cadeia para transformar a derivada em relação ao tempo em uma derivada em relação à posição:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \quad (1.66)$$

Substituindo este resultado na Equação (1.66), podemos escrever

$$\int \frac{mv}{g(v)} dv = \int f(x) dx \quad (1.67)$$

Novamente, ambos os lados da Equação (1.67) são integráveis para funções $f(x)$ e $g(v)$ bem comportadas. O resultado das integrações dá uma equação para a velocidade em função da posição, $v(x)$, que pode de novo ser separada e integrada para achar $x(t)$.

1.2. Da segunda lei de Newton segue que

$$\ddot{x} = e^{-bt} \quad (1.68)$$

Integrando esta equação em relação ao tempo, achamos

$$v(t) = -\frac{e^{-bt}}{b} + A \quad (1.69)$$

Integrando novamente dá

$$x(t) = \frac{e^{-bt}}{b^2} + At + B \quad (1.70)$$

A condição inicial, $v(0) = 0$, dá $A = \frac{1}{b}$. A condição inicial, $x(0) = 0$, dá $B = -\frac{1}{b^2}$. Assim,

$$x(t) = \frac{e^{-bt}}{b^2} + \frac{t}{b} - \frac{1}{b^2} \quad (1.71)$$

1.3. (a) Vamos escolher a direção positiva apontando para baixo. A equação do movimento da partícula caindo é

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m\gamma v^2 \quad (1.72)$$

Passando toda a dependência em v para o lado esquerdo e a dependência no tempo para o lado direito, temos,

$$\frac{dv}{g - \gamma v^2} = dt \rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{g - \gamma v'^2} = \int_0^t dt' \quad (1.73)$$

A integral pode ser encontrada em uma tabela, ou calculada em seu computador usando Maple, Mathematica, ou equivalente, e dá

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma g}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g}} v \right) = t \quad (1.74)$$

de onde tiramos que

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \tanh \left(\sqrt{\gamma g} t \right) \quad (1.75)$$

A partir da velocidade, integramos e obtemos a posição:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t') dt' = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \int_0^t \tanh \sqrt{\gamma g} t' dt' \quad (1.76)$$

o que dá

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\gamma} \ln \cosh \sqrt{\gamma g} t \quad (1.77)$$

(b) A distância viajada entre os instantes t_0 e t_1 é dada pela diferença

$$\begin{aligned} x(t_1) - x(t_0) &= \frac{1}{\gamma} \ln \cosh(\sqrt{\gamma g} t_1) - \frac{1}{\gamma} \ln \cosh(\sqrt{\gamma g} t_0) \\ &= \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\cosh(\sqrt{\gamma g} t_1)}{\cosh(\sqrt{\gamma g} t_0)} \right) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Para colocar o resultado na forma pedida, primeiro escrevemos

$$s(t_0 \rightarrow t_1) = x(t_1) - x(t_0) = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{\cosh^2(\sqrt{\gamma g} t_1)}{\cosh^2(\sqrt{\gamma g} t_0)} \right) \quad (1.79)$$

Depois, da Equação (1.75), escrevemos

$$\frac{\gamma}{g} v^2 = \tanh^2(\sqrt{\gamma g} t) = 1 - \operatorname{sech}^2(\sqrt{\gamma g} t) \quad (1.80)$$

Então,

$$\cosh^2(\sqrt{\gamma g} t) = \frac{g}{g - \gamma v^2} \quad (1.81)$$

que, substituindo na Equação (1.79), dá, finalmente,

$$s(t_0 \rightarrow t_1) = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{g - \gamma v_0^2}{g - \gamma v_1^2} \right) \quad (1.82)$$

Uma forma alternativa de resolver o presente problema é usar a regra da cadeia para mudar a derivada em relação ao tempo, para uma em relação a x , como fizemos na parte (c) do problema 1.1. Este método leva ao mesmo resultado, mas não dá a dependência explícita no tempo vista na Equação (1.77). Fazemos

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = mg - m\gamma v^2 \quad (1.83)$$

de onde escrevemos

$$\frac{v dv}{g - \gamma v^2} = dx \rightarrow \int_{v_0}^{v_1} \frac{v' dv'}{g - \gamma v'^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx \quad (1.84)$$

o que imediatamente leva ao resultado desejado:

$$s(t_0 \rightarrow t_1) = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{g - \gamma v_0}{g - \gamma v_1} \right) \quad (1.85)$$

1.4. (a) Quando a partícula está se movendo para cima, sua equação do movimento é

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - m\gamma v^2 \quad (1.86)$$

e, usando a regra da cadeia, nós temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy} = -g - \gamma v^2 \quad (1.87)$$

Integrando, dá

$$\begin{aligned} y - y_0 &= - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{g + \gamma v^2} \\ &= - \frac{1}{2} \int_{v_0}^v \frac{d(v^2)}{g + \gamma v^2} \\ &= - \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{g + \gamma v^2}{g + \gamma v_0^2} \end{aligned} \quad (1.88)$$

Tomando o ponto de lançamento como sendo $v_0 = 0$, multiplicando ambos os lados por 2γ e tomando a exponencial, dá

$$\frac{g + \gamma v^2}{g + \gamma v_0^2} = e^{-2\gamma y} \quad (1.89)$$

Resolvendo para v , nós temos

$$v^2 = -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0^2 \right) e^{-2\gamma y} \quad (1.90)$$

ou,

$$v^2 = -v_t^2 + (v_t^2 + v_0^2) e^{-2\gamma y} \quad (1.91)$$

onde $v_t = (g/\gamma)^{1/2}$ é a velocidade terminal da partícula.

(b) Durante o movimento para baixo, a equação do movimento da partícula é

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + m\gamma v^2 \quad (1.92)$$

Seguindo o mesmo procedimento da parte (a), nós encontramos

$$y - y_0 = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{-g + \gamma v^2}{-g + \gamma v_0^2} \quad (1.93)$$

Fazendo $y_0 = 0$, agora o ponto mais alto da trajetória, $v_0 = 0$ (a velocidade é zero no ponto mais alto), obtemos

$$\frac{-g + \gamma v^2}{-g} = e^{2\gamma y} \quad (1.94)$$

e, resolvendo para v , temos

$$v^2 = \frac{g}{\gamma} - \frac{g}{\gamma} e^{2\gamma y} \quad (1.95)$$

ou,

$$v^2 = v_t^2 - v_t^2 e^{2\gamma y} \quad (1.96)$$

(c) Seja h a altura máxima atingida pela partícula. Então, do resultado da parte (a), podemos escrever

$$0 = -v_t^2 + (v_t^2 + v_0^2) e^{-2\gamma h} \quad (1.97)$$

e, da parte (b), a velocidade com a qual a partícula retorna ao ponto de partida será

$$v^2 = v_t^2 - v_t^2 e^{-2\gamma h} \quad (1.98)$$

Eliminando h das Equações (1.97) e (1.98), obtemos

$$v^2 = v_t^2 - v_t^2 \frac{v_t^2}{v_0^2 + v_t^2} \quad (1.99)$$

ou,

$$v = \frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}} \quad (1.100)$$

1.5. (a) A equação do movimento do bloco é

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v^{3/2} \quad (1.101)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$t = -\frac{1}{\gamma} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^{3/2}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{v^{-1/2}}{-1/2} \Big|_{v_0}^v = \frac{2}{\gamma} (v^{-1/2} - v_0^{-1/2}) \quad (1.102)$$

onde v_0 é a velocidade em $t = 0$. Resolvendo para v , dá

$$v(t) = \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-2} \quad (1.103)$$

(b) Integrando v em relação ao tempo, achamos para x :

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_0^t v dt = \int_0^t \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-2} dt = -\frac{2}{\gamma} \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-1} \Big|_0^t \\ &= \frac{2v_0^{1/2}}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.104)$$

(c) Usando a regra da cadeia,

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = -\gamma v^{3/2} \quad (1.105)$$

que, separando e integrando, dá a posição

$$x - x_0 = -\frac{1}{\gamma} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^{1/2}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{v^{1/2}}{1/2} \Big|_{v_0}^v = \frac{2(v_0^{1/2} - v^{1/2})}{\gamma} \quad (1.106)$$

(d) Podemos ou tomar o limite $t \rightarrow \infty$ no resultado do item (b) ou fazer $v = 0$ no resultado do item (c) e obter que o deslocamento do bloco tende assintoticamente para

$$x - x_0 \rightarrow \frac{2v_0^{1/2}}{\gamma} \quad (1.107)$$

1.6. Este é um problema típico daqueles em que a segunda lei de Newton deve necessariamente ser colocada na forma

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1.108)$$

(Aqui, como estamos tratando do movimento em uma dimensão, não precisamos explicitar o caráter vetorial de p e F). Como a massa é variável, $dp/dt \neq m dv/dt$.

Do ponto de vista de um observador na Terra vendo o foguete subir, há somente duas forças atuando sobre o foguete, a gravidade e a propulsão dos gases sendo expelidos. Essa força de propulsão é dada por

$$\frac{dN}{dt} m_g v_g \quad (1.109)$$

onde dN/dt é o número de moléculas de gás sendo expelidas por unidade de tempo, m_g é a massa de uma molécula e v_g é a velocidade do gás expelido em relação à Terra. Isto dá para a força total atuando sobre o foguete:

$$\sum F = -mg + \frac{dm}{dt} v_g \quad (1.110)$$

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = -mg + \frac{dm}{dt} v_g \quad (1.111)$$

ou,

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} (v - v_g) \quad (1.112)$$

Sendo v a velocidade do foguete em relação à Terra, vemos que $v_e = v - v_g$ é a velocidade com que os gases escapam em relação ao foguete e depende só do tipo de motor e do combustível usado. Chegamos, portanto, à seguinte equação para o movimento do foguete:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_e \frac{dm}{dt} \quad (1.113)$$

Seja $\mu = -dm/dt$ a quantidade positiva que dá a taxa com que a massa do foguete está variando. Quando μ é constante, então, $m(t) = m_0 - \mu t \rightarrow t = (m_0 - m)/\mu$. Agora, a equação do movimento do foguete pode ser escrita na forma conveniente para integração:

$$dv = -g dt - v_e \frac{dm}{m} \quad (1.114)$$

o que dá

$$v = -gt + v_e \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \quad (1.115)$$

Substituindo o valor de t , encontramos finalmente,

$$v = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - \frac{g}{\mu}(m_0 - m) \quad (1.116)$$

Note que nesta expressão, à medida que o foguete usa sua massa, a velocidade parece divergir logaritmicamente. Antes disso, como você sabe, a Mecânica Clássica deixa de valer.

1.7. (a) Seja r o raio da gota no instante t . O problema diz que a taxa de crescimento da massa da gota é

$$\frac{dm}{dt} = k\pi r^2 \quad (1.117)$$

Se ρ é a densidade da gota, então

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 \quad (1.118)$$

de modo que

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi \rho r^2 \frac{dr}{dt} = k\pi r^2 \quad (1.119)$$

Portanto,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{4\rho} \quad (1.120)$$

ou,

$$r = r_0 + \frac{k}{4\rho} t \quad (1.121)$$

Logo, r cresce linearmente com o tempo.

(b) A massa muda com o tempo e, portanto, a equação do movimento é

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = -mg \quad (1.122)$$

Usando as Equações (1.117) e (1.118) na Equação (1.122), temos

$$\frac{4\pi}{3} \rho r^3 \frac{dv}{dt} + v k \pi r^2 = -\frac{4\pi}{3} r^3 \rho g \quad (1.123)$$

ou,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3k}{4\rho r} v = -g \quad (1.124)$$

Substituindo a (1.121) nesta equação, ficamos com

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3k}{4\rho} \frac{v}{r_0 + \frac{k}{4\rho}t} = -g \quad (1.125)$$

Fazendo $B = k/4\rho$, reescrevemos a Equação (1.125) como

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3B}{r_0 + Bt}v = -g \quad (1.126)$$

Uma equação diferencial de primeira ordem tem a forma padrão

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t) \quad (1.127)$$

cujas solução é

$$v(t) = e^{-\int P(t)dt} \left[\int e^{\int P(t)dt} Q(t) dt + C \right] \quad (1.128)$$

onde C é uma constante. No caso da nossa equação,

$$P(t) = \frac{3B}{r_0 + Bt}, \quad Q(t) = -g \quad (1.129)$$

Agora,

$$\int P(t)dt = \int \frac{3B}{r_0 + Bt} dt = 3 \ln(r_0 + Bt) = \ln(r_0 + Bt)^3 \quad (1.130)$$

Portanto,

$$e^{\int P(t)dt} = (r_0 + Bt)^3 \quad (1.131)$$

e assim,

$$\begin{aligned} v(t) &= -(r_0 + Bt)^{-3} \left[\int (r_0 + Bt)^3 g dt + C \right] \\ &= -(r_0 + Bt)^{-3} \left[\frac{g}{4B} (r_0 + Bt)^4 + C \right] \end{aligned} \quad (1.132)$$

A constante pode ser determinada fazendo $v(t=0) = v_0$:

$$C = -v_0 r_0^3 - \frac{g}{4B} r_0^4 \quad (1.133)$$

Então, nós temos

$$v(t) = -(r_0 + Bt)^{-3} \left[\frac{g}{4B} (r_0 + Bt)^4 - v_0 r_0^3 - \frac{g}{4B} r_0^4 \right] \quad (1.134)$$

ou,

$$v(t) = -\frac{1}{(Bt)^3} \left[\frac{g}{4B} (Bt)^4 + O(r_0^3) \right] \quad (1.135)$$

onde $O(r_0^3)$ significa “termos da ordem de r_0^3 ou superior”. Para r_0 suficientemente pequeno, podemos desprezar esses termos e

$$v(t) = -\frac{g}{4} t \quad (1.136)$$

Curiosamente, neste caso o movimento da gota é uniformemente acelerado.

1.8. (a) A equação do movimento do barco é

$$m \frac{dv}{dt} = -b e^{-\alpha v} \quad (1.137)$$

Colocando o que depende de v de um lado da equação e o que depende de t do outro e integrando, temos

$$\int_{v_0}^v e^{-\alpha v} dv = -\frac{b}{m} \int_0^t dt \quad (1.138)$$

Fazendo as integrais,

$$\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha v} - e^{-\alpha v_0}) = -\frac{b}{m} t \Rightarrow e^{-\alpha(v-v_0)} = 1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \quad (1.139)$$

de onde segue que

$$v = v_0 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) \quad (1.140)$$

Integrando v , obtemos a posição do barco

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = v_0 t - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) dt \quad (1.141)$$

$$= v_0 t - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{m}{\alpha b} e^{-\alpha v_0} \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) - t \right]_0^t$$

ou seja,

$$x(t) = v_0 t - \frac{m}{\alpha^2 b} e^{-\alpha v_0} \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0} t \right) + \frac{t}{\alpha} \quad (1.142)$$

supondo que $x(0) = 0$.

(b) Se o barco pára no instante t_s , então, $v(t_s) = 0$. Aplicando esta condição à Equação (1.140), encontramos

$$t_s = \frac{m}{\alpha b} (1 - e^{-\alpha v_0}) \quad (1.143)$$

Note que $1 + (\alpha b/m)e^{\alpha v_0} t_s = e^{\alpha v_0}$, portanto, $\ln(1 + (\alpha b/m)e^{\alpha v_0} t_s) = \alpha v_0$. Com esses resultados, substituímos t_s na Equação (1.142) e encontramos para a distância percorrida pelo barco antes de parar:

$$x_s = \frac{m}{\alpha^2 b} (1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0}). \quad (1.144)$$

Movimento em uma dimensão e forças conservativas

AULA

2

Meta da aula

Discutir a solução da equação do movimento unidimensional quando a força aplicada é uma função somente da posição.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- usar a conservação da energia na análise de um movimento;
- estabelecer as condições em que uma força é conservativa e quando uma força é não conservativa;
- resolver o problema do oscilador harmônico simples analítica e numericamente.

INTRODUÇÃO

Na primeira aula estudamos o movimento em uma dimensão de uma partícula sob a ação de forças dependentes do tempo e forças dependentes de velocidade. Um dos tipos mais importantes de movimento ocorre quando a força F é uma função somente da coordenada x . Estas forças, em uma dimensão, são conservativas, ao contrário das forças dependentes só do tempo ou só de velocidade. Isto quer dizer que elas podem ser derivadas de uma energia potencial e que para elas a energia total é conservada durante o movimento.

FORÇAS DEPENDENTES DE POSIÇÃO: ENERGIA POTENCIAL

Quando a força depende somente de x , a Equação (1.3) tem a forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad (2.1)$$

ou, como $v(t) = dx/dt$, também podemos escrever

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \quad (2.2)$$

Multiplicando esta equação por v e usando que $v dv = (1/2)d(v^2)$, temos

$$mv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = F(x)v = F(x) \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$

de onde tiramos que

$$d \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = F(x) dx \quad (2.4)$$

Integrando a Equação (2.4) de (x_0, v_0) a (x, v) , achamos

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (2.5)$$

A relação (2.5) você já conhece. É o teorema trabalho-energia. Ela nos mostra que a variação da *energia cinética* de uma partícula, $T = (1/2)mv^2$, é igual ao trabalho realizado pela força F no percurso de x_0 a x . Ela pode ser usada para determinar a velocidade v em termos de x . Conhecendo $v(x)$, podemos determinar x usando

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \quad (2.6)$$

e integrando do instante inicial ao instante t considerado:

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{v(x')} \quad (2.7)$$

Esta equação permite formalmente resolver o problema de encontrar a solução da Equação (2.1). Antes de dar um exemplo deste método, vamos definir a energia potencial.

A *energia potencial* $V(x)$ é definida como o trabalho realizado pela força quando a partícula vai de uma posição x até algum ponto de referência x_s :

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x') dx' \quad (2.8)$$

Em termos de $V(x)$, podemos escrever a integral em (2.5), como

$$\int_{x_0}^x F(x') dx' = -V(x) + V(x_0) \quad (2.9)$$

Combinando a Equação (2.9) com a Equação (2.5), temos o resultado:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0) \quad (2.10)$$

A quantidade do lado direito depende somente das condições iniciais e é, portanto, constante durante o movimento, não muda com o tempo. Ela é a *energia total* E que você já viu em Física I. Segue assim a lei de conservação da energia cinética mais a energia potencial, que vale quando a força é uma função da posição:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = T + V = E = \text{constante} \quad (2.11)$$

Da definição (2.8), podemos escrever a força em termos da energia potencial como

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (2.12)$$

Esta equação expressa o significado físico da energia potencial. A energia potencial é uma função cuja derivada multiplicada por (-1) dá a força. A definição (2.8) da energia potencial envolve um ponto de referência x_s . Você pode escolher este ponto do modo que julgar conveniente. O efeito de mudar a coordenada do ponto de referência é adicionar uma constante a $V(x)$. Uma vez que é a força que entra na equação do movimento e como a derivada de uma constante é zero, uma constante pode ser sempre adicionada a $V(x)$ sem que os resultados físicos sejam afetados.

Exemplo 2.1. *O oscilador harmônico simples.* Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força restauradora linear

$$F(x) = -kx \quad (2.13)$$

onde k é uma constante. Tomando $x_s = 0$, a energia potencial é

$$V(x) = -\int_0^x (-kx') dx' = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.14)$$

que, substituindo na Equação (2.11), permite encontrar a velocidade em função da posição

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[E - \frac{1}{2} kx^2 \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

Colocando este resultado na Equação (2.7) e tomando $t_0 = 0$, ficamos com

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{2} kx'^2 \right)^{-1/2} dx' = t \quad (2.16)$$

Agora, vamos fazer as substituições

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{k}{2E}} \quad (2.17)$$

e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.18)$$

Deste modo,

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{2} kx'^2 \right)^{-1/2} dx' = \frac{1}{\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0) \quad (2.19)$$

e então, pela Equação (2.16),

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (2.20)$$

Isto resolve o nosso problema porque, da Equação (2.17),

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (2.21)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (2.22)$$

Vemos que a coordenada x oscila harmonicamente no tempo, com uma amplitude A e frequência $\omega/2\pi$. Aqui, as condições iniciais são determinadas pelas constantes A e θ , que estão relacionadas a E e x_0 por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 \\ x_0 &= A \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

O problema que acabamos de resolver é certamente o mais importante no movimento em uma dimensão. A Equação (2.21), como você já sabe, representa o movimento de um oscilador harmônico, cujo exemplo mais simples é o de uma partícula de massa m presa a uma mola cuja constante é k . Mais adiante, pediremos a você para resolver numericamente a equação do movimento do oscilador harmônico, ou seja, obter numericamente o movimento senoidal dado pela Equação (2.21). Dada a importância do oscilador harmônico, estaremos voltando a ele na próxima aula, para estudar seu movimento sob a ação de forças não-conservativas.

Exemplo 2.2. *Queda livre, sem resistência do ar e sem forças inerciais.* Como um outro exemplo, consideremos um corpo caindo na Terra de uma altura muito grande. Vamos desprezar a resistência do ar e as forças inerciais e chamar de x a distância a partir do centro da Terra. Então, a única força sobre o corpo é força gravitacional, dada por

$$F(x) = -\frac{GMm}{x^2} \quad (2.24)$$

onde m é a massa do corpo em queda, M a massa da Terra e G a constante gravitacional. Tomando $x_s = \infty$, a energia potencial é

$$V(x) = GmM \int_{\infty}^x \frac{dx'}{x'^2} = -\frac{GmM}{x} \quad (2.25)$$

Da Equação (2.11),

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{GmM}{x} \right)} \quad (2.26)$$

O sinal + refere-se ao movimento para cima e o sinal – indica partícula descendo.

Temos três situações a considerar:

a) $E < 0$. Neste caso, se a partícula estiver inicialmente movendo-se para cima, ela irá parar quando chegar a uma altura x_R dada por

$$x_R = \frac{GmM}{-E} \quad (2.27)$$

Este é o ponto de retorno do movimento.

b) $E > 0$. Neste caso, da Equação (2.26) vemos que a velocidade nunca se anula, não há ponto de retorno para energias positivas. Se a partícula estiver subindo, à proporção que x cresce, sua velocidade diminui até atingir o valor limite

$$v_L = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (2.28)$$

c) $E = 0$. Neste caso, a velocidade irá a zero quando a distância for infinita, ou seja, o ponto de retorno para energia zero está no infinito. A uma distância x , a sua velocidade será

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{x}} \quad (2.29)$$

que é a velocidade de escape. Isto significa que um corpo a uma distância x do centro da Terra e movendo-se para cima com esta velocidade terá a menor energia cinética que permite que ele continue se movendo para cima indefinidamente (claro, desprezada a resistência do ar).

Substituindo a Equação (2.26) na (2.7) e fazendo $t_0 = 0$, obtemos

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\pm \left(E + \frac{GmM}{x'} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (2.30)$$

Esta equação permite que determinemos $x(t)$. Vamos resolvê-la, para o caso em que E é negativo, fazendo a substituição

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{-Ex'}{GmM}} \quad (2.31)$$

Então,

$$dx' = \frac{GmM}{-E} 2 \cos \theta \sin \theta \quad (2.32)$$

e

$$\left(E + \frac{GmM}{x'} \right)^{1/2} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (-E)^{1/2} \quad (2.33)$$

Substituindo estes resultados na Equação (2.30) e escolhendo o sinal positivo,

$$\frac{GmM}{(-E)^{3/2}} \int_{\theta_0}^{\theta} 2 \cos^2 \theta' d\theta' = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (2.34)$$

Tomando a posição inicial da partícula como sendo igual à posição do ponto de retorno, x_R , então, da Equação (2.31), $\theta_0 = 0$. Finalmente, usamos a relação trigonométrica

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \quad (2.35)$$

para resolver a integral em (2.34) e obtemos

$$\int_0^{\theta} \cos^2 \theta' d\theta' = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} (1 + \cos 2\theta') d\theta' = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \quad (2.36)$$

Com este resultado, a solução do nosso problema é

$$\begin{aligned} x &= x_R \cos^2 \theta \\ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta &= \sqrt{\frac{2GM}{x_R^3}} t \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde a primeira equação vem da Equação (2.31) e a segunda, da substituição da Equação (2.36) na (2.34). Este par de equações não pode ser resolvido explicitamente para $x(t)$. Devemos resolvê-las numericamente: para uma sequência escolhida de valores de θ , encontramos das Equações (2.37) os valores correspondentes de x e t . Note, porém, que aquela parte do movimento para a qual x for menor que o raio da Terra deverá ser desconsiderada. A Equação (2.24) supõe a massa da Terra toda concentrada em $x = 0$, mas mesmo que não houvesse uma colisão da partícula com a Terra (se existisse um túnel estreito na direção x passando através do centro da Terra), a força sobre ela, para x menor que o raio da Terra, seria diferente da Equação (2.24).

Se você está achando que as Equações (2.37) não parecem fazer o menor sentido, vamos responder a seguinte questão: qual o comportamento de $x(t)$ para pequenos valores de t ? Note que "pequeno" aqui significa pequeno quando comparado com o tempo característico do problema que é $\sqrt{x_R^3/2GM}$. Para valores pequenos de t , os valores de θ também serão pequenos e podemos usar as aproximações

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &\approx 1 - \theta^2 \\ \sin 2\theta &\approx 2\theta\end{aligned}\quad (2.38)$$

Com estas aproximações, as Equações (2.37) ficam

$$x = x_R - x_R \theta^2 \quad (2.39)$$

$$2\theta = \sqrt{\frac{2GM}{x_R^3}} t \quad (2.40)$$

Definindo $\tilde{g} = GM/x_R^2$, que é a aceleração da gravidade nas vizinhanças de $x = x_R$, temos, substituindo θ da Equação (2.40) na (2.39), finalmente que

$$x = x_R - \frac{1}{2} \tilde{g} t^2 \quad (2.41)$$

Este é um resultado esperado, já que para pequenos valores de t a distância percorrida não é muito grande e a força fica aproximadamente constante, logo, o movimento é uniformemente acelerado.

FORÇAS NÃO-CONSERVATIVAS

Voltemos à Equação (2.3). De lá, tiramos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F(x) v \quad (2.42)$$

Usando a relação entre a força $F(x)$ e a energia potencial, temos

$$F(x) v = - \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = - \frac{dV(x)}{dt} \quad (2.43)$$

Isto nos diz que, *para uma força conservativa, a quantidade $P = Fv$ é uma derivada temporal total*. Substituindo a Equação (2.43) na (2.42), ficamos com

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = -\frac{dV(x)}{dt} \quad (2.44)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x) \right) = 0 \quad (2.45)$$

que é a expressão da conservação da energia.

A quantidade $P = \text{força} \times \text{velocidade}$ é a potência fornecida (ou dissipada) pela força aplicada à partícula. Suponhamos que a força aplicada seja igual a $F(x) + F'$, onde F' depende de t ou de v ou de ambos. Neste caso,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = F(x)v + F'v \quad (2.46)$$

Usando a Equação (2.43) para a potência associada à força conservativa, encontramos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x) \right) = F'v \quad (2.47)$$

As forças do tipo de F' não são conservativas. Elas não podem ser derivadas de uma energia potencial. Ou, em outras palavras, a potência $F'v$ não pode ser escrita como uma derivada temporal total. Quando a potência $F'v$ for negativa, como no caso de forças de atrito, dizemos que F' é uma força dissipativa (porque a energia total da partícula vai diminuindo com o tempo). As forças de arrasto que vimos na aula passada são dissipativas.

RESOLVENDO NUMERICAMENTE A EQUAÇÃO DO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Queremos aqui que você resolva numericamente, com o auxílio de uma calculadora, a equação do movimento do oscilador harmônico simples

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2.48)$$

Para não ter que especificar agora os valores numéricos da massa m e da constante da mola k , vamos fazer uma mudança na escala do tempo medindo seus valores em unidades de $\sqrt{k/m}$. A Equação (2.48) fica então simplesmente

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x \quad (2.49)$$

Suponha que o oscilador esteja em $x(t_0)$ e que tenha uma velocidade $v(t_0)$ no instante t_0 . Qual a sua posição num instante um pouquinho depois (ou um pouquinho antes) $t_0 + \Delta t$? Já vimos na aula passada que para Δt pequeno podemos escrever

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v(t_0)\Delta t \quad (2.50)$$

A velocidade $v(t) = \dot{x}(t)$ no instante $t_0 + \Delta t$ será

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + a(t_0)\Delta t \quad (2.51)$$

onde $a(t) = \ddot{x}(t)$ é a aceleração. Da Equação (2.49), temos que $a(t) = -x(t)$ e assim

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) - x(t_0)\Delta t \quad (2.52)$$

Agora podemos resolver nosso problema. Para ser específico, consideremos $t_0 = 0$, $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$. (Estamos supondo que foi feita uma escolha de um sistema de unidades, por exemplo, o sistema SI.) Vamos tomar $\Delta t = 0,10$ e queremos calcular o movimento até, digamos, o instante $t = 1,80$. Faça uma tabela como a apresentada a seguir (Tabela 2.1), com tantas linhas quantas forem necessárias, para guardar os resultados obtidos em cada passo. Começando com o valor

$x(0,00) = 1,00$, quanto vale $x(0,10)$? A Equação (2.50) diz que $x(0,10) = 1,00$ porque $v(0,00) = 0$. O valor da velocidade $v(0,10)$ é dado por

$$v(0,10) = 0,00 - 0,10 \times 1,00 = -0,10 \quad (2.53)$$

Agora que sabemos os valores de $v(0,10)$ e $x(0,10)$, podemos calcular $x(0,20)$ e $v(0,20)$:

$$x(0,20) = x(0,10) + v(0,10)\Delta t = 1,00 - 0,10 \times 0,10 = 0,99 \quad (2.54)$$

e

$$v(0,20) = v(0,10) + a(0,10\Delta t) = -0,10 - 0,10 \times 1,00 = -0,20 \quad (2.55)$$

Tabela 2.1

t	x	v	a
0,000	1,000	0,000	- 1,000
		-0.050	
0,100	0,995		-0,995
		-0,150	
0,200	0,980		-0,980
		-0,248	
0,300	0,955		-0,955
		-0,343	

E assim podemos continuar até calcular o resto do movimento. Contudo, para propósitos práticos, como você verá no seu curso de Informática, existem alguns pequenos truques que podem ser usados para melhorar a precisão. Se tivéssemos continuado este cálculo como começamos, acharíamos o movimento numa forma bastante grosseira porque $\Delta t = 0,10$ não é suficientemente pequeno para o método numérico que estamos empregando. Teríamos de usar um valor bem menor, digamos $\Delta t = 0,01$. Mas isto aumentaria muito o número de passos até chegar a $t = 1,80$, ou seja, aumentaria o tempo que você vai ficar fazendo contas na calculadora. Você pode argumentar que para um computador isto não faria muita diferença. Não num problema simples como esse. Mas em problemas complexos é essencial usar métodos numéricos eficientes.

No método que estamos usando, uma nova posição é calculada tomando a posição anterior e adicionando a velocidade multiplicada pelo intervalo de tempo. Como comentamos na primeira aula, a Equação (2.50) vem da definição da velocidade média no intervalo de tempo Δt . A notação indica o seguinte: como o intervalo é pequeno, não há muita diferença entre o valor médio e o valor da velocidade no início do intervalo. É isto que está feito na (2.50), estamos substituindo a velocidade média pelo valor no início do intervalo $v(t_0)$. Mas pelo mesmo raciocínio poderíamos ter escolhido o valor da velocidade em algum outro ponto do intervalo Δt , por exemplo, no ponto médio, $v(t_0 + \Delta t/2)$. A precisão melhora se fizermos exatamente isso. Similarmente, a velocidade em $t_0 + \Delta t/2$ é então igual à velocidade no instante $t_0 - \Delta t/2$ mais o valor da aceleração em t_0 multiplicada pelo intervalo Δt . Assim, em vez das Equações (2.50) e (2.52), escrevemos

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v(t_0 + \Delta t/2) \Delta t \quad (2.56)$$

$$v(t_0 + \Delta t/2) = v(t_0 - \Delta t/2) + a(t_0) \Delta t \quad (2.57)$$

Resta um pequeno problema: que valor tomar para $v(\Delta t/2)$? A condição inicial especifica $v(0)$, não $v(-\Delta t/2)$. Para poder iniciar os cálculos, use a equação

$$v(\Delta t/2) = v(0) + a(0) \Delta t/2 \quad (2.58)$$

Exercício 2.1. Na Tabela 1 apresentamos os primeiros resultados da aplicação das Equações (2.56) – (2.58) para as condições iniciais que estão na segunda linha dessa tabela. Reproduza esses resultados e continue o cálculo até o instante $t = 1,80$. Depois, faça um gráfico de x contra t e compare com a solução do problema, que já conhecemos do exemplo 1, $x = \cos t$.

RESUMO

Grande parte desta aula foi de revisão de coisas que você já viu em Física I e Física II. Assim, apresentamos as forças conservativas, que podem ser derivadas de uma energia potencial V . Uma partícula sob a ação somente deste tipo de força tem sua energia mecânica total conservada, $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = T + V = \text{constante}$. Com esta relação, podemos determinar as regiões nas quais o movimento é permitido e, em alguns casos, encontrar a solução da equação do movimento. Também falamos das *forças não-conservativas* como aquelas para as quais a potência associada não pode ser escrita como uma derivada temporal total. Neste caso, a energia mecânica varia com o tempo, e esta variação é igual à potência associada à força. Finalmente, mostramos como resolver numericamente a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

PROBLEMAS

2.1. Corrente caindo. Uma corrente de comprimento l está estirada sobre uma mesa horizontal sem atrito, com um comprimento y_0 pendurado através de um buraco na mesa. A corrente é liberada.

(a) Encontre, em função do tempo, o comprimento da parte pendurada da corrente.

(b) Ache a velocidade da corrente quando ela perde contato com a mesa.

2.2. Uma partícula, movendo-se em uma dimensão, está sob a influência da força $F = -kx + kx^3 / \alpha^2$, onde k e α são constantes positivas.

(a) Determine o potencial $V(x)$ com $V(0) = 0$.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e classifique-os em pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.

(c) Esboce o potencial $V(x)$.

(d) Enumere e descreva todos os possíveis pontos de equilíbrio e movimentos, as energias ou intervalos de energia nos quais estes tipos de movimento ocorrem. Atenção para não esquecer de qualquer tipo de movimento no caso $E = \frac{k}{4}\alpha^2$

2.3. Uma partícula de massa m tem uma velocidade $v = \alpha / x$, onde x é seu deslocamento. Encontre a força $F(x)$ responsável.

2.4. A energia potencial para a força entre dois átomos numa molécula diatômica tem a forma aproximada:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}} \quad (2.59)$$

onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas.

(a) Encontre a força.

(b) Supondo que um dos átomos seja muito pesado e permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os possíveis movimentos.

(c) Ache a distância de equilíbrio e o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. A massa do átomo mais leve é m .

2.5. Encontre a solução geral da equação do movimento de um corpo sob a ação de uma força linear repulsiva $F = kx$. Mostre que esse tipo de movimento pode ser esperado na vizinhança de um ponto de equilíbrio instável.

2.6. Uma massa m está sujeita a uma força restauradora $-kx$ e a uma força dissipativa $(\pm)\mu mg$ onde μ é o coeficiente de atrito (estático e cinético). Mostre que as oscilações são isócronas (período independente da amplitude) com a amplitude de oscilação decrescendo de $2\mu g/\omega_0^2$ durante cada meio ciclo até que a massa pare.

SOLUÇÕES

2.1. Seja ρ a densidade da corrente e $y(t)$ o comprimento pendurado no instante t . Então a massa total da corda é ρl e a massa da parte da corrente abaixo do buraco é ρy . A força resultante puxando a corrente para baixo é ρgy e a segunda lei de Newton diz então que

$$(\rho l)\ddot{y} = \rho gy \quad (2.60)$$

de onde obtemos a equação diferencial

$$\ddot{y} = \frac{g}{l}y \quad (2.61)$$

O problema envolve, portanto, uma força que depende somente da posição.

Temos dois modos de resolver a Equação (2.61):

Primeiro método: este método envolve um modo de resolver equações diferenciais lineares que usaremos muito na próxima aula. Como temos uma função cuja derivada segunda é proporcional a ela mesma, uma propriedade da função exponencial, uma boa solução tentativa é fazer $y = e^p$. Substituindo na (2.61) obtemos

$$p^2 = \frac{g}{l} \text{ ou } p = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.62)$$

Encontramos, assim, duas soluções independentes, $e^{+\alpha}$ e $e^{-\alpha}$, onde $\alpha \equiv \sqrt{g/l}$. A solução geral da Equação (2.61) tem duas constantes a determinar a partir das condições iniciais. Então, a solução geral é

$$y = Ae^{+\alpha t} + Be^{-\alpha t} \quad (2.63)$$

A velocidade é dada por

$$\dot{y}(t) = \alpha Ae^{+\alpha t} - \alpha Be^{-\alpha t} \quad (2.64)$$

e a condição inicial $\dot{y}(0) = 0$ implica que $A = B$. A outra condição inicial diz que $y(0) = y_0$, ou seja, $A + B = y_0$, ou $A = B = y_0/2$. A solução do problema é, portanto,

$$y(t) = \frac{y_0}{2}(e^{+\alpha t} + e^{-\alpha t}) = y_0 \cosh(\alpha t) \quad (2.65)$$

e a velocidade,

$$\dot{y}(t) = \frac{\alpha y_0}{2}(e^{+\alpha t} - e^{-\alpha t}) = y_0 \sinh(\alpha t) \quad (2.66)$$

O tempo T que a corrente leva até perder o contato com a mesa é tal que $y(T) = l$, ou seja, $l = \cosh(\alpha T)$. Usando $\sinh(\alpha T) = \sqrt{\cosh^2(\alpha T) - 1}$ encontramos que a velocidade da corrente logo que ela perde contato com a mesa é

$$\dot{y}(T) = \alpha y_0 \sinh(\alpha T) = \sqrt{\frac{g}{l}} y_0 \sqrt{\frac{l^2}{y_0^2} - 1} = \sqrt{gl} \sqrt{1 - f_0^2} \quad (2.67)$$

onde $f_0 = y_0/l$ é a fração inicial de corrente que estava pendurada.

Segundo método: Usamos a já bastante explorada regra da cadeia e que é um outro modo, porém equivalente, de chegar ao teorema trabalho-energia. Escrevemos

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} v = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy} \quad (2.68)$$

na Equação (2.61), separamos as variáveis e integramos:

$$\int_0^v v dv = \alpha^2 \int_{y_0}^y y dy \quad (2.69)$$

Encontramos

$$v^2 = \alpha^2 (y^2 - y_0^2) \quad (2.70)$$

Fazendo $y = l$ na Equação (2.12), obtemos o resultado desejado,

$$v^2 = \frac{g}{l} (l - y_0^2) \Rightarrow v = \sqrt{gl} \sqrt{1 - f_0^2} \quad (2.71)$$

que é o resultado (2.67).

2.2. No movimento unidimensional, uma força que depende somente da posição é conservativa.

(a) Temos que

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int_0^x F(x') dx' \\ &= k \int_0^x x' dx' - \frac{k}{\alpha^2} \int_0^x x'^3 dx' \\ &= \frac{1}{2} k x^2 - \frac{k}{4\alpha^2} x^4 \end{aligned} \quad (2.72)$$

(b) Para encontrar os pontos de equilíbrio, fazemos $dV/dx|_{x=x_0} = 0$ obtemos

$$kx_0 - \frac{kx_0^3}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow kx_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{\alpha^2} \right) = 0 \quad (2.73)$$

Os pontos de equilíbrio são três: $x_0 = 0, \pm \alpha$. Como $d^2V/dx^2 = k(1 - 3x^2/\alpha^2)$, então

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0=0} = k > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ equilíbrio estável}$$

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0=\pm\alpha} = k - 3k = -2k < 0 \Rightarrow \text{equilíbrio instável}$$

(c) Na Figura 2.1, mostramos um gráfico do potencial.

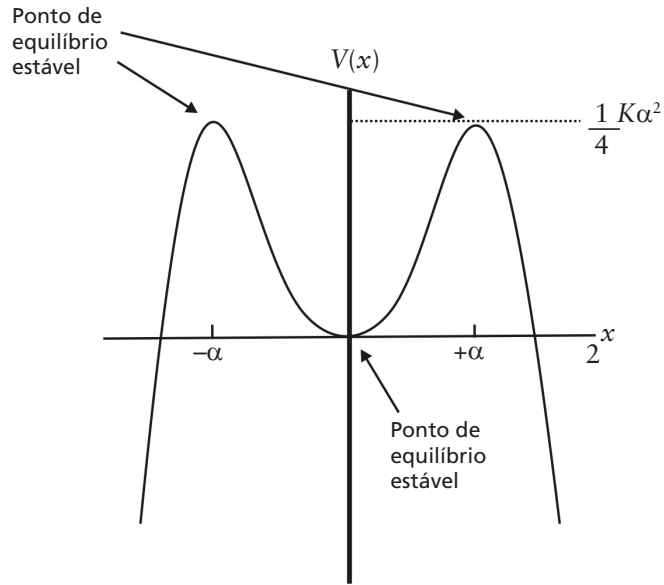


Figura 2.1

(d) A figura indica os pontos de equilíbrio. Energia total $E > (1/4)k\alpha^2$: movimento ilimitado para a esquerda ou para a direita. Se $E = (1/4)k\alpha^2$: (i) em repouso em $x = \pm\alpha$; (ii) indo para $+\infty$ ($-\infty$) se $x > \alpha$ ($> -\alpha$); (iii) indo para a esquerda ou para a direita entre $-\alpha$ e α , chegando próximo, mas nunca alcançando os pontos de equilíbrio $\pm\alpha$. Se $0 < E < (1/4)k\alpha^2$: (i) movimento periódico em torno de $x = 0$; (ii) vem do infinito, vira em um $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna para o infinito. Se $E = 0$: (i) repouso em $x = 0$; (ii) vem do infinito, vira em um $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna ao infinito. Se $E < 0$: (i) vem do infinito, vira em um $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna para o infinito.

2.3. O problema pode ser resolvido em uma linha. Veja:

$$F(x) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = mv \frac{dv}{dx} = m \frac{\alpha}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{x} \right) = m \frac{\alpha}{x} \left(-\frac{\alpha}{x^2} \right) = -m \frac{\alpha^2}{x^3} \quad (2.74)$$

2.4. (a) A força é dada por

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}} \quad (2.75)$$

(b) O potencial (2.59) é conhecido como potencial de Lennard-Jones e tem a cara da Figura (2.2).

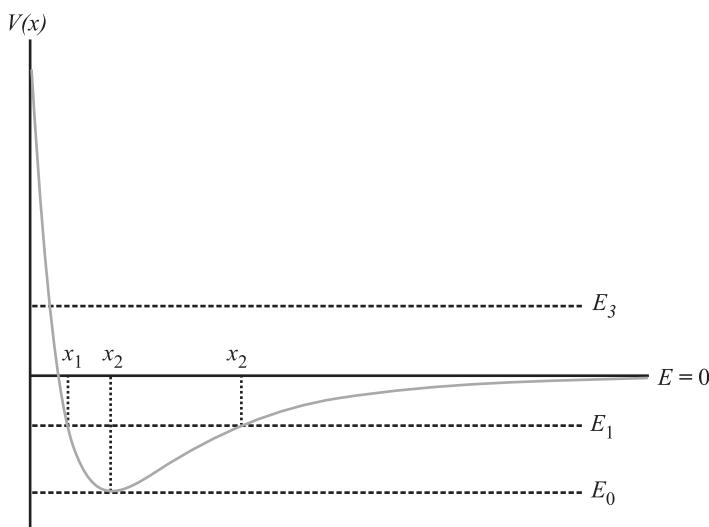


Figura 2.2

A posição $x = x_e$ é a posição de equilíbrio. $V(x_e)$ corresponde ao mínimo da energia potencial. Somente para energias $E \geq V(x_e)$ existe movimento. Quando a energia tem o valor E_0 , a partícula fica parada na posição de equilíbrio. Quando $E_0 < E_1 < 0$, a partícula executa um movimento periódico entre dois pontos de retorno x_1 e x_2 . Se E_1 é só ligeiramente maior que E_0 , então teremos pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, o que corresponde às vibrações da molécula. Quando $E \geq 0$ o movimento é ilimitado: os átomos se afastam indefinidamente. Dizemos que a molécula se dissocia.

(c) $F = 0$ no equilíbrio, ou seja,

$$\frac{12b}{x_e^{13}} = \frac{6a}{x_e^7} \Rightarrow x_e = \left(\frac{2b}{a} \right)^{1/6} \quad (2.76)$$

Expandindo $V(x)$ em torno do ponto de equilíbrio, temos, para pequenas oscilações

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_e) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_e} (x - x_e)^2 \\ &= V(x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_e} (x - x_e)^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde o segundo termo da primeira linha da Equação (2.77) é zero, porque a força é igual a zero no ponto de equilíbrio. Este é um potencial de oscilador harmônico onde a "constante da mola" é

$$k = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_e} = -\frac{42a}{x_e^8} + \frac{156b}{x_e^{14}} = \frac{36a^{7/3}}{(2b)^{4/3}} \quad (2.78)$$

O período das oscilações é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{m^3 b^4}{4a^7} \right)^{1/6} \quad (2.78)$$

2.5. A equação do movimento é

$$m \frac{dv}{dt} = kx \quad (2.80)$$

que vamos escrever como

$$\ddot{x} - \eta^2 x = 0 \quad (2.81)$$

onde introduzimos a constante positiva $\eta = \sqrt{k/m}$. Já resolvemos uma equação semelhante no problema 2.1. Usando o primeiro método aplicado naquele problema, escrevemos $x(t) = e^{pt}$ e substituímos na Equação (2.81) obtendo: $p^2 = \eta^2 \Rightarrow p = \pm \eta$. A solução geral procurada é

$$x(t) = Ae^{\eta t} + Be^{-\eta t} \quad (2.82)$$

A força $F=kx$ corresponde a um potencial $V(x) = \text{constante} - (1/2)kx^2$ que está mostrado na **Figura 2.3**. Note que o ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Uma vez que o corpo se desloque um pouquinho do ponto de equilíbrio, ele continuará se afastando.

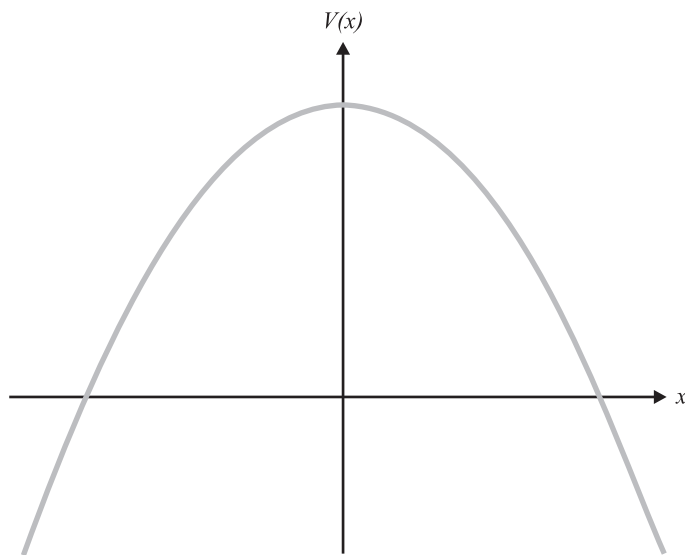


Figura 2.3

2.6. A equação do movimento da massa m é

$$m\ddot{x} + kx = F_a \quad (2.83)$$

onde $F_a = (\pm)\mu mg$. O sinal da força de atrito deve ser escolhido de modo que a força seja sempre oposta à velocidade. Assim, é necessário resolver a equação do movimento separadamente para cada intervalo de tempo durante o qual um dado sinal da força deve ser usado. Em cada um desses intervalos a Equação (2.83) é uma equação diferencial não homogênea com F_a constante. Para resolvê-la, fazemos a substituição $x' = x - a$

$$m\ddot{x}' + kx' + ka = F_a \quad (2.84)$$

e escolhemos a constante a de forma que a equação para x' seja homogênea:

$$m\ddot{x}' + kx' = 0 \quad (2.85)$$

ou seja, $a = F_a / m$. Mas a Equação (2.85) já sabemos resolver: $x' = A \cos(\omega t + \theta)$ e, portanto,

$$x = x' + a = A \cos(\omega t + \theta) + \frac{F_a}{k} \quad (2.86)$$

Este é um movimento harmônico simples, e o período não depende da amplitude. O efeito da força de atrito, além de deslocar a posição de equilíbrio, é diminuir a amplitude, já que a energia mecânica do sistema é dissipada. Considere a situação em que a massa está numa posição de amplitude máxima A . Meio período depois ela estará novamente numa posição de amplitude máxima $A' < A$. Como a força é constante no intervalo considerado, a energia dissipada é igual a $\mu mg(A + A')$. Temos então,

$$\frac{1}{2}kA^2 - \mu mg(A + A') = \frac{1}{2}kA'^2 \quad (2.87)$$

que podemos escrever como

$$\frac{1}{2}\omega^2(A + A')(A - A') = \mu g(A + A') \quad (2.88)$$

de onde segue que

$$A - A' = \frac{2\mu g}{\omega^2} \quad (2.89)$$

Este resultado é independente do valor inicial A . Logo, concluímos que a amplitude de oscilação decresce de $\frac{2\mu g}{\omega^2}$ a cada meio período.

O oscilador harmônico simples

Meta da aula

Resolução do problema completo do oscilador harmônico, amortecido e forçado.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- resolver uma equação diferencial linear homogênea ou não homogênea;
- descrever oscilações amortecidas para os três tipos de amortecimento: subcrítico, crítico e supercrítico;
- resolver o problema de um oscilador amortecido forçado para forças aplicadas senoidais e outras forças simples;
- entender os conceitos de transiente e regime estacionário, este último, em termos da igualdade entre a potência média fornecida pela força aplicada e potência média dissipada;
- entender o conceito de ressonância.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, nós vamos voltar ao problema do oscilador harmônico simples, desta vez com ênfase num método de solução de equações diferenciais que permitirá considerar situações como oscilações amortecidas, oscilações amortecidas forçadas e ressonância. Grande parte do material aqui coberto você já viu em Física 2B, Módulo 1, mas você notará uma marcante diferença de linguagem, aqui mais puxada para a Matemática e com vistas aos problemas mais complexos que encontraremos em aulas posteriores.

Osciladores harmônicos amortecidos e forçados são descritos por equações do movimento que os matemáticos chamam de *equações diferenciais lineares de segunda ordem*. Veremos que resolver uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes é equivalente a resolver uma equação algébrica do segundo grau e as raízes dessas equações podem ser números complexos. O exemplo mais simples é a equação $x^2 + 1 = 0$ que não admite uma solução real. Assim, iniciaremos a aula fazendo uma breve revisão de números complexos.

NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo z é um número da forma

$$z = x + iy \quad (3.1)$$

onde x e y são números reais e i é tal que $i^2 = -1$. O número complexo i chama-se unidade imaginária. Por definição, $i = \sqrt{-1}$. Na Equação (3.1), definimos

$$\begin{aligned} x &\equiv \operatorname{Re} z \\ y &\equiv \operatorname{Im} z \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde essas notações significam que x é a parte real de z e y é a parte imaginária de z .

Chama-se complexo conjugado z^* do número complexo $z = x + iy$ o número complexo $z^* = (x + iy)^* = x - iy$. Desta definição, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + z^*) \\ \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i}(z - z^*) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números complexos.

Soma de dois números complexos:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (3.4)$$

Produto de dois números complexos:

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (3.5)$$

Quociente de dois números complexos:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (3.6)$$

Módulo $|z|$ do número complexo z :

$$|z|^2 = z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad (3.7)$$

A FÓRMULA DE EULER

Considere a função $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Esta função satisfaz a condição $f(0) = 1$. Derivando f uma vez, obtemos

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = if(\theta) \quad (3.8)$$

Agora, sabemos que a solução da equação diferencial $\frac{df(\theta)}{d\theta} = if(\theta)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ é $f(\theta) = e^{i\theta}$. Portanto, concluímos que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.9)$$

Esta é a fórmula de Euler, considerada a mais notável fórmula da Matemática.

Exercício 3.1. Mostre, usando a fórmula de Euler, as seguintes relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Podemos relacionar a geometria à álgebra representando números complexos num plano. Na **Figura 3.1**, o número complexo $z = x + iy$ é um ponto de coordenadas (x, y) . Se passarmos para coordenadas polares (r, θ) ,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

a fórmula de Euler dá

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta} \quad (3.12)$$

que é a forma trigonométrica do número complexo z .

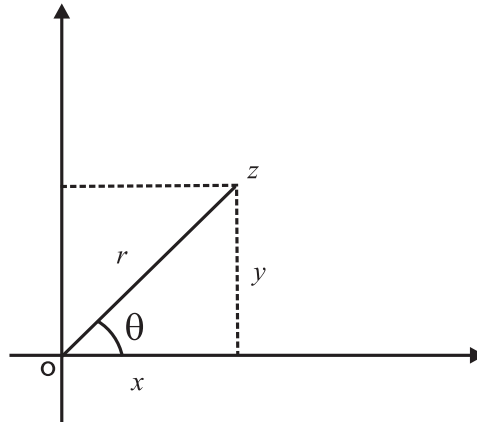


Figura 3.1: Coordenadas polares planas.

LINEARIDADE E PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Oscilações harmônicas ocorrem em quase tudo. Existem muitos sistemas físicos cujo movimento é descrito, pelo menos aproximadamente, por uma equação diferencial igual à equação do movimento de um oscilador harmônico simples,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (3.13)$$

Esta equação tem uma característica importante: ela é linear. *Uma equação diferencial é linear se todos os seus termos são proporcionais à primeira potência de x ou de suas derivadas.* Mais precisamente, a Equação (3.13) é uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes. A designação “homogênea” se deve ao fato de que o termo na equação que não contém x , no lado direito, é igual a zero.

Exemplo 3.1. A equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$ é linear. A equação $\ddot{x} + 4\dot{x}^2 + x = 0$ é não-linear.

É fácil de entender por que a Equação (3.13) é tão comum. Suponha que você esteja estudando oscilações em algum sistema e tudo que você

sabe é que ele oscila em torno de um ponto de equilíbrio, digamos, em $x = 0$. A quantidade que mede o deslocamento do equilíbrio é x e seja $V(x)$ o potencial associado. $V(x)$ deve ter na vizinhança do ponto de equilíbrio a forma da **Figura 3.2** ou algo semelhante.

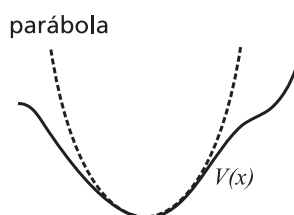


Figura 3.2: Próximo a um ponto de equilíbrio sempre podemos passar uma parábola.

Como estamos supondo que $x = 0$ é o ponto de equilíbrio, temos que $(dV/dx)_{x=0} = 0$. Fazendo uma expansão de $V(x)$ em série de Taylor,

$$V(x) = V(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=0} x^2 + \dots \quad (3.14)$$

Tomando $V(0) = 0$, vemos que, para pequenas amplitudes, quando podemos desprezar os termos envolvendo x^3 e potências superiores, o potencial tem a forma parabólica $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ característica do oscilador harmônico. Todo sistema estável, quando tirado um pouquinho do seu estado de equilíbrio, exibe oscilações harmônicas.

Uma consequência importante da linearidade é a seguinte:

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da Equação (3.13), então $A x_1(t) + B x_2(t)$ também é uma solução, onde A e B são constantes.

A propriedade das equações lineares de que a soma de duas soluções também é solução é chamada *princípio de superposição*.

Exercício 3.2. Verifique explicitamente a afirmação anterior.

Note, no entanto, que, em geral, os sistemas são apenas aproximadamente lineares, como indica a parábola na **Figura 3.2**. A palavra “aproximadamente” é muito importante aqui. Provavelmente, linearidade não seja nunca exatamente verdadeira para um sistema clássico, embora seja freqüentemente uma boa aproximação, como no caso de uma massa presa a uma mola. O exemplo mais importante de linearidade em Física é a Mecânica Quântica. Em Mecânica Quântica linearidade é exata, não uma aproximação.

As soluções da Equação (3.13) formam o que os matemáticos chamam de espaço linear. Na aula passada, vimos que um sistema com um grau de liberdade precisa de duas condições iniciais para especificar completamente a solução da equação do movimento. Assim, a base desse espaço linear deve ser constituída de somente duas funções linearmente independentes.

Vamos escrever a Equação (3.13) para uma variável complexa $z(t)$ permitindo que as soluções sejam complexas:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz = 0 \quad (3.15)$$

Isto simplifica bastante a solução do problema em casos mais gerais porque permite encontrar funções de base $z_1(t)$ e $z_2(t)$ que são simples exponenciais. Como os coeficientes da Equação (3.15) são reais, o complexo conjugado de z , $z^*(t)$ também é solução e podemos recuperar a solução da (3.13) a partir da solução da Equação (3.15) tomando a parte real de $z(t)$, ou seja, $x(t) = \text{Re } z(t)$.

Para encontrar as funções de base $z_1(t)$ e $z_2(t)$, vamos tentar uma solução do tipo:

$$z(t) = e^{pt} \quad (3.16)$$

onde p é uma constante que pode ser complexa. Quando este tipo de solução é substituído na (3.3), resulta que $p^2 = -k/m = -\omega^2$, ou seja, $p = \pm i\omega$. Assim, as funções de base $z^1(t)$ e $z^2(t)$ são complexas e dadas por

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{+i\omega t} \\ z_2(t) &= e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

A solução geral da Equação (3.4) é, portanto,

$$z(t) = ae^{+i\omega t} + be^{-i\omega t} \quad (3.18)$$

onde a e b são constantes. Mas o que queremos é a solução da Equação (3.13), que é a parte real de $z(t)$:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (3.19)$$

onde A e θ são o módulo e a fase da constante complexa $a + b^*$.

O método acima pode ser usado para resolver qualquer equação diferencial linear homogênea.

Exemplo 3.2. Resolver a equação do movimento de uma partícula sob a ação da força dissipativa $F(v) = -m\Gamma v$.

Já resolvemos este problema na primeira aula por integração. O método aqui apresentado torna ainda mais simples a solução. A equação diferencial que temos de resolver é

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = 0 \quad (3.20)$$

Esta é uma equação diferencial linear e homogênea. Substituindo a solução do tipo e^{pt} obtemos a seguinte equação para p

$$p^2 + p\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

Logo, os valores de p são $p = 0$ e $p = -\Gamma$. Note que aqui os valores de p são reais e por isso não precisamos introduzir variáveis complexas. As funções de base são $x_1 = 1$ e $x_2 = e^{-\Gamma t}$ e a solução geral da Equação (3.20) é

$$x(t) = A + Be^{-\Gamma t} \quad (3.22)$$

Agora, encontramos as constantes A e B a partir das condições iniciais. Temos que

$$x(t_0) = A + Be^{-\Gamma t_0} \quad (3.23)$$

e

$$v(t_0) = -\Gamma Be^{-\Gamma t_0} \quad (3.24)$$

Resolvendo estas equações para A e B e substituindo os resultados na (3.22), recuperamos a Equação (1.38) da Aula 1:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{\Gamma}(1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}) \quad (3.25)$$

Por que escolhemos uma função e^{pt} para encontrar as funções de base nos dois casos acima? Porque, assim, resolver uma equação diferencial linear se transforma no problema de resolver uma equação algébrica. Considere a equação

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (3.26)$$

Substituindo a e^{pt} , a Equação (3.26) toma a forma

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) e^{pt} = 0 \quad (3.27)$$

que tem solução não-trivial se

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (3.28)$$

Esta última equação é chamada de equação característica.

OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Agora que sabemos resolver equações diferenciais lineares, vamos considerar um oscilador harmônico oscilando num meio viscoso. A força resultante sobre a partícula de massa m será $F = -m\Gamma v - kx$, de modo que sua equação do movimento será

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.29)$$

Com os coeficientes desta equação, a Equação característica (3.28) fica

$$p^2 + \Gamma p + \omega^2 = 0 \quad (3.30)$$

cujas raízes são

$$p = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega^2} \quad (3.31)$$

Temos três casos a considerar:

Caso 1. Amortecimento subcrítico ($\Gamma/2 < \omega$).

Neste caso, na Equação (3.31) temos a raiz quadrada de um número negativo. Definindo o número real $\varpi = \sqrt{\omega^2 - \Gamma^2/4}$, as raízes da equação característica são complexas

$$p = -\frac{\Gamma}{2} \pm i\varpi \quad (3.32)$$

e

$$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} (ae^{i\varpi t} + be^{-i\varpi t}) \quad (3.33)$$

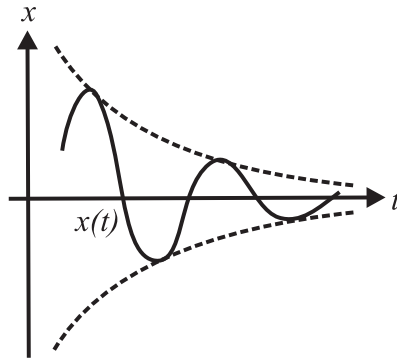


Figura 3.3: Posição em função do tempo para um oscilador com amortecimento subcrítico.

A solução que queremos é a parte real de $z(t)$ que pode ser escrita como

$$x(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\varpi t + \theta) \quad (3.34)$$

A **Figura 3.3** mostra um gráfico desta solução. É aparente que o movimento ainda é um movimento harmônico, porém com uma amplitude que decresce com o tempo. As curvas $\pm Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}$ definem a envoltória das oscilações (as linhas interrompidas na figura). Note que a frequência do movimento, $\varpi = \sqrt{\omega^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$ é menor que a frequência natural ω do oscilador não amortecido. Na verdade, a **Figura 3.3** representa uma situação em que o amortecimento é fraco, $\Gamma/2 \ll \omega$. De fato, para um amortecimento forte, $\Gamma/2$ próximo de ω , as oscilações são muito lentas e até difíceis de serem observadas porque elas são amortecidas num tempo da ordem de $2/\Gamma$, curto, comparado com a escala de tempo longa das oscilações, $1/\varpi$.

Exercício 3.3. Encontre as constantes A e θ se em $t_0 = 0$ a posição e velocidade do oscilador são iguais a x_0 e v_0 , respectivamente.

Caso 2. Amortecimento supercrítico ($\Gamma/2 > \omega$).

Neste caso, as raízes (3.31) são reais, $p = -\frac{\Gamma}{2} \pm \beta$, onde $\beta = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega^2}$, e a posição do oscilador $x(t)$ é dada por

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \quad (3.35)$$

Como $\beta < \Gamma/2$,

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\Gamma}{2} - \beta\right)t} + Be^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + \beta\right)t} \quad (3.36)$$

é sempre a soma de duas exponenciais decrescentes. Não há movimento oscilatório neste caso, e, para tempos longos, a exponencial com $\Gamma/2 + \beta$ domina. Observe a **Figura 3.4**.

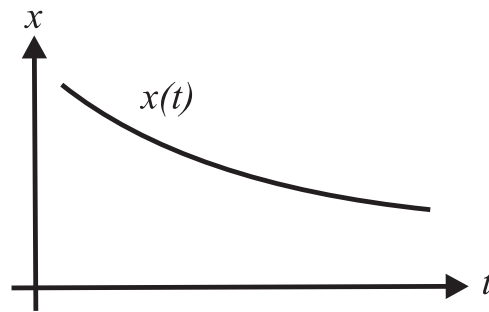


Figura 3.4: Posição em função do tempo para um oscilador com amortecimento supercrítico. É mostrado somente o comportamento para tempos longos.

Caso 3. Amortecimento crítico ($\Gamma/2 > \omega$).

Neste caso especial, as duas raízes (3.31) são iguais e, portanto, nosso método de solução da Equação diferencial (3.29) só produz uma solução, $e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$. Pode-se mostrar que, neste caso, uma outra solução é $te^{-\frac{\Gamma}{2}t}$ e assim, a solução geral quando $\Gamma/2 > \omega$ é

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (3.37)$$

Os casos 1, 2 e 3 são importantes em problemas envolvendo mecanismos que tendem a uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força de arrasto. O sistema de amortecimento do seu carro é um desses mecanismos, basicamente um oscilador amortecido. Mas em que tipo de amortecimento?

O OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

Dizemos que o movimento do oscilador é forçado quando ele está sob a ação de uma força adicional $F(t)$. Seu movimento será determinado pela equação linear não-homogênea

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega^2x = F(t)/m \quad (3.38)$$

O tipo de força mais interessante é o de uma força senoidal

$$F(t) = F_a \cos(\omega_a t + \theta_a) = \text{Re}(\tilde{F}_a e^{i\omega_a t}) \quad (3.39)$$

onde $\tilde{F}_a = F_a e^{i\theta_a}$, porque leva ao fenômeno de ressonância, onde a amplitude da oscilação se torna muito grande quando a frequência da

força aplicada ω_a se torna igual à frequência natural ω do oscilador livre. A equação diferencial que temos de resolver agora é

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega^2 z = (\tilde{F}_a / m) e^{i\omega_a t} \quad (3.40)$$

Vamos tentar uma solução da forma

$$z(t) = z_0 e^{i\omega_a t} \quad (3.41)$$

Então,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_a z_0 e^{i\omega_a t} \\ \ddot{z} &= -\omega_a^2 z_0 e^{i\omega_a t} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo na Equação (3.40) e resolvendo para z_0 , encontramos

$$z_0 = \frac{\tilde{F}_a / m}{\omega^2 - \omega_a^2 + i\Gamma\omega_a} \quad (3.43)$$

A solução (3.41) que estamos procurando é, então,

$$z(t) = \frac{(\tilde{F}_a / m) e^{i\omega_a t}}{\omega^2 - \omega_a^2 + i\Gamma\omega_a} \quad (3.44)$$

Nós queremos a parte real de $z(t)$. Isto pode ser feito muito simplesmente, e encontramos

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{(F_a / m)(\omega^2 - \omega_a^2)}{(\omega^2 - \omega_a^2)^2 + \Gamma^2 \omega_a^2} \right] \cos(\omega_a t + \theta_a) + \\ &\left[\frac{(F_a / m)\Gamma\omega_a}{(\omega^2 - \omega_a^2)^2 + \Gamma^2 \omega_a^2} \right] \sin(\omega_a t + \theta_a) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Podemos colocar esta solução numa forma mais simples definindo

$$R = \sqrt{(\omega^2 - \omega_a^2)^2 + \Gamma^2 \omega_a^2} \quad (3.46)$$

e reescrevendo

$$x(t) = \frac{F_a}{mR} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_a^2)}{R} \cos(\omega_a t + \theta_a) + \frac{\Gamma\omega_a}{R} \sin(\omega_a t + \theta_a) \right] \quad (3.47)$$

ou, finalmente,

$$x(t) = \frac{F_a}{mR} \sin(\omega_a t + \theta_a + \beta) \quad (3.48)$$

onde a fase β é definida por

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{R}, \cos \beta = \frac{\Gamma\omega_a}{R} \\ \tan \beta &= \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\Gamma\omega_a} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note que na Equação (3.45) ou na (3.48) não há constantes livres para serem determinadas pelas condições iniciais. Encontramos uma *solução particular* da Equação (3.38). Qual é a solução geral? Nós já resolvemos a equação homogênea, a Equação (3.29), cuja solução geral contém duas constantes a determinar. Pelo princípio da superposição, a solução da homogênea mais a solução particular, (3.45) ou (3.48), é uma solução da Equação (3.38). Assim, temos uma solução de uma equação diferencial linear não-homogênea de segunda ordem com duas constantes a determinar e, portanto, temos a solução geral da (3.38). Por exemplo, para o oscilador harmônico com amortecimento subcrítico, a solução geral é

$$x(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\varpi t + \theta) + \frac{F_a}{mR} \sin(\omega_a t + \theta_a + \beta) \quad (3.50)$$

Note que a parte que corresponde à solução da equação homogênea vai a zero exponencialmente com o tempo e, por este motivo, é chamada *transiente*. A parte que permanece é chamada *estado estacionário*. O transiente depende das condições iniciais. O estado estacionário, que permanece quando o transiente se vai, é independente das condições iniciais.

Exemplo 3.3. (a) No estado estacionário, calcule a taxa média com que o trabalho está sendo realizado sobre o oscilador pela força aplicada.

A potência $P = \dot{x}F(t)$ é igual a

$$\begin{aligned} P &= \frac{F_a^2 \omega_a}{mR} \cos(\omega_a t + \theta_a) \cos(\omega_a t + \theta_a + \beta) \\ &= \frac{F_a^2 \omega_a}{mR} \cos \beta \cos^2(\omega_a t + \theta_a) - \frac{F_a^2 \omega_a}{2mR} \sin \beta \sin 2(\omega_a t + \theta_a) \end{aligned} \quad (3.51)$$

O último termo à direita da (3.51) é zero em média, enquanto o valor médio de $\cos^2(\omega_a t + \theta_a)$ sobre um ciclo completo é $\frac{1}{2}$. Portanto, a potência média fornecida pela força aplicada é

$$P_{\text{média}} = \frac{F_a^2 \omega_a}{2mR} \cos \beta = \frac{1}{2} F_a \dot{x}_m \cos \beta \quad (3.52)$$

onde \dot{x}_m é o valor máximo de \dot{x} . O fator $\cos \beta$ é chamado *fator de potência*.

(b) Mostre que, no estado estacionário, a potência é fornecida ao oscilador na mesma taxa média com que a potência está sendo dissipada pelo atrito.

O módulo da potência dissipada pela força de arrasto é $P_{arr} = m\Gamma\dot{x}^2$. Substituindo o valor da velocidade, temos

$$P_{arr} = m\Gamma \frac{F_a^2}{m^2} \frac{\omega_a^2}{R^2} [\cos(\omega_a t + \theta_a) \cos \beta - \sin(\omega_a t + \theta_a) \sin \beta]^2 \quad (3.53)$$

Tomando o valor médio desta quantidade, obtemos

$$\begin{aligned} P_{média} &= m\Gamma \frac{F_a^2}{m^2} \frac{\omega_a^2}{R^2} \left[\frac{1}{2} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \right] \\ &= \frac{F_a^2 \omega_a}{2mR} \frac{\Gamma \omega_a}{R} = \frac{F_a^2 \omega_a}{2mR} \cos \beta \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde, na segunda linha, usamos o valor de $\cos \beta$ que está dado na (3.49). Este resultado coincide com o obtido em (3.52).

RESSONÂNCIA

A amplitude do movimento no regime estacionário, na Equação (3.48), é proporcional a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_a^2)^2 + \Gamma^2 \omega_a^2}} \quad (3.55)$$

O termo *ressonância* é usado para descrever a situação em que a amplitude das oscilações tem o maior valor possível.

Exercício 3.4. Mostre que, se ω for a frequência do oscilador, o valor máximo da amplitude ocorrerá para uma frequência da força aplicada

$$\omega_a = \sqrt{\omega^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (3.56)$$

O caso mais interessante é o do amortecimento fraco, $\Gamma \ll \omega$, quando temos da (3.56) que a ressonância ocorre para $\omega_a \approx \omega$. Note na (3.49) que, neste caso, a fase β é igual a zero (isto porque, para $\omega_a \approx \omega$, $\cos \beta \approx 1$). Como consequência, na ressonância, a potência média fornecida (3.52) é máxima.

O que significa a fase $\beta = 0$? Fazendo $\beta = 0$ na (3.48) e comparando com a (3.39), vemos que a força é máxima quando $x(t)$ é zero, ou seja, quando a velocidade da partícula é máxima. Isto faz sentido. Se você quiser que a amplitude se torne grande, então você precisará dar ao sistema tanta energia quanto você possa. Mas, para isso, sua força deverá atuar sobre a partícula por uma distância tão grande quanto possível, de modo a realizar o maior trabalho possível. Isto significa que você deve aplicar sua força quando a partícula estiver se movendo mais rapidamente, isto é, quando ela estiver passando pela origem.

Efeitos de ressonância são de grande importância em muitas aplicações práticas da Mecânica. Ao projetar a estrutura de uma ponte (ou um edifício), por exemplo, um engenheiro deve fazê-lo de modo a evitar os efeitos de ressonância provocados por ventos muito fortes durante temporais que poderiam destruí-la.

RESUMO

Fizemos aqui uma revisão do oscilador harmônico com amortecimento e forçado com ênfase no problema de solução de equações diferenciais lineares, homogêneas e não-homogêneas. Vimos que, para equações lineares, muito importantes na Física, vale o Princípio da Superposição. Finalmente, o problema de ressonância, que deve merecer especial atenção, também foi abordado.

PROBLEMAS

3.1. Uma massa na extremidade de uma mola é liberada do repouso na posição x_0 . A experiência é repetida, mas agora com o sistema imerso num fluido que faz com que o movimento seja criticamente amortecido. Mostre que a máxima velocidade da massa no primeiro caso é e, multiplicado pela velocidade máxima no segundo caso.

3.2. No caso de amortecimento crítico, $\Gamma/2 = \omega$, onde ω é a frequência natural do oscilador, nós dissemos, sem demonstrar, que a solução geral da equação do movimento é

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (3.57)$$

Mostre que esta é de fato a solução para amortecimento crítico, supondo uma solução da forma $x(t) = y(t) \exp(-\Gamma t/2)$ e determinando a função $y(t)$.

3.3. Se a amplitude de um oscilador amortecido decresce a 1/e de seu valor inicial após n períodos, mostre que a frequência do oscilador deve ser aproximadamente $[1 - (8\pi^2 n^2)^{-1}]$ vezes do oscilador não amortecido correspondente.

3.4. Considere um oscilador harmônico não amortecido descrito pela equação do movimento

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (3.58)$$

A força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, de frequência angular ω , é ligada no instante t .

(a) Encontre a solução geral da equação do movimento para tempos $t \geq 0$.

(b) Para as condições iniciais $x(t=0) = 0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$, mostre que o deslocamento do sistema para tempos $t \geq 0$ é dado por

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (3.59)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do oscilador.

(c) Tome o limite $\omega \rightarrow \omega_0$ do resultado do item (b) para mostrar que, quando o oscilador é forçado na sua frequência natural, o deslocamento como função do tempo é dado por

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (3.60)$$

Comente sobre o significado físico deste resultado.

3.5. Fator Q de um sistema oscilante. Nós vimos no texto da aula que a amplitude do estado estacionário de um oscilador, amortecido e sob a ação de uma força externa senoidal, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, é dada por

$$D(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} \quad (3.61)$$

onde aqui estamos representando a frequência natural do oscilador por ω_0 . Vimos também (na verdade, pedimos para você mostrar) que $D(\omega)$ é máxima (ressonância) quando a frequência da força aplicada é igual a

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (3.62)$$

que é chamada frequência de ressonância.

O grau de amortecimento de um sistema oscilante costuma ser medido em termos do *fator de qualidade* Q do sistema:

$$Q = \frac{\omega_R}{\Gamma} \quad (3.63)$$

(a) Escreva a amplitude $D(\omega)$ em termos de Q . Considere o caso de amortecimento fraco e faça um gráfico de D para diversos valores de Q e comente seus resultados.

(b) Ainda considerando amortecimento fraco, mostre que, se a frequência da força aplicada for próxima da ressonância, o Q do sistema é aproximadamente

$$Q \cong 2\pi \times \left(\frac{\text{Energia total}}{\text{Energia perdida durante um período}} \right) \quad (3.64)$$

3.6. Considere um oscilador harmônico amortecido com $m = 10\text{kg}$, $k = 250\text{ N/m}$ e $b = m\Gamma = 60\text{kg/s}$. Este oscilador está sob a ação de uma força externa dada por $F_0 \cos(\omega t)$, onde $F_0 = 48\text{N}$.

- (a) Que valor de ω resulta em oscilações de estado estacionário com amplitude máxima?
- (b) Qual é o valor da amplitude máxima?
- (c) Quando ω tem o valor encontrado na parte (a), qual é o ângulo de fase ϕ ?

3.7. Considere um oscilador harmônico amortecido cuja equação do movimento é

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (3.65)$$

(a) Tomando a derivada temporal da energia mecânica total do oscilador, $E = T + V$, e usando a equação do movimento, mostre que a taxa de perda de energia é

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \quad (3.66)$$

(b) Mostre que para um oscilador com amortecimento crítico ($b/2m = \omega_0$), para o qual as condições iniciais são $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$, a taxa na qual o oscilador perde energia é

$$\frac{dE}{dt} = -(2m)^{-4} b^5 x_0^2 t^2 e^{-bt/m} \quad (3.67)$$

(c) Para o oscilador do item (b), calcule a energia total perdida após uma quantidade de tempo infinita.

$$\text{Energia perdida} = \int_0^\infty \frac{dE}{dt} dt \quad (3.68)$$

e verifique que ela é igual à energia total inicial do oscilador.

3.8. Considere um oscilador amortecido com $m = 1$ kg, $k = 50$ N/m e $b = m\Gamma = 10$ kg/s. Se as condições iniciais são $x(t=0) = 0,1$ m e $\dot{x}(t=0) = 0$, encontre o movimento subsequente do sistema.

SOLUÇÕES

3.1. No caso não amortecido, a forma geral de x é $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$. A condição inicial $\dot{x}(0) = 0$ nos diz que $\theta = 0$ e, então, a condição inicial $x(0) = x_0$ nos diz que $A = x_0$. Portanto,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (3.69)$$

e

$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) \quad (3.70)$$

O valor máximo da velocidade é, então, ωx_0 .

No caso do amortecimento crítico, $x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$. Aplicando as condições iniciais, $x(0) = x_0 \rightarrow A = x_0$, $\dot{x}(0) = 0 \rightarrow B = (\Gamma/2)x_0$. Assim,

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\Gamma}{2}t \right) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (3.71)$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo, obtemos para a velocidade

$$v(t) = -x_0 \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 t e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (3.72)$$

Para obter a velocidade máxima, derivamos a equação (3.72) em relação ao tempo e igualamos o resultado a zero:

$$\frac{dv}{dt} = -x_0 \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \left[e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(1 - \frac{\Gamma}{2}t \right) \right] = 0 \quad (3.73)$$

Logo, a velocidade atingirá o valor máximo no instante t_m dado por

$$1 - \frac{\Gamma}{2}t_m = 0 \rightarrow t_m = \frac{2}{\Gamma} \quad (3.74)$$

Substituindo este valor na Equação (3.72), encontramos

$$v_m = |v(t_m)| = x_0 \frac{\Gamma}{2} e^{-1} \quad (3.75)$$

A razão entre o valor da velocidade máxima para o caso não amortecido e o valor encontrado acima é, então,

$$\frac{\omega x_0}{x_0 \frac{\Gamma}{2} e^{-1}} = e \quad (3.76)$$

onde usamos que, no amortecimento crítico, $\omega = \Gamma/2$.

3.2. Seja $x(t) = y(t) \exp(-\Gamma t/2)$. Então,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} - \frac{\Gamma}{2} y e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \\ \ddot{x} &= \ddot{y} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} - 2 \left(\frac{\Gamma}{2} \right) \dot{y} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 y e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Substituindo estes resultados na equação do movimento, achamos

$$(\ddot{y} - \Gamma \dot{y} + \frac{\Gamma^2}{4} y + \Gamma \dot{y} - 2 \frac{\Gamma^2}{4} y + \omega^2 y) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} = (\ddot{y} + \left(\omega^2 - \frac{\Gamma^2}{4} \right) y) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} = 0 \quad (3.78)$$

ou,

$$\ddot{y} + \left(\omega^2 - \frac{\Gamma^2}{4} \right) y = 0 \quad (3.79)$$

Para o amortecimento crítico, $\Gamma/2 = \omega$, e esta equação se reduz a

$$\ddot{y} = 0 \quad (3.80)$$

cujas soluções gerais são

$$y(t) = A + Bt \quad (3.81)$$

onde A e B são constantes. Assim, chegamos à Equação (3.57).

3.3. O movimento de um oscilador amortecido somente é periódico quando o amortecimento é subcrítico ($\Gamma/2 < \omega$), onde ω é a frequência do oscilador. Neste caso, temos a solução

$$x(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\varpi t + \theta) \quad (3.82)$$

onde $\varpi = \sqrt{\omega^2 - \Gamma^2/4}$. Seja $\tau = 2\pi/\varpi$ o período do oscilador. Então, do enunciado do problema,

$$A e^{-\frac{\Gamma}{2}(t+n\tau)} = \frac{1}{e} A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \Rightarrow \frac{\Gamma}{2} n\tau = 1 \quad (3.83)$$

de onde segue que

$$\varpi = n\pi\Gamma \quad (3.84)$$

Agora,

$$\omega^2 = \varpi^2 + \frac{\Gamma^2}{4} = \varpi^2 + \frac{\varpi^2}{4n^2\pi^2} = \varpi^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2\pi^2} \right) \quad (3.85)$$

Portanto,

$$\frac{\varpi}{\omega} = \left(1 + \frac{1}{4n^2\pi^2} \right)^{-1/2} \quad (3.86)$$

Como $4n^2\pi^2 \gg 1$, podemos expandir o segundo membro desta equação, mantendo somente o primeiro termo da expansão. Logo,

$$\varpi \approx \left(1 - \frac{1}{8n^2\pi^2} \right) \omega \quad (3.87)$$

3.4. (a) Queremos resolver a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.88)$$

Você já sabe que a solução geral desta equação é obtida somando-se à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação não-homogênea. A solução da equação homogênea $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ é

$$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (3.89)$$

Para encontrar uma solução particular da equação não-homogênea, podemos repetir a dedução no texto da aula, ou você pode, guiado por sua intuição, tentar uma solução da forma

$$x_p(t) = D \cos(\omega t) \quad (3.90)$$

Substituindo esta solução tentativa na Equação (3.88), obtemos

$$-\omega^2 D \cos(\omega t) + \omega_0^2 D \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.91)$$

e, portanto,

$$D = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.92)$$

Logo, a solução geral da Equação (3.88) é

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (3.93)$$

(b) Usando as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, temos

$$x(0) = A \cos \theta + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \quad (3.94)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 \sin \theta = 0$$

Assim, $\theta = 0$ e

$$A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.95)$$

Colocando tudo junto, achamos

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (3.96)$$

(c) Quando $\omega \rightarrow \omega_0$, tanto o numerador quanto o denominador da Equação (3.96) vão a zero, e portanto devemos ser cuidadosos ao tomar esse limite. Expandindo o numerador em torno de $\omega = \omega_0$, temos

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) &= \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \Big|_{\omega=\omega_0} \\ &+ \frac{d}{d\omega} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2) \\ &= (-t \sin(\omega_0 t))(\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Assim,

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \left((-t \sin(\omega_0 t))(\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2) \right) \quad (3.98)$$

ou

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega + \omega_0)} t \sin(\omega_0 t) + O((\omega - \omega_0)) \quad (3.99)$$

Portanto, quando tomamos o limite $\omega \rightarrow \omega_0$, obtemos

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (3.100)$$

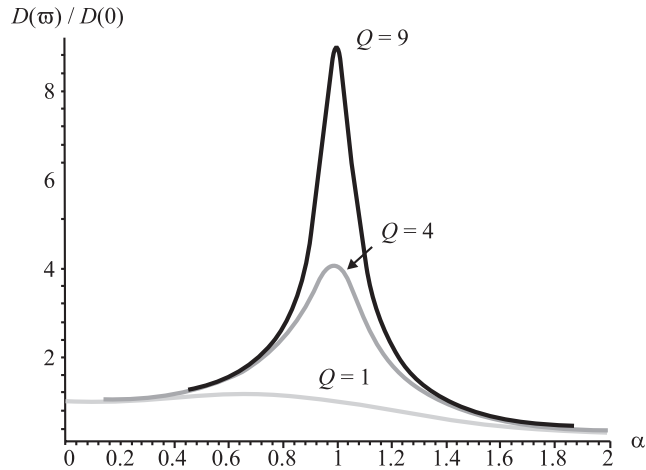
Vemos que quando forçamos o oscilador harmônico não amortecido na sua frequência de ressonância, a resposta diverge linearmente com o tempo.

3.5. (a) Quando o amortecimento é fraco, $\Gamma \ll \omega_0$, podemos fazer $\omega_R \approx \omega_0$ e, assim,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} \text{ (amortecimento fraco)} \quad (3.101)$$

Introduzindo a variável adimensional $\alpha = \omega / \omega_0$, reescrevemos a amplitude $D(\omega)$ como:

$$D(\omega) = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2} \alpha^2}} = \frac{D(0)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \frac{\alpha^2}{Q^2}}} \quad (3.102)$$



Na figura, mostramos um gráfico de $D(\omega)/D(0)$ em função de α . À medida que o fator Q cresce (isto é, que o amortecimento diminui), a forma da curva de ressonância toma a forma de um pico cada vez mais estreito em torno de $\alpha = 1$ ($\omega = \omega_0$). Num sistema sem nenhum amortecimento (ver problema anterior), a amplitude seria infinita na frequência de ressonância.

(b) Desde que o amortecimento é fraco e a frequência da força aplicada está próxima da ressonância, temos que $\omega_R \approx \omega_0 \approx \omega$ e $Q = \omega_0/\Gamma$. Para obter a energia total, nós usaremos a solução do oscilador forçado desprezando os transientes:

$$x(t) = D(\omega)\cos(\omega t - \phi) \quad (3.103)$$

(Compare esta expressão com a que foi escrita no texto da aula. Aqui, definimos a fase fazendo $\cos\phi = (\omega_0^2 - \omega^2)/R$, $\sin\phi = \Gamma\omega/R$, e tal que $\tan\phi = \Gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$. É esta definição que estaremos usando no problema seguinte.)

A energia total do oscilador é

$$\omega_R \approx \omega_0 \approx \omega$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{mD^2}{2} \left[\omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t - \phi) \right] \cong \frac{mD^2\omega_0}{2} \end{aligned} \quad (3.104)$$

A potência dissipada é

$$P = m\Gamma\dot{x}^2 \quad (3.105)$$

e portanto, a energia dissipada em um ciclo é

$$E_d = \int_0^{2\pi/\omega} m\Gamma\dot{x}^2 dt = m\Gamma\omega^2 D^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + \beta) dt \cong \pi m\Gamma\omega_0^2 D^2 \quad (3.106)$$

Então,

$$\frac{\text{Energia total}}{\text{Energia perdida durante um período}} \cong \frac{mD^2\omega_0^2/2}{\pi m\Gamma\omega_0 D^2} = \frac{\omega_0}{2\pi\Gamma} \cong \frac{Q}{2\pi} \quad (3.107)$$

como queríamos mostrar.

3.6. (a) Para um oscilador com os parâmetros dados, o quadrado da frequência natural na ausência de amortecimento é

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{250\text{N/m}}{10\text{kg}} = 25\text{s}^{-2} \quad (3.108)$$

e o parâmetro de amortecimento é

$$\Gamma = \frac{60\text{kg/s}}{10\text{kg}} = 6,0\text{s}^{-1} \quad (3.109)$$

Assim, a frequência angular de ressonância é

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} = \sqrt{25\text{s}^{-2} - \frac{36\text{s}^{-2}}{2}} = 2,65\text{s}^{-1} \quad (3.110)$$

(b) A amplitude na ressonância é dada por

$$\begin{aligned} D(\omega_R) &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + \Gamma^2\omega_R^2}} \\ &= \frac{F_0/m}{\Gamma\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}} = \frac{48\text{N}/10\text{kg}}{6\text{s}^{-1}\sqrt{25\text{s}^{-2} - 36\text{s}^{-2}/4}} = 0,2\text{m} \end{aligned} \quad (3.111)$$

(c) O ângulo de fase na ressonância é

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma\omega_R}{\omega_0^2 - \omega_R^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega_R}{\Gamma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 2,65\text{s}^{-1}}{6\text{s}^{-1}}\right) = 41,4^\circ \quad (3.112)$$

3.7. (a) A energia mecânica do oscilador é

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.113)$$

Para encontrar a taxa de perda de energia, tomamos a derivada temporal de E ,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} \quad (3.114)$$

e, usando a equação do movimento, $m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$,

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \quad (3.115)$$

(b) Para um oscilador com amortecimento crítico, o deslocamento como função do tempo é dado por

$$x(t) = (A + Bt) e^{-bt/2m} \quad (3.116)$$

As constantes A e B são determinadas a partir das condições iniciais. Vamos precisar da velocidade

$$\dot{x}(t) = \left(B - \frac{b}{2m}A - \frac{b}{2m}Bt\right) e^{-bt/2m} \quad (3.117)$$

Agora,

$$\begin{aligned} x(t=0) = x_0 &\Rightarrow A = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 &\Rightarrow B = \frac{b}{2m}A = \frac{b}{2m}x_0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

A velocidade como função do tempo é, então,

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{b}{2m}\right)^2 x_0 t e^{-bt/2m} \quad (3.119)$$

Substituindo esta equação na (3.115), obtemos

$$\frac{dE}{dt} = -(2m)^{-4} b^5 x_0^2 t^2 e^{-bt/m} \quad (3.120)$$

(c) A energia perdida num tempo infinito é

$$\int_0^\infty \frac{dE}{dt} dt = -(2m)^{-4} b^5 x_0^2 \int_0^\infty t^2 e^{-bt/m} dt = -\frac{1}{2} m \left(\frac{b}{2m}\right)^2 x_0^2 \quad (3.121)$$

desde que

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha^3} \quad (3.122)$$

E, desde que $b/2m = \omega_0$ no amortecimento crítico, temos

$$\text{Energia perdida} = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 = -\frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_0^2 = -\frac{1}{2} k x_0^2 \quad (3.123)$$

que é exatamente igual ao negativo da energia mecânica total inicial, desde que $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$.

3.8. Para este oscilador, $\Gamma/2 = (10 \text{ kg/s})/2 \times 1 \text{ kg} = 5 \text{ s}^{-1}$, e a frequência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50 \text{ N/m}}{1 \text{ kg}}} = 7,1 \text{ s}^{-1} \quad (3.124)$$

Desde que $\Gamma/2 < \omega_0$, o amortecimento é subcrítico. O deslocamento em função do tempo é, portanto, dado por

$$x(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\varpi t + \theta) \quad (3.125)$$

onde

$$\varpi = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} = \sqrt{(7,1)^2 - (5,0)^2} \text{ s}^{-1} = 5,0 \text{ s}^{-1} \quad (3.126)$$

Usando as condições iniciais,

$$x(0) = A \cos \theta = 0,1 \text{ m} \quad (3.127)$$

e

$$\dot{x}(0) = A\left(-\frac{\Gamma}{2} \cos \theta - \varpi \sin \theta\right) = 0 \quad (3.128)$$

Da Equação (3.128),

$$\tan \theta = -\frac{\Gamma}{2\varpi} = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \quad (3.129)$$

e, da Equação (3.127), segue que

$$A = \frac{2}{\sqrt{2}} 0,1 \text{ m} = \sqrt{2} 0,1 \text{ m} \quad (3.130)$$

Assim,

$$x(t) = \sqrt{2}(0,1 \text{ m}) e^{-(5,0 \text{ s}^{-1})t} \cos\left((5,0 \text{ s}^{-1})t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.131)$$

Oscilações acopladas

AULA 4

Meta da aula

Estudar o movimento de sistemas lineares acoplados por meio da superposição de seus modos normais de oscilação.

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- encontrar os modos normais e as coordenadas normais de dois sistemas lineares acoplados;
- escrever a solução geral do movimento de dois sistemas lineares acoplados e determinar as constantes envolvidas a partir das condições iniciais dadas.

O MISTÉRIO DOS RELÓGIOS DE HUYGENS

O famoso físico holandês Christiaan Huygens inventou o relógio de pêndulo em 1657. Ele introduziu placas cicloidais para confinar a suspensão do pêndulo, de modo que o pêndulo seguisse uma trajetória isócrona, independente da amplitude. Huygens estava tentando resolver o grande problema da época, que era construir um relógio suficientemente preciso para, transportado em um navio, poder determinar a longitude, essencial para as grandes navegações.

Huygens, numa carta a seu pai, relatou uma coisa muito curiosa que observou quando dois relógios de pêndulo eram suspensos um ao lado do outro. Seu estudo de dois relógios operando simultaneamente tinha uma razão prática: era preciso levar mais de um relógio no navio, porque se um relógio parasse (ou tivesse de ser limpo), então o outro continuaria dando as horas. Ele notou que, depois de algum tempo, os pêndulos passavam a oscilar com a mesma frequência e em oposição de fase, ou seja, quando um estava se deslocando para a direita o outro se deslocava para a esquerda, e vice-versa. Se ele alterasse o movimento de um dos pêndulos, bastava esperar e eles voltariam a oscilar com exatamente a mesma frequência e 180 graus fora de fase, e assim permaneciam oscilando indefinidamente.

Uma pessoa que tenha o conhecimento de Física que você já possui e que tenha sido educada, como você, a pensar segundo a ótica do método científico logo tentará encontrar uma explicação para o fenômeno.

Nesta aula, vamos estudar osciladores acoplados. Veremos que o movimento de cada oscilador pode ser descrito como uma superposição de oscilações harmônicas simples, características do sistema, os chamados *modos normais*. Esperamos que, ao final da aula, sabendo o que são os modos normais, você tenha uma idéia de como explicar o comportamento intrigante dos relógios de Huygens.

OSCILADORES ACOPLADOS. MODOS NORMAIS

Consideremos duas massas iguais, m , ligadas por molas de mesma constante k , como mostrado na **Figura 4.1**:

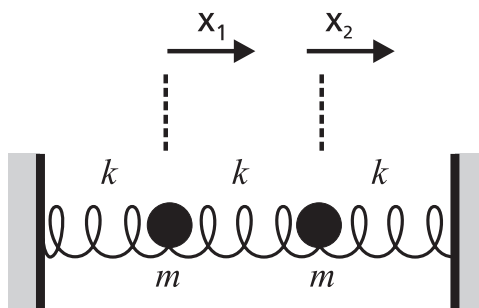


Figura 4.1: Dois osciladores idênticos acoplados. x_1 e x_2 são os deslocamentos a partir das posições de equilíbrio, indicadas por linhas tracejadas.

Queremos as posições das massas como funções do tempo. Estaremos supondo, nesta aula, que as partículas só podem se mover em uma dimensão que escolhemos como sendo ao longo do eixo dos x . Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as posições das massas da esquerda e da direita, respectivamente, como visto na **Figura 4.1**, onde indicamos as posições de equilíbrio por linhas tracejadas. As equações do movimento são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ou

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\omega^2 = k/m$. É muito importante que você se convença de que, para os deslocamentos mostrados na **Figura 4.1**, as equações do movimento são mesmo escritas como em (4.1).

As Equações (4.2) são equações diferenciais lineares de segunda ordem *acopladas*, porque as variáveis x_1 e x_2 aparecem em ambas. Como o sistema tem dois graus de liberdade (é descrito pelas duas variáveis x_1 e x_2), a solução geral das Equações (4.2) deverá ter quatro constantes arbitrárias, que serão ajustadas pelas quatro condições iniciais (velocidade e posição iniciais para cada partícula). Vamos a seguir encontrar essa solução geral.

No caso das Equações (4.2), é muito simples encontrar combinações lineares de x_1 e x_2 que levam a equações desacopladas. Somando membro a membro as equações, obtemos

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (4.3)$$

Esta equação envolve as variáveis x_1 e x_2 somente por meio da soma $x_1 + x_2$. A solução da Equação (4.3) já conhecemos

$$x_1 + x_2 = B_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad (4.4)$$

Podemos também tomar a diferença das Equações (4.2). O resultado é

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\omega^2(x_1 - x_2) = 0 \quad (4.5)$$

Agora temos as variáveis x_1 e x_2 aparecendo somente através da combinação $x_1 - x_2$. A solução é

$$x_1 - x_2 = B_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \quad (4.6)$$

Tomando a soma e a diferença das Equações (4.4) e (4.6), nós achamos que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dados por

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \quad (4.7)$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \quad (4.8)$$

onde os A s são metade dos B s.

As combinações $x_1 + x_2$ e $x_1 - x_2$ são chamadas *coordenadas normais do sistema*. Elas oscilam com uma frequência pura cada uma, os chamados modos normais do sistema. As Equações (4.7) e (4.8) são a solução geral das Equações (4.2). Como esperado, dependem das quatro constantes arbitrárias A_1 , A_2 , ϕ_1 , e ϕ_2 que devem ser determinadas pelas condições iniciais. Antes de discutirmos a interpretação física destes resultados, vamos ver um método geral de solução das Equações (4.2) que não envolve nossa capacidade de brincar com elas e encontrar as combinações de variáveis adequadas.

Podemos resolver as Equações (4.2) por uma extensão do método da aula passada, aplicável a qualquer conjunto de equações diferenciais lineares simultâneas com coeficientes constantes. Fazemos

$$x_1 = C_1 e^{pt} \quad (4.9)$$

$$x_2 = C_2 e^{pt} \quad (4.10)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Note que estamos supondo uma mesma dependência temporal em x_1 e x_2 de modo que o fator e^{pt} seja cancelado quando (4.9) e (4.10) forem substituídas nas Equações (4.2). Podemos reescrever as duas Equações (4.9) e (4.10) numa notação sugestiva:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{pt} \quad (4.11)$$

Substituindo essa tentativa de solução nas Equações (4.2) e dividindo por e^{pt} , obtemos

$$\begin{aligned} (p^2 + 2\omega^2)C_1 - \omega^2 C_2 &= 0 \\ (p^2 + 2\omega^2)C_2 - \omega^2 C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

ou, equivalentemente, numa forma matricial,

$$\begin{pmatrix} p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & p^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Esta equação homogênea para C_1 e C_2 terá solução não trivial (isto é, onde C_1 e C_2 não sejam ambos iguais a zero) somente se a matriz não tiver inversa. É fácil de ver que isto é verdade porque, se pudermos inverter a matriz, então basta multiplicar a Equação (4.13) pela inversa para obter $(C_1, C_2) = (0, 0)$. Por outro lado, uma matriz não terá inversa quando seu determinante for igual a zero. Como estamos querendo uma solução não trivial para C_1 e C_2 , vamos fazer o determinante da matriz na (4.13) igual a zero:

$$0 = \begin{vmatrix} p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & p^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = (p^2 + 2\omega^2)^2 - \omega^4 \quad (4.14)$$

As raízes desta equação são $p = \pm i\omega$ e $p = \pm i\sqrt{3}\omega$. Nós encontramos, portanto, quatro tipos de solução que correspondem a quatro funções de base. Se $p = \pm i\omega$, pondo este resultado de volta na (4.12), achamos

$C_1 = C_2$. (As duas equações dão o mesmo resultado.) E, se $p = \pm i\sqrt{3}\omega$, então temos da (4.12) que $C_1 = -C_2$. (De novo, as equações são redundantes.) As quatro funções de base são:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i\sqrt{3}\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t} \quad (4.15)$$

(Lembre-se de que o *número de funções de base é igual a duas vezes o número de graus de liberdade*.) A solução geral é, de acordo com o princípio da superposição,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\omega t} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i\sqrt{3}\omega t} + B_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t} \quad (4.16)$$

onde B_1, B_2, B_3 e B_4 são constantes complexas que temos de escolher de modo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam reais. Fazendo $B_2^* = B_1 = A_1 e^{i\phi_1}$ e $B_4^* = B_3 = A_2 e^{i\phi_2}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \quad (4.17)$$

que nada mais é que as Equações (4.7) e (4.8) escritas na forma vetorial.

Vejamos agora a interpretação física dos modos normais. A solução (4.17) não corresponde em geral a um movimento harmônico simples para x_1 e x_2 . Podemos no entanto escolher condições iniciais tais que $A_2 = 0$. Basta fazer $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ e, $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0)$, ou seja, dar um mesmo deslocamento inicial e mesma velocidade inicial para cada partícula. Neste caso,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) = x_2(t) \quad (4.18)$$

As partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre *em fase*. Este modo normal, visto na **Figura 4.2**, é chamado de *modo simétrico*.

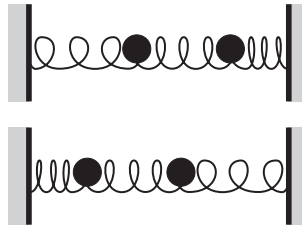


Figura 4.2: Modo de oscilação simétrico: as partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em fase.

Escolhendo as condições iniciais $x_1(t_0) = -x_2(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0) = -\dot{x}_2(t_0)$, então $A_1 = 0$ e

$$x_1(t) = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) = -x_2(t) \quad (4.19)$$

As partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em *oposição de fase*. Este modo normal é chamado *modo anti-simétrico*. Nele os deslocamentos das partículas são sempre iguais e contrários. Veja a Figura 4.3.

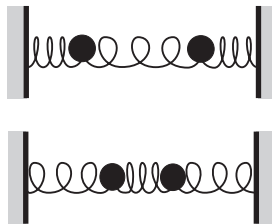


Figura 4.3: Modo anti-simétrico: as partículas oscilam com a mesma frequência, mas em oposição de fase.

OUTRO EXEMPLO DE OSCILADORES ACOPLADOS: PÊNDULOS ACOPLADOS

Consideremos dois pêndulos idênticos acoplados por uma mola de constante k (Figura 4.4). Seja m a massa de cada pêndulo. Chamando de l o comprimento comum, a frequência de suas oscilações livres será

$$\omega^2 = \sqrt{l/g} \quad (4.20)$$

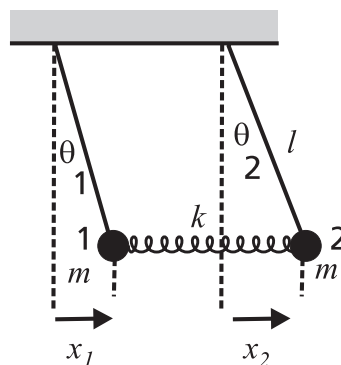


Figura 4.4: Dois pêndulos acoplados. θ_1 e θ_2 são os deslocamentos angulares a partir da posição de equilíbrio do pêndulo 1 e do pêndulo 2, respectivamente.

Para pequenos deslocamentos x_1 e x_2 , podemos confundir os arcos descritos com as cordas, ou seja, $x_1 \approx l\theta_1$ e $x_2 \approx l\theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de desvio. Nesta aproximação, a componente tangencial da força gravitacional sobre cada partícula será:

$$\begin{aligned} -mg\theta_1 &\approx -mgx_1/l = -m\omega^2x_1, \text{ para a partícula 1, e} \\ -mg\theta_2 &\approx -mgx_2/l = -m\omega^2x_2, \text{ para a partícula 2.} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além da força gravitacional, cada partícula sofre a ação da mola. Para os deslocamentos positivos arbitrários indicados na **Figura 4.4**, a força sobre a partícula 1 é $-k(x_1 - x_2)$ e a força sobre a partícula 2 será igual e contrária, ou seja, $-k(x_2 - x_1)$. Assim, as equações do movimento para pequenas oscilações das duas partículas são

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -m\omega^2x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -m\omega^2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ou, dividindo por m ,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2x_1 + \omega_0^2(x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2x_2 + \omega_0^2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. Note que o movimento de um pêndulo é, na verdade, bidimensional, mas, para oscilações de pequenas amplitudes, pode ser tratado como um movimento unidimensional.

Das Equações (4.23), vemos que o sistema de dois pêndulos acoplados é equivalente a um sistema de duas massas iguais e três molas, semelhante ao da **Figura 4.1**, porém, com a mola do meio tendo uma constante de mola diferente das outras duas. (Se nas Equações (4.23) fizermos $\omega_0 = \omega$, encontraremos exatamente as Equações (4.2).) Portanto, já sabemos quais são os modos normais dos dois pêndulos acoplados: o modo simétrico está mostrado na **Figura 4.5.a**, e o modo anti-simétrico, na **Figura 4.5.b**.

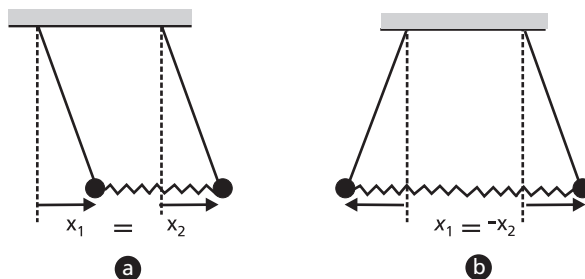


Figura 4.5: (a) Modo simétrico; (b) modo anti-simétrico.

Para determinar as frequências de cada modo, basta notar que, no modo normal simétrico, a mola não sofre deformação e, portanto, os pêndulos oscilam com a frequência livre ω . No modo anti-simétrico, $x_1 = -x_2$, e substituindo esta condição, por exemplo, na equação para o pêndulo 1 (a primeira equação na (4.23)), ficamos com

$$\ddot{x}_1 + (\omega^2 + 2\omega_0^2)x_1 = 0 \quad (4.24)$$

Logo, a frequência do modo anti-simétrico é $\omega_2 = \omega^2 + 2\omega_0^2$.

Estes resultados sobre modos normais podem ser generalizados para pequenas oscilações em torno do equilíbrio estável de um sistema com um número qualquer de partículas acopladas. Um sistema unidimensional com N partículas tem N graus de liberdade e, portanto, N modos normais de vibração. Cada modo normal corresponde a uma frequência de oscilação comum a todas as partículas.

Quando o sistema unidimensional com N partículas está isolado, o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Isto significa que, em uma dimensão, uma das frequências dos modos normais é zero, correspondendo a um movimento de corpo rígido do sistema. Se o problema de N partículas estiver sendo tratado em três dimensões, o número de graus de liberdade de corpo rígido crescerá, em geral, para seis. O sistema poderá transladar-se uniformemente ao longo dos três eixos de coordenadas ou realizar rotações uniformes em torno dos eixos. Portanto, em um sistema geral de N partículas em três dimensões, existirão seis frequências nulas e somente $3N - 6$ frequências normais de vibração. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. A Figura 4.6 mostra um sistema constituído por duas partículas idênticas de massa M ligadas a uma partícula central de massa m por molas idênticas de constante elástica k .

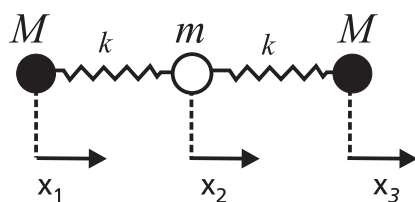


Figura 4.6: Sistema de três partículas acopladas por molas.

Sejam x_1, x_2 e x_3 os deslocamentos longitudinais das três partículas a partir das respectivas posições de equilíbrio. As equações do movimento para x_1, x_2 e x_3 são

$$M\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \quad (4.25)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_3) - k(x_2 - x_1) \quad (4.26)$$

$$M\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) \quad (4.27)$$

Introduzindo as frequências $\omega = \sqrt{k/M}$ e $\varpi = \sqrt{k/m}$, as Equações (4.25) a (4.27) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\varpi^2 x_2 - \varpi^2 (x_1 + x_3) &= 0 \\ \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 - \omega^2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Usando nosso método de solução de equações diferenciais lineares simultâneas com coeficientes constantes, fazemos nas Equações (4.28)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{pt} \quad (4.29)$$

e obtemos,

$$\begin{pmatrix} p^2 + \omega^2 & -\omega^2 & 0 \\ -\varpi^2 & p^2 + 2\varpi^2 & -\varpi^2 \\ 0 & -\omega^2 & p^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.30)$$

Como antes, esta equação tem solução não trivial se o determinante da matriz for igual a zero, o que dá

$$\begin{vmatrix} p^2 + \omega^2 & -\omega^2 & 0 \\ -\varpi^2 & p^2 + 2\varpi^2 & -\varpi^2 \\ 0 & -\omega^2 & p^2 + \omega^2 \end{vmatrix} = p^2 (p^2 + \omega^2) (p^2 + 2\varpi^2 + \omega^2) = 0 \quad (4.31)$$

As soluções da (4.31) são

$$p = 0, p = \pm i\omega_1, p = \pm i\omega_2 \quad (4.32)$$

A solução $p = 0$ corresponde à frequência zero associada ao movimento do centro de massa. As outras duas correspondem às frequências dos modos normais de vibração do sistema

$\omega_1 = \omega$ e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\varpi^2}$. O resto da análise para encontrar $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ é um pouco complicada; portanto, não vamos apresentá-lo. Vamos mostrar, no entanto, que existe uma outra maneira mais simples de resolver este problema.

Já que a frequência zero, encontrada acima, não tem nenhuma consequência na determinação das frequências dos modos normais de vibração do sistema, é possível reformular o problema, de forma que a raiz zero seja excluída desde o início. Isto pode ser feito muito simplesmente impondo a condição de que o centro de massa permaneça estacionário na origem. A coordenada do centro de massa do sistema é

$$X = \frac{M(x_1 + x_3) + mx_2}{2m + M}$$

e, portanto, o centro de massa permanecerá estacionário na origem se

$$M(x_1 + x_3) + mx_2 = 0 \quad (4.33)$$

Esta condição pode ser usada para eliminar uma das coordenadas e reduzir o problema a um com dois graus de liberdade. Para isso, vamos definir as novas coordenadas

$$\xi = x_1 + x_3, \quad \eta = x_1 - x_3 \quad (4.34)$$

Subtraindo a terceira da primeira equação em (4.28), temos

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 - x_3) = 0 \quad (4.35)$$

Somando, obtemos

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 + x_3) - 2\omega^2 x_2 = 0 \quad (4.36)$$

ou, substituindo o valor de x_2 da (4.33),

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 + x_3) + 2\omega^2 \frac{M}{m}(x_1 + x_3) = 0 \quad (4.37)$$

Isto nos dá as equações para ξ e η :

$$\ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta = 0 \quad (4.38)$$

e

$$\ddot{\xi} + \omega_2^2 \xi = 0 \quad (4.39)$$

onde as frequências dos modos normais são

$$\omega_1 = \omega \text{ e } \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\omega^2 \frac{M}{m}} = \sqrt{\omega^2 + 2\varpi^2}, \quad (4.40)$$

iguais aos valores obtidos anteriormente. Note que o modo de frequência ω_1 é o modo simétrico: a partícula do meio fica parada enquanto as outras duas oscilam em oposição de fase. No modo de frequência ω_2 , a partícula a partícula do meio oscila em relação ao centro de massa das outras duas.

Agora que você já sabe o que são os modos normais, está em condições de explicar o que acontecia com os relógios de Huygens. De alguma maneira os dois pêndulos estavam acoplados e o modo simétrico estava sendo suprimido, deixando os pêndulos oscilando no modo anti-simétrico. Podemos pensar esquematicamente o sistema dos dois pêndulos mais suas caixas, colocadas juntas, lado a lado, como o sistema da **Figura 4.6**, onde m representaria a massa das caixas e M a massa de cada pêndulo. O movimento geral do sistema é uma superposição dos dois modos normais. No modo anti-simétrico, as caixas não se movem. No modo simétrico, as caixas se movem e, como elas estão em contato com a parede, existe uma força de atrito entre a parede e a caixa (não representada nas Equações (4.25) – (4.27)), o que vai dissipando a energia do modo simétrico até que ele pare de existir, restando somente o modo anti-simétrico.

RESUMO

Dois sistemas lineares acoplados, como osciladores harmônicos acoplados, são representados por equações do movimento que formam um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem lineares acopladas. Essas equações podem ser desacopladas se introduzimos as coordenadas normais do sistema. As duas equações desacopladas resultantes correspondem a oscilações puras em frequências que são chamadas modos normais de vibração do sistema. Vimos e resolvemos o problema de três massas acopladas (**Figura 4.6**), que pode ser tomado como uma representação clássica de uma molécula linear como, por exemplo, o CO_2 .

PROBLEMAS

4.1. Duas massas, m e $2m$, estão ligadas por molas idênticas como indicado na figura abaixo. Encontre os modos normais.

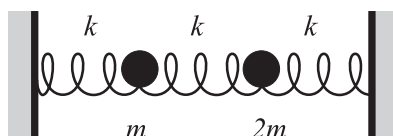


Figura 4.7

4.2. Considere duas massas idênticas, $m_1 = m_2 = m$, suspensas num campo gravitacional uniforme (vertical) g por duas molas com constantes de mola $2k$ e k , como indicado na figura.

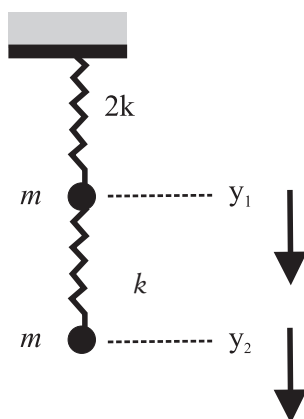


Figura 4.8

y_1 e y_2 descrevem os deslocamentos das massas de suas posições de equilíbrio. Suponha que somente o movimento vertical é permitido.

- Escreva as equações (acopladas) do movimento das massas 1 e 2.
- Encontre as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.
- Encontre os modos normais (não normalizados).
- Se as condições iniciais são $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = v_0$, ache o movimento subsequente das duas massas, isto é, $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

4.3. Considere o pêndulo duplo na figura abaixo. No caso de pequenas oscilações

- Escreva as equações do movimento do sistema.
- Encontre as frequências dos modos normais.

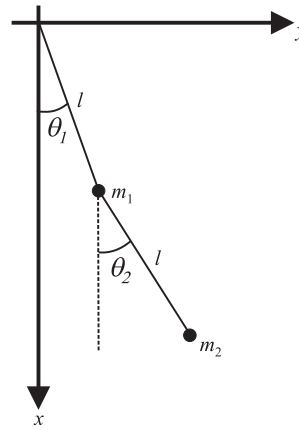


Figura 4.9

4.4. Um bloco de massa M é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito, e preso a uma parede com a ajuda de uma mola sem massa e constante de mola k , como mostrado na figura. A mola está em seu estado de equilíbrio quando o bloco está a uma distância x_0 da parede. Um pêndulo de massa m e comprimento l está preso ao carrinho (imagine uma calha ao longo da mesa por onde passa o fio do pêndulo).

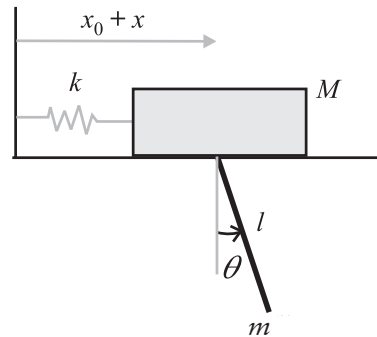


Figura 4.10

Supondo pequenas amplitudes de oscilação do pêndulo, encontre as frequências dos modos normais (autofrequências).

4.5. *Dois íons numa armadilha linear de íons.* Numa armadilha linear de íons, eles estão confinados a uma linha ao longo do eixo z , como contas num fio. Por sua vez, ao longo do eixo z , eles sofrem a ação de um potencial elétrico confinante:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}az^2, \quad (4.41)$$

onde a é uma constante positiva. A energia potencial de cada íon neste potencial é

$$V(x) = e\Phi = \frac{1}{2}eaz^2 \quad (4.42)$$

e dá origem a uma força

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dz}\hat{z} = -eaz\hat{z} \quad (4.43)$$

sobre um íon na posição z . Os íons também interagem através da força de Coulomb entre eles. As forças de repulsão entre os íons são:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} \hat{z}, \quad \vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} \hat{z} \quad (4.44)$$

Neste problema, consideramos dois íons na armadilha. Quando os íons estão em suas posições de equilíbrio, um íon, que vamos chamar 1, está em $z = z_0/2$, e o outro, que chamaremos 2, está em $z = -z_0/2$. Estamos interessados em pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio. Seja $z_1 = z_0/2 + \eta_1$ e $z_2 = -z_0/2 + \eta_2$, de modo que η_1 e η_2 descrevem os pequenos deslocamentos dos íons de suas posições de equilíbrio.

(a) Encontre z_0

(b) Linearize as equações do movimento dos íons em torno da configuração de equilíbrio, a fim de encontrar as equações diferenciais lineares para η_1 e η_2 , que descrevem pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio. Você achará útil introduzir a frequência $\omega_0 = \sqrt{ea/m}$. Dê uma interpretação para ω_0 .

(c) Encontre as coordenadas normais do sistema e as correspondentes frequências normais de oscilação.

(d) Suponha que os dois íons estejam nas suas posições de equilíbrio e, então, o íon 1 receba um impulso súbito que dê a ele uma velocidade v_0 . Encontre o movimento subsequente dos dois íons.

4.6. Molas num círculo. (a) Duas massas idênticas m movem-se num anel horizontal. Duas molas idênticas, de constante de mola k , conectam as massas e estão enroladas em torno do anel, como mostrado na Figura 4.11.a. Não há atrito. (a) Encontre os modos normais.

(b) O mesmo que no item (a), porém agora com 3 molas. (ver Figura 4.11.b).

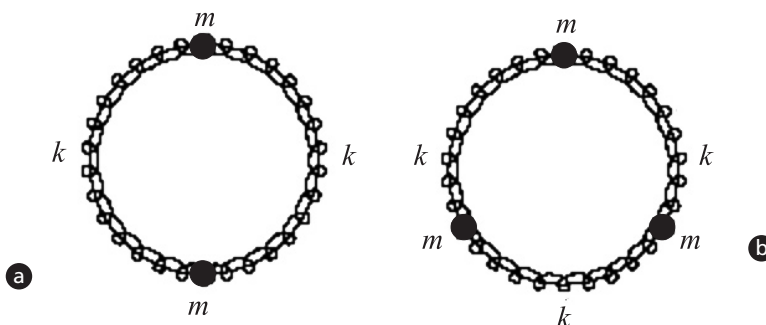


Figura 4.11

SOLUÇÕES

4.1. Sejam x_1 e x_2 as posições das massas da esquerda e da direita, respectivamente, relativas às suas posições de equilíbrio. As forças sobre elas são:

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 \\ F_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) = 2m\ddot{x}_2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

de onde seguem as equações acopladas

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 &= 0 \\ 2\ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. Fazendo $x_1 = C_1 e^{ipt}$ e $x_2 = C_2 e^{ipt}$, encontramos as equações lineares

$$\begin{aligned} -p^2 C_1 + 2\omega^2 C_1 - \omega^2 C_2 &= 0 \\ -\omega^2 C_1 - 2p^2 C_2 + 2\omega^2 C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

ou,

$$\begin{pmatrix} -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -2p^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Teremos soluções não triviais para C_1 e C_2 se

$$\begin{vmatrix} -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -2p^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

ou,

$$2p^4 - 6p^2\omega^2 + 3\omega^4 = 0 \quad (4.50)$$

As raízes desta equação são

$$p_{\pm}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \omega^2 \quad (4.51)$$

As frequências dos modos normais são, portanto,

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}} \omega \quad (4.52)$$

Para encontrar os modos normais correspondentes, devemos resolver

$$\begin{pmatrix} -p_{\pm}^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -2p_{\pm}^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1\pm} \\ C_{2\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

o que dá

$$\frac{C_{2\pm}}{C_{1\pm}} = \frac{-p_{\pm}^2 + 2\omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{-2p_{\pm}^2 + 2\omega^2} = -\frac{1}{1 \pm \sqrt{3}} \quad (4.54)$$

Então, os modos normais são

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} + 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+) \quad (4.55)$$

e

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-) \quad (4.56)$$

Note que as coordenadas normais (aquelas que desacoplam as Equações (4.46)) associadas a esses modos normais são, pelas combinações lineares, nada óbvias: $x_1 - (\sqrt{3} - 1)x_2$ e $x_1 + (\sqrt{3} + 1)x_2$.

4.2. (a) Desde que nós estamos medindo os deslocamentos em relação às posições de equilíbrio, a gravidade não desempenha nenhum papel aqui (cada uma das molas está distendida de uma quantidade fixa de modo a suprir uma força igual e oposta à gravidade). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -2ky_1 - k(y_1 - y_2) \\ m\ddot{y}_2 &= -k(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (4.57)$$

ou

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 3\omega^2 y_1 - \omega^2 y_2 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - \omega^2 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

(b) Fazendo $y_1 = C_1 e^{ipt}$ e $y_2 = C_2 e^{ipt}$, encontramos as equações lineares

$$\begin{aligned} -p^2 C_1 + 3\omega^2 C_1 - \omega^2 C_2 &= 0 \\ -\omega^2 C_1 - p^2 C_2 + \omega^2 C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

ou

$$\begin{pmatrix} -p^2 + 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -p^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

O sistema terá soluções não triviais se

$$\begin{vmatrix} -p^2 + 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -p^2 + \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.61)$$

Esta condição é equivalente à seguinte equação do segundo grau para p^2 :

$$p^4 - 4p^2\omega^2 + 2\omega^4 = 0 \quad (4.62)$$

As soluções desta equação são: $p_{\pm}^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega^2$. Assim, as frequências dos modos normais do sistema são

$$\omega_{\pm} = \omega \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \quad (4.63)$$

(c) Para encontrar os modos normais correspondentes, devemos resolver

$$\begin{pmatrix} -p_{\pm}^2 + 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -p_{\pm}^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1\pm} \\ C_{2\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

que dá

$$\frac{C_{2\pm}}{C_{1\pm}} = \frac{-p_{\pm}^2 + 3\omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{-p_{\pm}^2 + \omega^2} = (1 \mp \sqrt{2}) \quad (4.65)$$

Então, os modos normais, não normalizados, são

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+) \quad (4.66)$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-) \quad (4.67)$$

(d) A solução geral do problema é uma superposição dos modos normais:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+) + A_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-) \quad (4.68)$$

Aplicando as condições para as posições iniciais,

$$y_1(0) = 0 = A_+ \cos \phi_+ + A_- \cos \phi_- \quad (4.69)$$

$$y_2(0) = 0 = A_+ (1 - \sqrt{2}) \cos \phi_+ + A_- (1 + \sqrt{2}) \cos \phi_- \quad (4.70)$$

Estas duas condições implicam que $\phi_+ = \phi_- = \pi/2$. Agora,

$$\dot{y}_1(0) = 0 \Rightarrow \omega_+ A_+ + \omega_- A_- = 0 \quad (4.71)$$

$$\dot{y}_2(0) = v_0 = -(1 - \sqrt{2})\omega_+ A_+ - (1 + \sqrt{2})\omega_- A_- = \sqrt{2}(\omega_+ A_+ - \omega_- A_-) \quad (4.72)$$

Destas equações obtemos

$$A_+ = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega_+}, \quad A_- = -\frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega_-} \quad (4.73)$$

Portanto, finalmente nós temos

$$y_1(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} \left(-\frac{\text{sen}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\text{sen}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right) \quad (4.74)$$

$$y_2(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} \left(-(1 - \sqrt{2}) \frac{\text{sen}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + (1 + \sqrt{2}) \frac{\text{sen}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right) \quad (4.75)$$

4.3. (a) Escrever as equações do movimento do pêndulo duplo é o exemplo típico de aplicação do método Lagrangiano que desenvolveremos na Aula 6. O método lagrangiano é uma formulação da Mecânica mais geral, mais poderosa que o método newtoniano que é ensinado nas Físicas 1 e 2. Nele não entra o conceito de força. As equações do movimento saem diretamente de uma quantidade *escalar* chamada lagrangiana e que é igual à energia cinética menos a energia potencial do sistema.

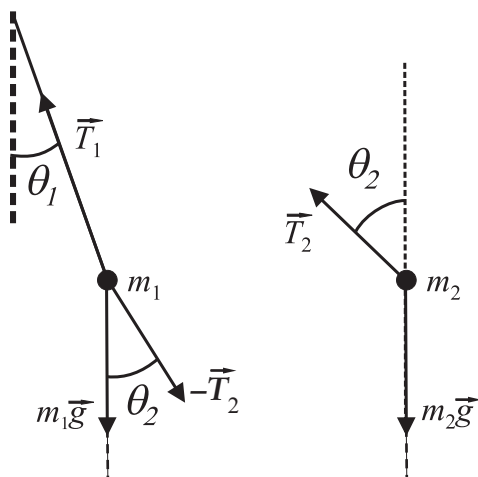


Figura 4.12

Na figura anterior, indicamos as forças atuando sobre cada massa do pêndulo. Mostraremos, nos problemas da Aula 6, que as equações do movimento do pêndulo duplo são:

$$(m_1 + m_2)l\ddot{\theta}_1 + m_2l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin\theta_1 = 0 \quad (4.76)$$

$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin\theta_2 = 0 \quad (4.77)$$

Tente chegar a essas equações. Aqui estamos interessados em pequenas oscilações e, logo, devemos manter somente os termos lineares nas variáveis angulares e suas derivadas. As Equações (4.76) e (4.77) tornam-se

$$(m_1 + m_2)l\ddot{\theta}_1 + m_2l\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \quad (4.78)$$

$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \quad (4.79)$$

Usando o método do determinante, podemos mostrar que as frequências dos modos normais são

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1}} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.80)$$

4.4. Este problema também será resolvido na Aula 6 pelo método lagrangiano. Na figura, indicamos as forças que estão atuando sobre cada massa.

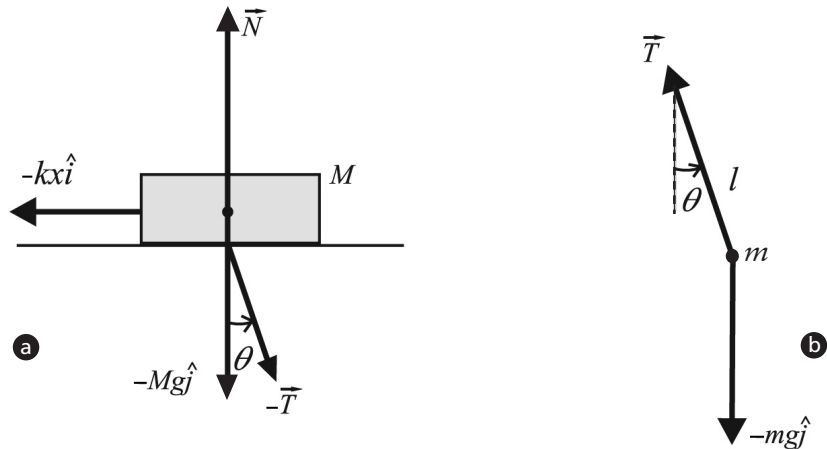


Figura 4.13

As coordenadas do bloco e do pêndulo são:

$$\begin{aligned}x_M &= x, \quad y_M = 0 \\x_m &= x + l \sin \theta, \quad y_m = -l \cos \theta\end{aligned}\quad (4.81)$$

e a segunda lei de Newton para cada um fica

$$M\ddot{x}_M = M\ddot{x} = -kx + T \sin \theta \quad (4.82)$$

$$m\ddot{x}_m = m(\ddot{x} + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) = -T \sin \theta \quad (4.83)$$

$$m\ddot{y}_m = m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta) = T \cos \theta - mg \quad (4.84)$$

Substituindo $T \sin \theta$ da segunda equação na primeira, ficamos com

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \quad (4.85)$$

Multiplicando a terceira equação por $\sin \theta$ e substituindo, no resultado, o valor de $T \sin \theta$ da segunda, obtemos

$$\begin{aligned}m(l\ddot{\theta} \sin^2 \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta) = \\ -m(\ddot{x} + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta - mg \sin \theta\end{aligned}\quad (4.86)$$

ou, simplificando,

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + mg \sin \theta = 0 \quad (4.87)$$

As Equações (4.85) e (4.87) são as equações do movimento do sistema. São equações acopladas não lineares muito complicadas. Vamos linearizar essas equações. Fazendo $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ nessas equações e restando somente termos lineares nas coordenadas x e θ e suas derivadas, achamos

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \quad (4.88)$$

e

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0 \quad (4.89)$$

Introduzindo agora as notações $M_T = M + m$, $\Omega_1 = \sqrt{k/M_T}$, $\Omega_2 = \sqrt{g/l}$ as Equações (4.88) e (4.89) ficam

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{m}{M_T} l \ddot{\theta} + \Omega_1^2 x &= 0 \\ l \ddot{\theta} + \ddot{x} + \Omega_2^2 l \theta &= 0\end{aligned}\quad (4.90)$$

Usando o método do determinante, chegamos aos seguintes valores para as frequências dos modos normais:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{M_T}{2M}} \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2 - \frac{4M}{M_T} \Omega_1^2 \Omega_2^2}} \quad (4.91)$$

4.5. (a) A força total sobre cada íon é

$$\vec{F}_1 = -eaz_1 \hat{z} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} \hat{z}, \quad \vec{F}_2 = -eaz_2 \hat{z} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} \hat{z} \quad (4.92)$$

Nas posições de equilíbrio, $z_1 = z_0/2$ e $z_2 = -z_0/2$, essas forças são iguais a zero. Assim,

$$0 = F_1 = -ea \frac{z_0}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{z_0^2} \Rightarrow z_0 = \left(\frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \right)^{1/3} \quad (4.93)$$

(b) Vamos agora expandir as forças em torno dos pontos de equilíbrio e manter somente os termos lineares em η_1 e η_2 . Temos que $z_1 - z_2 = z_0 + \eta_1 - \eta_2$ e, logo,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z_0^2} \left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{z_0} \right)^{-2} \approx \frac{eaz_0}{2} - ea(\eta_1 - \eta_2) \quad (4.94)$$

onde usamos o fato de que $\eta_1 - \eta_2 \ll z_0$ para fazer a expansão, mantendo somente o termo linear em $(\eta_1 - \eta_2)$. Também usamos, da Equação (4.93), $e^2 / 4\pi\epsilon_0 z_0^2 = eaz_0 / 2$. Deste modo, a expressão para F_1 linear nos deslocamentos é

$$\begin{aligned}F_1 &= -\frac{eaz_0}{2} - ea\eta_1 + \frac{eaz_0}{2} - ea(\eta_1 - \eta_2) \\ &= -ea\eta_1 - ea(\eta_1 - \eta_2)\end{aligned}\quad (4.95)$$

Fazendo o mesmo para F_2 , achamos

$$F_2 = -ea\eta_2 + ea(\eta_1 - \eta_2) \quad (4.96)$$

As equações do movimento são (note que $\ddot{z}_1 = \ddot{\eta}_1$, $\ddot{z}_2 = \ddot{\eta}_2$)

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 &= -ea\eta_1 - ea(\eta_1 - \eta_2) \\ m\ddot{\eta}_2 &= -ea\eta_2 + ea(\eta_1 - \eta_2) \end{aligned} \quad (4.97)$$

ou,

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 2\omega_0^2\eta_1 - \omega_0^2\eta_2 &= 0 \\ \ddot{\eta}_2 + 2\omega_0^2\eta_2 - \omega_0^2\eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde introduzimos a frequência angular $\omega_0 = \sqrt{ea/m}$ e m é a massa de cada íon.

(c) No caso das Equações (4.98), é fácil concluir, sem nenhuma conta, que elas são desacopladas pelas coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 + \eta_2 \\ \xi_2 &= \eta_1 - \eta_2 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Estas são as coordenadas normais do sistema e obedecem às equações:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_0^2\xi_1 &= 0 \\ \ddot{\xi}_2 + 3\omega_0^2\xi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

As frequências normais são, portanto, $\omega_1 = \omega_0$ e $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. O modo normal ξ_1 descreve oscilações em fase dos dois íons na frequência da armadilha; os dois íons estão sempre a uma distância z_0 um do outro, de modo que a repulsão de Coulomb é constante e não entra na frequência de oscilação. O modo ξ_2 descreve oscilações fora de fase na frequência $\sqrt{3}\omega_0$.

(d) O movimento geral é uma combinação linear arbitrária dos dois modos. Invertendo as Equações (4.99), temos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \\ \eta_2 &= \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \xi_2 &= b \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (4.102)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \eta_2 &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (4.103)$$

onde $A = a/2$ e $B = b/2$ são constantes. Em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.104)$$

Agora vamos aplicar as condições iniciais. Dos dados do problema,

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= 0, \quad \dot{\eta}_1(0) = v_0 \\ \eta_2(0) &= 0, \quad \dot{\eta}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.105)$$

aplicando estas condições às Equações (4.103), obtemos

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= 0 = A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 \\ \eta_2(0) &= 0 = A \cos \phi_1 - B \cos \phi_2 \\ \dot{\eta}_1(0) &= v_0 = -\omega_1 A \sin \phi_1 - \omega_2 B \sin \phi_2 \\ \dot{\eta}_2(0) &= 0 = -\omega_1 A \sin \phi_1 + \omega_2 B \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

Das duas primeiras, concluímos que $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$. Da última, temos $\omega_1 A = \omega_2 B$ que, substituído na terceira, dá

$$A = -\frac{v_0}{2\omega_1}, \quad B = \frac{\omega_1}{\omega_2} A = -\frac{v_0}{2\omega_2} \quad (4.107)$$

Com estes resultados, podemos escrever para a posição de cada íon

$$x_1(t) = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} + \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right] = \frac{v_0}{2\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(\sqrt{3}\omega_0 t)}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.108)$$

e

$$x_2(t) = \frac{v_0}{2\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(\sqrt{3}\omega_0 t)}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.109)$$

4.6. (a) Rotule dois pontos diametricamente opostos como as posições de equilíbrio. Sejam x_1 e x_2 as distâncias das massas (medidas no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio) aos seus pontos de equilíbrio. Então, as equações do movimento são:

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad (4.110)$$

$$m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.111)$$

O método do determinante funciona aqui, mas o sistema é tão simples que podemos fazer do jeito mais fácil: somando as equações, dá

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \quad (4.112)$$

e subtraindo uma da outra,

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 4\omega^2(x_1 - x_2) = 0 \quad (4.113)$$

onde $\omega^2 = k/m$. As coordenadas normais são, portanto, $\xi_1 = x_1 + x_2$ e $\xi_2 = x_1 - x_2$. Resolvendo as Equações (4.112) e (4.113),

$$\xi_1 = at + b \quad (4.114)$$

e

$$\xi_2 = c \cos(2\omega t + \phi) \quad (4.115)$$

A solução geral do nosso problema é, portanto,

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = At + B + C \cos(2\omega t + \phi) \quad (4.116)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = At + B - C \cos(2\omega t + \phi)$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (At + B) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C \cos(2\omega t + \phi) \quad (4.117)$$

Note que o modo normal

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (At + B) \quad (4.118)$$

tem frequência zero. Ele corresponde às massas deslizando em torno do círculo, igualmente espaçadas, com velocidade constante. O segundo modo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(2\omega t + \phi) \quad (4.119)$$

tem ambas as massas, movendo-se para a esquerda, depois ambas para a direita, para trás e para a frente.

(b) Rotule três pontos igualmente espaçados como as posições de equilíbrio. Sejam x_1 , x_2 e x_3 os deslocamentos das massas (medidas no sentido contrário aos ponteiros do relógio) em relação a esses pontos. As equações do movimento são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + k(x_1 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_1) + k(x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Vamos fazer $x_1 = C_1 e^{ipt}$, $x_2 = C_2 e^{ipt}$, $x_3 = C_3 e^{ipt}$. Substituindo essas soluções, obtemos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 & -p^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.121)$$

que tem solução não trivial se o determinante for igual a zero:

$$\begin{vmatrix} -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 & -p^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.122)$$

Esta condição dá uma equação cúbica para

$$-(p^2)^3 + 6(p^2)^2 \omega^2 - 9p^2 \omega^4 = 0 \quad (4.123)$$

que tem como soluções $p^2 = 0$ e a raiz dupla $p^2 = 3\omega^2$.

Energia potencial em 3-D: o potencial gravitacional



Metas da aula

Apresentar a condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa; introduzir os conceitos de campo e potencial gravitacionais; estabelecer a lei de Gauss da gravitação e discutir suas aplicações e consequências mais importantes.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- determinar se uma dada força é ou não conservativa;
- calcular a energia potencial para uma dada força, incluindo aqui saber especificar o caminho de integração conveniente;
- saber quando e como utilizar a lei de Gauss para calcular o campo gravitacional.

POR QUE O ESPAÇO TEM TRÊS DIMENSÕES?

Nós vivemos em um espaço tridimensional. Isso significa que precisamos de três números para representar a posição de um ponto no espaço, por exemplo: latitude, longitude e altura acima do nível do mar. Mas por que o espaço não tem duas, quatro ou algum outro número de dimensões? Na verdade, em teorias atuais, o espaço teria nove ou dez dimensões, mas seis ou sete das direções estariam compactadas, tão pequenas que ainda não teríamos meios de observá-las, restando três dimensões grandes e quase planas. Por que, então, restam três dimensões perceptíveis e não duas?

Existe uma resposta curiosa para esta última pergunta baseada no *princípio antrópico*. O princípio antrópico afirma que o universo é do jeito que é, pelo menos em parte, porque nós existimos. Consideremos, por exemplo, nossa forma. Topologicamente, somos equivalentes a um toro, representado na imagem a seguir:

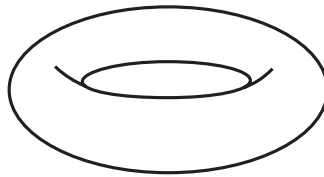


Figura 5.1: Um toro.

Nosso sistema digestivo é externo ao nosso corpo. Um intestino que atravessasse um animal bidimensional o dividiria em dois (Figura 5.2).

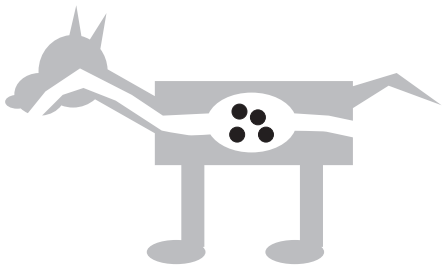


Figura 5.2: Um animal bidimensional teria dificuldade para digerir comida.

Portanto, duas dimensões espaciais não são suficientes para seres vivos tão complexos como nós. Por outro lado, se o espaço tivesse quatro ou mais dimensões, a força gravitacional entre dois corpos diminuiria mais rapidamente à medida que eles se afastassem um do outro. Como consequência, os planetas não teriam órbitas estáveis ao redor de seus sóis. Ou eles cairiam no sol, ou escapariam para a escuridão e frio externos e não teríamos tido a chance de existir. A situação seria, na verdade, ainda mais desfavorável: as órbitas dos elétrons nos átomos também não seriam estáveis e a matéria como conhecemos não existiria. Claro que este assunto não é

tão simples assim. Ele está sendo apresentado apenas como curiosidade. Se você quiser conhecer mais sobre esse tema, sugerimos que leia o livro *O universo numa casca de noz*, de Stephen Hawking, editora Arx, 2002.

No espaço tridimensional, a força gravitacional varia com o inverso do quadrado da distância (a força eletrostática também). Devido a esta dependência com o inverso do quadrado da distância, uma grande simplificação ocorre: para os propósitos de gravidade uma esfera age do mesmo modo que uma massa puntiforme em seu centro. Assim, também, a força gravitacional entre duas esferas é a mesma que se elas fossem substituídas por duas massas puntiformes. Caso contrário, descrever, por exemplo, o movimento dos planetas seria uma tarefa bem complicada.

A força gravitacional é uma força conservativa, podendo, portanto, como já definimos antes em 1-D, ser derivada de uma energia potencial. Nesta aula você verá, no entanto, que, em três dimensões, depender só da posição é uma condição necessária, mas não é condição suficiente para que uma força seja conservativa.

A formulação de uma lei de força do inverso do quadrado da distância pode ser feita de uma forma compacta e poderosa por meio da *lei de Gauss*. Para isso, vamos introduzir a noção de campo vetorial e o conceito de fluxo de uma quantidade vetorial. Também, introduziremos o potencial, uma quantidade escalar e, portanto, mais simples, a partir da qual podemos calcular o campo.

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA EM 3-D

Os conceitos de trabalho e de energia potencial em três dimensões são ligeiramente mais complicados que em uma dimensão, mas as idéias gerais são as mesmas. Assim, do mesmo modo que na Aula 2, na qual tratamos do caso 1-D, partimos da segunda lei de Newton que agora toma a forma vetorial $\vec{F} = m\vec{a}$, e vamos considerar forças que dependem somente da posição, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Em coordenadas cartesianas

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = F_z \quad (5.1)$$

Multiplicando estas equações por v_x , v_y , v_z , respectivamente, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) = F_x v_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_y^2\right) = F_y v_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = F_z v_z \quad (5.2)$$

e somando estas equações, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2\right) = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \quad (5.3)$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.4)$$

Multiplicando a Equação (5.4) por dt e integrando, obtemos

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (5.5)$$

Como $\vec{v} dt = d\vec{r}$ e sendo \vec{F} uma função de \vec{r} , podemos escrever o lado direito da Equação (5.5) como uma integral de linha:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.6)$$

onde a integral deve ser tomada ao longo da trajetória seguida pela partícula entre os pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Esta integral é simplesmente o trabalho realizado sobre a partícula quando ela se move ao longo do caminho considerado entre os pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . A Equação (5.6) é a forma integrada do teorema trabalho-energia.

Em uma dimensão, o fato de a força depender somente da posição é uma condição necessária e suficiente para que ela possa ser derivada de uma energia potencial. A energia potencial é definida como o trabalho realizado pela força quando a partícula vai de uma posição x até algum ponto de referência x_s :

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x') dx' \quad (5.7)$$

Em 1-D só existe um caminho ou trajetória entre x e x_0 : uma reta. Mas em 3-D existe um número infinito de caminhos entre duas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Para que o potencial $V(\vec{r})$ tenha um significado e tenha alguma utilidade, ele deve ser bem definido. Isto é, ele deve ser *independente do*

percurso. Como no caso 1-D, nós chamamos a força associada com tal potencial força conservativa. Vejamos, então, que tipos de forças 3-D são conservativas. Podemos afirmar o seguinte:

Dada uma força $\vec{F}(\vec{r})$, uma condição necessária e suficiente para que o potencial,

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r} \quad (5.8)$$

seja bem definido, isto é, independente da trajetória, é que o rotacional de $\vec{F}(\vec{r})$ seja igual a zero, isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (5.9)$$

Primeiro vamos mostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ é uma condição necessária para independência de trajetória. Em outras palavras, “Se $V(\vec{r})$ é independente de trajetória, então $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ”. Se $V(\vec{r})$ é independente de trajetória, então é legal escrever a forma diferencial da Equação (5.8). Isto é,

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (5.10)$$

Lembre-se de que na Termodinâmica, escrevemos dQ porque a quantidade de calor Q depende do processo (trajetória). Não existe uma diferencial exata dQ . Mas uma outra expressão para dV é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (5.11)$$

As duas equações anteriores devem ser equivalentes para dx , dy e dz arbitrários. Portanto, devemos ter

$$(F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (5.12)$$

ou seja, a força é o gradiente do potencial,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (5.13)$$

Portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0 \quad (5.14)$$

porque o rotacional do gradiente é identicamente zero, como você pode verificar explicitamente. Assim nós mostramos que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ é uma condição necessária. Vamos mostrar que ela é suficiente, isto é, “Se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, então $V(\vec{r})$ é independente do caminho”.

A prova de suficiência segue imediatamente do teorema de Stokes que diz o seguinte:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{A} \quad (5.15)$$

Aqui, C é uma curva arbitrária que fazemos passar por \vec{r}_0 e \vec{r}_1 . S é uma superfície arbitrária que tem C como fronteira e $d\vec{A}$ tem módulo igual a um elemento infinitesimal de área em S , e direção ortogonal a S .

A Equação (5.15) diz que, se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ em todo lugar, então $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada. Mas, olhando a Figura 5.3,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0(1)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1(2)}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0(1)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0(2)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.16)$$

Logo, se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, a Equação (5.16) nos diz que

$$\int_{\vec{r}_0(1)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0(2)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.17)$$

para dois caminhos arbitrários (1) e (2) ligando \vec{r} e \vec{r}_0 .

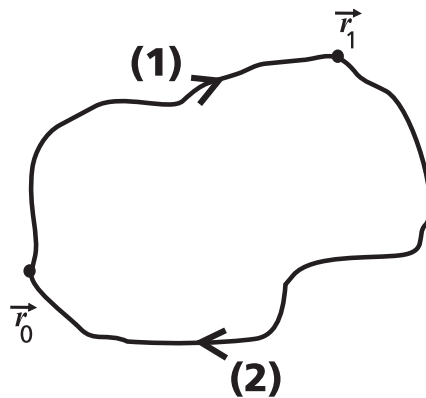


Figura 5.3: Curva fechada vista como a soma de dois caminhos.

Voltando à Equação (5.6), quando a força é conservativa, podemos então escrever o trabalho como

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)\end{aligned}\quad (5.18)$$

e, então, vemos que

$$T_2 - T_1 = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \Rightarrow T_2 + V(\vec{r}_2) = T_1 + V(\vec{r}_1) \quad (5.19)$$

que é a expressão da conservação da energia mecânica $E = T + V$.

FORÇAS CENTRAIS

Um exemplo importante de força conservativa é a *força central*. Esta é definida como uma força que aponta radialmente e cujo módulo depende somente de r

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r} \quad (5.20)$$

Vamos mostrar explicitamente que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ para uma força central. Primeiro note que \vec{F} pode ser escrita como

$$\vec{F}(x, y, z) = F(r)\hat{r} = F(r)\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) \quad (5.21)$$

onde \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} são os unitários nas direções x , y e z , respectivamente. Agora,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (5.22)$$

e, similarmente,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (5.24)$$

para y e z . Tomemos, por exemplo, a componente z de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (5.25)$$

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_y}{\partial x} &= y \frac{\partial (F/r)}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r} \right) \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} &= x \frac{\partial (F/r)}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{yx}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r} \right)\end{aligned}\quad (5.26)$$

onde usamos as Equações (5.22) e (5.23). Assim, $(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = 0$. Do mesmo modo para as componentes x e y .

As forças centrais são importantes porque estão em toda parte, já que a força de Coulomb e a força gravitacional são centrais. Também são importantes do ponto de vista histórico, pois foi para explicar o movimento sob a ação da força gravitacional que Newton formulou a Mecânica. Estudaremos o movimento sob uma força central, detalhadamente, mais adiante em nosso curso.

Ao tratar de forças centrais, é conveniente usar coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) definidas como na Figura 5.4 ou pelas equações

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (5.27)$$

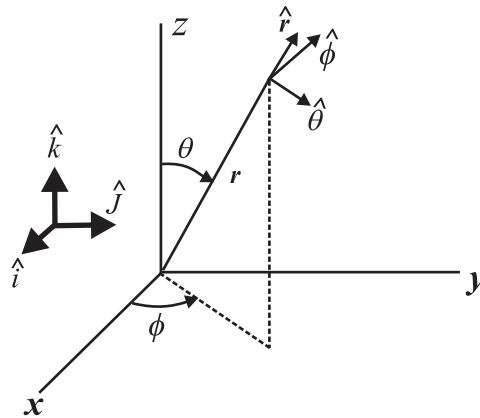


Figura 5.4: Coordenadas polares esféricas.

Para calcular a energia potencial correspondente a uma força central, escolhemos um caminho de integração como indicado na Figura 5.5:

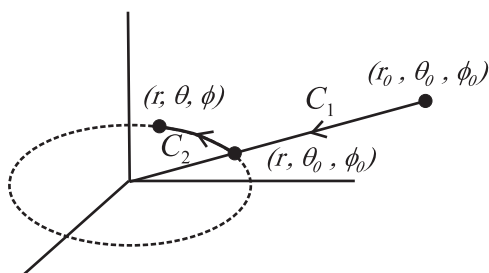


Figura 5.5: Caminho de integração para uma força central.

Tomamos um ponto qualquer de referência \vec{r}_0 , e integramos de \vec{r}_0 até \vec{r} primeiro ao longo de um raio (C_1) que parte de \vec{r}_0 , cujas coordenadas são (r_0, θ_0, ϕ_0) e vai até o ponto (r, θ_0, ϕ_0) e depois, ao longo de um círculo (C_2) de raio r em torno da origem, até o ponto (r, θ, ϕ) . Ao longo de C_1 ,

$$d\vec{r} = \hat{r} dr$$

e

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^r F(r) dr$$

Ao longo de C_2 ,

$$d\vec{r} = \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin\theta d\phi$$

e

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Assim,

$$V(\vec{r}) = V(r) = -\int_{r_0}^r F(r) dr$$

Note que a energia potencial de uma força central é uma função somente de r .

ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UMA ESFERA

A força gravitacional sobre uma partícula puntiforme de massa m , localizada a uma distância r de uma partícula puntiforme de massa M , é dada pela lei de Newton da gravitação,

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad (5.28)$$

onde o sinal menos indica que a força é atrativa. Qual será a força se a massa puntiforme M for substituída por uma esfera de raio R e massa M ? Se a esfera tiver uma distribuição esfericamente simétrica de massa, ou seja, se sua densidade for uma função só de r , então a resposta é que continua sendo $-GMm/r^2$. Para os propósitos da gravidade, é como se toda a massa da esfera estivesse em seu centro. Nós vamos usar este resultado quando estivermos estudando o movimento dos planetas.

Para provar este resultado, é muito mais fácil primeiro calcular a energia potencial devido a uma esfera e depois tomar a derivada para obter a força em vez de calcular a força explicitamente. Isto porque a energia potencial é um escalar, enquanto a força é um vetor. É suficiente demonstrar o resultado para uma casca esférica fina, uma vez que uma esfera é a soma de muitas de tais cascas. Para isso, vamos dividir a casca em anéis, como mostra a **Figura 5.6**. Seja R o raio da casca e P o ponto onde queremos calcular o potencial, a uma distância r de seu centro.

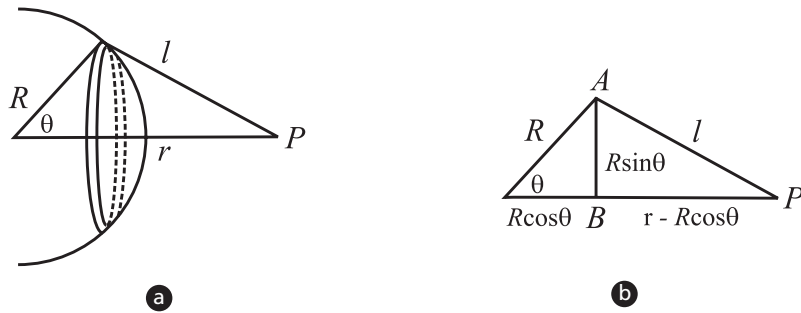


Figura 5.6: Método de calcular a energia potencial de uma casca esférica. Em (a), a casca é dividida em anéis. E em (b) mostramos as distâncias relevantes.

A área do anel entre θ e $\theta + d\theta$ é $(2\pi R \sin\theta)Rd\theta$ e, assim, uma vez que cada elemento de massa do anel está a uma mesma distância de P , a energia potencial de uma massa m em P devido ao anel é

$$dV(r) = -\frac{Gm\sigma(2\pi R \sin\theta)Rd\theta}{l} \quad (5.29)$$

onde $\sigma = M/4\pi R^2$ é a densidade de massa da casca e

$$l = \sqrt{(R \sin\theta)^2 + (r - R \cos\theta)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta}$$

A energia potencial total em P é, portanto,

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_0^\pi \frac{2\pi\sigma GR^2 m \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} \\ &= -\frac{2\pi\sigma GRm}{r} \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta} \Big|_0^\pi \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nós agora devemos considerar dois casos. Se $r > R$, então nós temos

$$V(r) = -\frac{2\pi\sigma GRm}{r} ((R+r) - (r-R)) = -\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{r} = -\frac{GMm}{r} \quad (5.31)$$

que é a energia potencial devida a uma massa puntiforme M localizada no centro da casca, como desejado. Se $r < R$, então nós temos:

$$V(r) = -\frac{2\pi\sigma GRm}{r} ((R+r) - (R-r)) = -\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{R} = -\frac{GMm}{R} \quad (5.32)$$

que é independente de r .

Uma vez que encontramos $V(r)$, podemos achar a força como $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. Em coordenadas polares esféricas,

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.33)$$

Então,

$$\vec{F} = -\hat{r} \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}, \quad \text{se } r > R \quad (5.34)$$

e

$$\vec{F} = 0, \quad \text{se } r < R \quad (5.35)$$

Uma esfera é a soma de muitas cascas esferas e, portanto, se o ponto P está fora da esfera, então a força em P é $-\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$, onde M é a massa total da esfera. Este resultado vale mesmo que as cascas tenham densidades diferentes (mas cada uma deve ter densidade uniforme).

Se o ponto P está dentro de uma dada esfera, então a única matéria relevante é a massa dentro de uma esfera concêntrica através de P , porque todas as camadas fora desta região dão força zero. A matéria fora de P , para os fins de gravidade, é como se não estivesse lá.

LEI DE GAUSS

A lei de força do inverso do quadrado da distância pode ser reformulada de uma maneira muito elegante, compacta e poderosa chamada lei de Gauss. Precisaremos do conceito de campo e da definição do fluxo deste campo através de uma superfície.

Para introduzir o conceito de *campo vetorial*, consideremos a atração gravitacional da Terra, que vamos supor esférica, sobre uma partícula fora dela. A força depende tanto da massa da partícula sendo atraída quanto de sua localização relativa ao centro da Terra. Esta força atrativa dividida pela massa da partícula depende somente da Terra e da localização do objeto atraído. Podemos, portanto, atribuir a cada ponto do espaço um vetor \vec{g} dado por

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5.36)$$

ou

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r} \quad (5.37)$$

Assim, nós podemos imaginar uma coleção de vetores por todo o espaço, em geral diferentes em módulo e direção em cada ponto do espaço, e que define a atração gravitacional da Terra sobre uma partícula teste localizada numa posição qualquer. A totalidade de tais vetores é chamada campo, e os próprios vetores são chamados intensidades do campo.

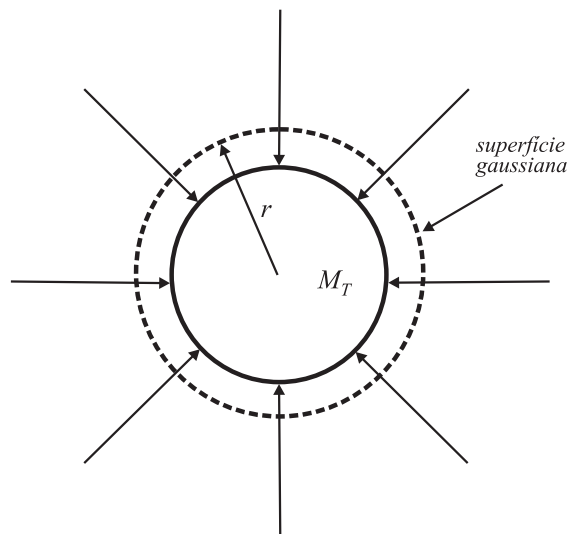


Figura 5.7: Superfície gaussiana envolvendo a Terra.

Considere agora uma esfera com o centro no centro da Terra e raio maior que o raio da Terra, **Figura 5.7**. Usando a convenção de que a direção positiva aponta radialmente para fora, então a componente radial de \vec{g} multiplicada pela área total da superfície da esfera, nos dá uma quantidade Φ definida como:

$$\Phi = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi r^2 \frac{GM_T}{r^2} = -4\pi GM_T \quad (5.38)$$

Φ é o *fluxo* do campo gravitacional através da superfície da esfera. Note que este resultado é independente de r .

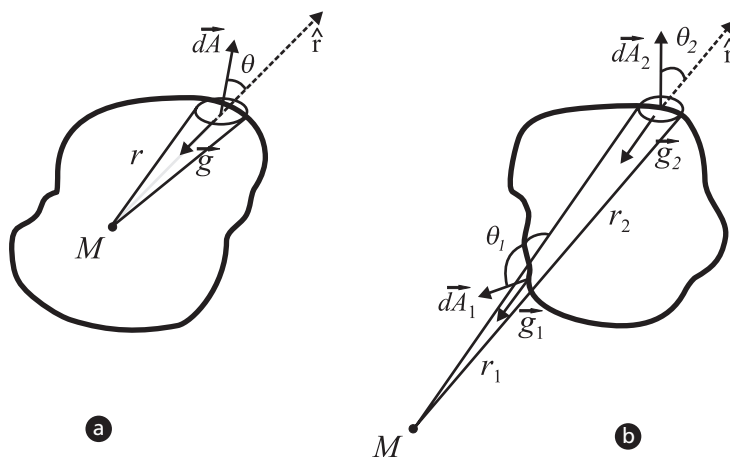


Figura 5.8: (a) Superfície gaussiana envolvendo uma partícula de massa M . Existe um fluxo gravitacional resultante devido à massa M . (b) Superfície gaussiana não envolvendo M . O fluxo resultante neste caso é zero.

Vamos agora considerar o caso de uma superfície gaussiana fechada, que tenha uma forma qualquer, rodeando uma massa M , (**Figura 5.8.a**). Se em um ponto arbitrário nesta superfície, a normal à superfície faz um ângulo θ com \vec{r} , como mostrado, nós podemos decompor o campo \vec{g} em componentes ortogonais, uma paralela à superfície e outra ao longo da normal. Só a componente normal contribui para o fluxo de \vec{g} através da superfície. Deste modo, o elemento de fluxo através do elemento de área dA é

$$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{A} = -\frac{GM}{r^2} \cos\theta dA \quad (5.39)$$

Agora, $dA \cos \theta$ é igual à projeção de $d\vec{A}$ perpendicular a \vec{r} , e o quociente $dA \cos \theta / r^2$ é o elemento de ângulo sólido, $d\Omega$, subentendido em M por dA . Assim, podemos escrever

$$d\Phi = -GMd\Omega \quad (5.40)$$

O fluxo total de \vec{g} através da superfície, definido deste modo, é então obtido integrando-se sobre todas as contribuições $d\Omega$. Mas isto significa simplesmente incluir o ângulo sólido completo, 4π . Temos, portanto,

$$\Phi = \oint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -GM \oint d\Omega = -4\pi GM \quad (5.41)$$

exatamente como para uma esfera. Se a massa estiver fora da superfície gaussiana, o resultado é bastante diferente. Desta vez, o cone de pequeno ângulo $d\Omega$ intercepta a superfície duas vezes (Figura 5.8.b). A contribuição para o fluxo é dada por

$$\begin{aligned} d\Omega &= -GM \left(\frac{dA_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r_2^2} \right) \\ &= -GM(-d\Omega + d\Omega) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

O fluxo total é zero neste caso. Note que os resultados (5.41) e (5.42) são uma consequência direta do fato de a força seguir uma lei do inverso do quadrado da distância exata.

Estes resultados são facilmente generalizados para uma distribuição de massa qualquer:

$$\oint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{total} \quad (5.43)$$

onde M_{total} é a massa dentro da região envolvida pela superfície fechada A . Esta é a *Lei de Gauss* (você já deve ter percebido que tudo isso é igual ao que você já sabia, lá do eletromagnetismo).

Exemplo 5.1: suponha que a Lua seja uma esfera de densidade uniforme de raio R_L e massa M_L . Imagine um túnel reto, cavado através da Lua passando por seu centro.

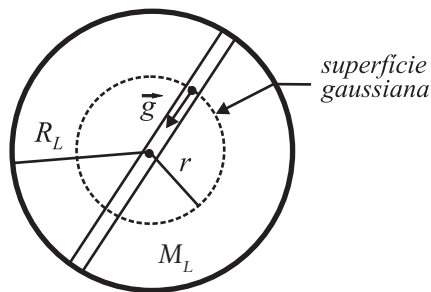


Figura 5.9: Túnel através da Lua. Também mostramos a superfície gaussiana para o cálculo do campo.

Vamos mostrar que o movimento de objetos ao longo desse túnel, sob a ação da gravidade, seria harmônico simples. Para isso é preciso calcular a força sobre um objeto no túnel, em uma posição \vec{r} . Como a distribuição de massa é esfericamente simétrica, podemos usar a lei de Gauss para determinar o campo. Com a superfície gaussiana mostrada na Figura 5.9, temos:

$$\Phi = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM \quad (5.44)$$

onde M é a massa envolvida pela superfície

$$M = \frac{M_L}{4\pi/3R_L^3} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{M_L}{R_L^3} r^3 \quad (5.45)$$

Substituindo este resultado na Equação (5.44), achamos

$$g(r) = -\frac{GM_L}{R_L^3} r \quad (5.46)$$

A força sobre uma partícula de massa m a uma distância r do centro é então

$$f(r) = mg(r) = -kr \quad (5.47)$$

onde a constante k é dada por

$$k = \frac{Gm M_L}{R_L^3} \quad (5.48)$$

O movimento é, portanto, harmônico simples, com um período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_L^3}{GM_L}} \quad (5.49)$$

Para encerrar, vamos apresentar a forma diferencial da lei de Gauss. Seja $\rho(\vec{r})$ uma distribuição de massa qualquer. Então, a massa total dentro de uma superfície gaussiana nesta distribuição é

$$M_{total} = \int_V \rho dV \quad (5.50)$$

onde V é o volume envolvido pela superfície gaussiana. Por outro lado, podemos usar o teorema da divergência para escrever

$$\oint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV \quad (5.51)$$

Substituindo as Equações (5.50) e (5.51) na expressão da lei de Gauss, (5.43), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (5.52)$$

Esta é a lei de Gauss na sua forma diferencial.

RESUMO

Uma força é conservativa se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. A energia potencial associada a \vec{F} é $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$, sendo o valor da integral independente do caminho escolhido para ir de \vec{r}_0 até \vec{r} . Você deve escolher o caminho de integração que for mais conveniente (no sentido de simplificar os cálculos). As importantes forças centrais, $\vec{F} = F(r)\vec{r}$, são conservativas. Para uma força central que varie com o inverso do quadrado da distância, vale a lei de Gauss, e vice-versa. Para o campo gravitacional, a lei de Gauss pode ser escrita na forma integral, $\oint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM$, ou na forma diferencial, $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$. Esta última fornece uma equação diferencial para o potencial gravitacional, a equação de Poisson.

PROBLEMAS

5.1. Quais destas forças são conservativas? Encontre o potencial para aquelas que são.

(a) $F_x = ayz + bx + c$, $F_y = axz + bz$, $F_z = axy + by$, onde a , b e c são constantes arbitrárias.

(b) $F_x = -ze^{-x}$, $F_y = \ln z$, $F_z = e^{-x} + y/z$

(c) $\vec{F} = a\hat{r}/r$

5.2. Mostre que a auto-energia gravitacional de uma esfera uniforme de massa M e raio R é

$$V = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (5.53)$$

Obs.: A auto-energia é o trabalho que um agente externo teve de realizar para colocar juntas todas as partículas, que formam o objeto, trazendo-as desde o infinito. Aqui estamos considerando somente a parte gravitacional.

5.3. Se o campo gravitacional é independente da distância radial dentro de uma esfera, encontre a função descrevendo a densidade $\rho = \rho(r)$ da esfera.

5.4. A *Equação de Poisson*. O vetor campo gravitacional $\vec{g}(\vec{r})$ de uma distribuição de massa é definido como sendo a força por unidade de massa sobre uma partícula no ponto \vec{r} . Como a força é igual a menos o gradiente da energia potencial, vemos que a energia potencial gravitacional por unidade de massa, ou simplesmente *potencial gravitacional*, que vamos representar por φ , é uma função tal que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$.

(a) Mostre que φ obedece à equação de Poisson,

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \quad (5.54)$$

(b) Mostre que o potencial $\varphi(\vec{r})$ de uma distribuição de massa $\rho(\vec{r})$ é dado por

$$\varphi(\vec{r}) = -\int \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (5.55)$$

5.5. Considere o potencial gravitacional

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (5.56)$$

Determine a distribuição de massa $\rho(r)$ correspondente a esse potencial.

5.6. Uma pequena rocha esférica coberta de areia aproxima-se radialmente de um planeta. Seja R o raio do planeta e ρ_p sua densidade. A densidade da rocha é ρ_r . Quando a rocha chega suficientemente próxima do planeta, a força de maré tendendo a arrancar a areia da rocha será maior que a força gravitacional atraindo a areia para a rocha. A distância d na qual os dois efeitos são iguais é chamada limite de Roche. Mostre que

$$d = R \left(\frac{2\rho_p}{\rho_r} \right)^{1/3} \quad (5.57)$$

5.7. Este problema ajuda a explicar a distribuição de massa em aglomerados globulares, que são aglomerados (quase) esféricamente simétricos de estrelas. Suponha que um grande número N de objetos puntiformes esteja se movendo sob a ação de suas atrações gravitacionais mútuas. Vamos adotar o seguinte modelo para o aglomerado: todos os objetos possuem massas iguais a m e energias cinéticas iguais e , portanto, velocidades iguais v . Cada um move-se numa órbita circular em torno do centro de massa comum do sistema. N é suficientemente grande de modo que a densidade de massa $\rho(r)$ possa ser considerada constante. Encontre $\rho(r)$.

5.8. *Matéria escura em galáxias.* Acredita-se hoje que a maior parte da matéria do Universo seja *escura*, ou seja, não pode ser detectada pela radiação que emite (ou deixa de emitir). Sua presença é inferida indiretamente, a partir dos movimentos de objetos astronômicos. Considere, por exemplo, as curvas de rotação das galáxias. Para fazer uma curva de rotação, calcula-se a velocidade de rotação de estrelas ao longo do comprimento de uma galáxia, medindo seus deslocamentos Doppler.

(a) Supondo que a distribuição de massa da galáxia possa ser aproximada como esférica, mostre que a velocidade de uma estrela em uma órbita de raio r (distância da estrela ao centro da galáxia) é

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (5.58)$$

onde $M(r)$ é a massa no interior da órbita.

(b) Se a massa da galáxia está concentrada na sua parte visível, então devemos esperar que $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ para distâncias bem além do raio visível. Em vez disso, astrônomos observam que a velocidade cresce, tendendo a um valor constante entre 100 e 200 km/s. Assim, para grandes distâncias, muito além do raio da galáxia, sua massa continua crescendo. $M(r)$ cresce linearmente com r . Considere a galáxia espiral M33. Sua massa visível é $M = 4 \times 10^{10} M_{\odot}$, onde $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$ é a massa do Sol. A uma distância de 10 kpc a velocidade observada é de 120 km/s, enquanto o valor previsto é de 40 km/s. Encontre a razão entre a massa da matéria escura, M_d e a massa observada M_o . Qual foi o valor de $M(r)$ usado para obter a velocidade de 40 km/s?

5.9. Considere um anel circular fino, uniforme, de raio a e massa M . Uma massa m é colocada no plano do anel. Encontre uma posição de equilíbrio e determine se ela é estável.

5.10. Qual é o potencial gravitacional dentro e fora de uma camada esférica, de densidade uniforme ρ , raio interno b e raio externo a ?

SOLUÇÕES

5.1. Devemos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$ para cada uma das forças.

$$(a) \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = ax + b - (ax + b) = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = ay - ay = 0,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = az - az = 0$$

A força é conservativa. No cálculo de $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$, vamos escolher $\vec{r}_0 = 0$ e o caminho, mostrado na Figura 5.10,

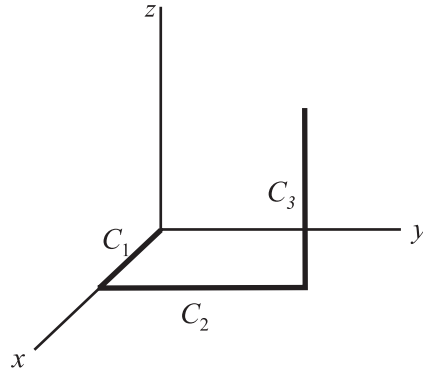


Figura 5.10

$C_1 \rightarrow d\vec{r}' = \hat{i}dx', y' = 0, z' = 0$; $C_2 \rightarrow d\vec{r}' = \hat{j}dy', x' = x, z' = 0$; $C_3 \rightarrow d\vec{r}' = \hat{k}dz', x' = x, y' = y$. Então,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int_{C_1} F_x dx' - \int_{C_2} F_y dy' - \int_{C_3} F_z dz' \\ &= -\int_0^x (bx' + c) dx' - \int_0^y 0 dy' - \int_0^z (axy + by) dz' \\ &= -\frac{1}{2}bx^2 - cx - axyz - byz \end{aligned}$$

$$(b) \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -e^{-x} + e^{-x} = 0,$$

$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 - 0 = 0$ e a força é conservativa. O potencial é determinado tomando-se o ponto de referência $\vec{r}_0 = (0, 0, 1)$. Temos então,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \int_0^x e^{-x'} dx' - \int_0^y 0 dy' - \int_1^z \left(e^{-x} + \frac{y}{z'} \right) dz' \\ &= 1 - e^{-x} - e^{-x}(z - 1) - y(\ln z - \ln 1) \\ &= 1 - ze^{-x} - y \ln z \end{aligned}$$

(c) As componentes da força são

$$F_x = \frac{ax}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_y = \frac{ay}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_z = \frac{az}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_x = \frac{ax}{x^2 + y^2 + z^2}, F_y = \frac{ay}{x^2 + y^2 + z^2}, F_z = \frac{az}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Assim,

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{ax2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{ay2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0$$

e por simetria, $\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$ e a força é conservativa.

Aqui poderíamos ter observado que $\vec{F} = a\hat{r}/r$ é uma força central que, como mostramos no texto, é conservativa. A energia potencial, é dada por

$$V(\vec{r}) = -\int_1^r \frac{a}{r} dr = -a \ln r$$

5.2. Uma esfera pode ser vista como um número muito grande de camadas concêntricas, desde $r = 0$ até $r = R$. Imagine que você vá juntando massa, camada por camada, para formar a esfera. A variação na energia potencial quando uma camada de raio r espessura dr é trazida desde o infinito (onde tomamos o zero da energia potencial) e colocada na sua posição na esfera é

$$dV = -\frac{GM(r)dM}{r} \quad (5.59)$$

onde $dM = \rho(4\pi r^2 dr)$ e $M(r)$ é a massa integrada de todas as camadas precedentes

$$M(r) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (5.60)$$

(a auto-energia da camada pode ser ignorada no limite $dr \rightarrow 0$). Portanto,

$$dV = -\frac{G(\rho \frac{4\pi}{3} r^3) \rho (4\pi r^2 dr)}{r} \quad (5.61)$$

e

$$V = -\frac{G(4\pi\rho)^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{G(4\pi\rho)^2}{15} R^5 \quad (5.62)$$

Agora,

$$\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (5.63)$$

e assim,

$$V = -\frac{G (4\pi \frac{3M}{4\pi R^3})^2}{15} R^5 = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (5.64)$$

O fato de a auto-energia gravitacional ser negativa indica que o sistema é gravitacionalmente ligado. A constante G , porém, é muito pequena ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$) e esta energia de ligação, para objetos do dia-a-dia, é desprezível quando comparada às ligações químicas, de origem elétrica.

5.3. Para uma distribuição esfericamente simétrica de massa, a lei de Gauss diz que

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM(r) \quad (5.65)$$

ou

$$g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (5.66)$$

onde $M(r)$ é a massa total contida até o raio r :

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (5.67)$$

Para que $g(r)$ seja constante,

$$\frac{GM(r)}{r^2} = g_0 = \text{constante} \quad (5.68)$$

Então,

$$g_0 r^2 = G \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (5.69)$$

Diferenciando ambos os lados desta equação com relação a r ,

$$2g_0 r = 4\pi G \rho(r) r^2 \quad (5.70)$$

e resolvendo para $\rho(r)$, encontramos

$$\rho(r) = \left(\frac{g_0}{2\pi G} \right) \frac{1}{r} \quad (5.71)$$

Logo, $\rho(r)$ é inversamente proporcional a r .

5.4. (a) Vimos que o vetor campo obedece à lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (5.72)$$

Inserindo $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$ no lado esquerdo desta equação, obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\nabla^2\phi \quad (5.73)$$

e a Equação (5.72) torna-se

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (5.74)$$

Quando o lado direito da Equação (5.74) é igual a zero, o resultado, $\nabla^2\phi = 0$, é a famosa *equação de Laplace*.

(b) Referindo-se à **Figura 5.11**, o potencial no ponto P devido ao elemento de massa dm é, por definição,

$$d\phi = -\frac{Gdm}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.75)$$

Agora, o elemento de massa na posição \vec{r}' é $dm = \rho(\vec{r}')dV'$ e, assim, integrando sobre toda a distribuição, temos o resultado procurado

$$\phi(\vec{r}) = -\int \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (5.76)$$

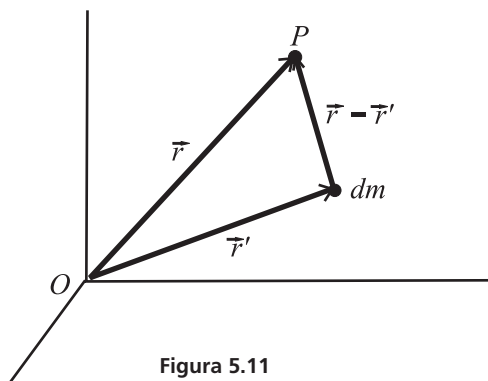


Figura 5.11

5.5. Solução: se este é um potencial gravitacional, ele deve satisfazer a equação de Poisson. O laplaciano em coordenadas polares esféricas é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (5.77)$$

Como o potencial depende somente de r , temos que

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{3GM}{a^3} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{-5/2} \quad (5.78)$$

Substituindo na equação de Poisson, $\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho$, obtemos para a densidade de massa

$$\rho(r) = \left(\frac{3GM}{4\pi a^3} \right) \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{-5/2} \quad (5.79)$$

Esta é distribuição de densidade de Plummer e é usada como um modelo analítico (*toy model*) para aglomerados globulares ou galáxias. O perfil da densidade está no gráfico da **Figura 5.12**.

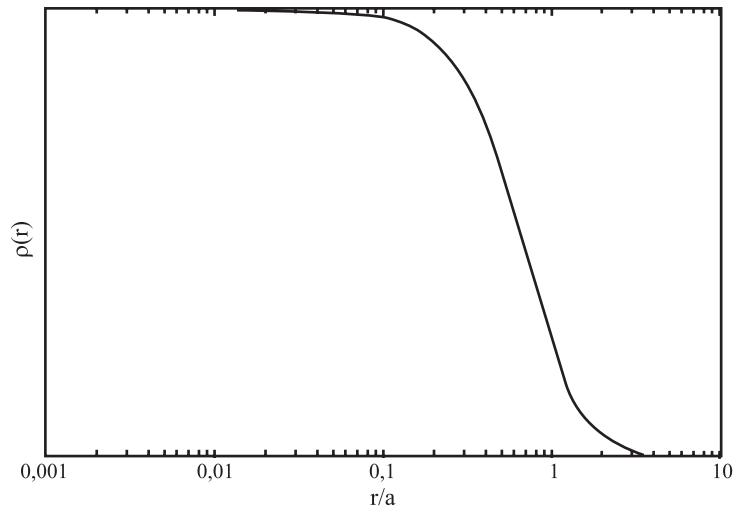


Figura 5.12

A constante a é chamada raio de Plummer. A descrição de galáxias elípticas pelo modelo de Plummer é muito pobre porque as observações dessas galáxias mostram uma divergência da densidade próxima ao centro.

5.6. Seja d a distância entre o centro da rocha e o centro do planeta e seja r o raio da rocha (que não é dado, mas sabemos que $r \ll d$)

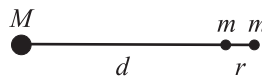


Figura 5.13

A diferença entre a força exercida pelo planeta sobre uma partícula de massa m no centro da rocha e uma partícula de mesma massa na superfície da rocha é

$$\begin{aligned} F_{\text{maré}} &= -\frac{GMm}{(d+r)^2} + \frac{GMm}{d^2} \\ &= \frac{GMm}{d^2} \left[1 - \left(1 + \frac{r}{d} \right)^{-2} \right] \approx \frac{GMm}{d^2} \left[1 - 1 + \frac{2r}{d} \right] = \frac{2GMmr}{d^3} \end{aligned} \quad (5.80)$$

$F_{\text{maré}}$ é a chamada força de maré longitudinal. Já a força exercida pela rocha sobre a partícula de massa m em sua superfície é

$$F_R = \frac{GM_r m}{r^2} \quad (5.81)$$

Fazendo $F_{\text{maré}} = F_R$, obtemos para d :

$$d^3 = \frac{2M}{M_r} r^3 \quad (5.82)$$

Para uma esfera uniforme de massa M e densidade ρ_p e raio R ,

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_p \quad (5.83)$$

Similarmente,

$$M_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_r \quad (5.84)$$

Logo,

$$d^3 = \frac{2 \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_p}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_r} r^3 = R^3 \frac{2\rho_p}{\rho_r} \quad (5.85)$$

ou

$$d = R \left(\frac{2\rho_p}{\rho_r} \right)^{1/3} \quad (5.86)$$

5.7. Solução: cada partícula move-se em uma órbita circular. A gravidade é responsável pela aceleração centrípeta:

$$\vec{g}(r) = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (5.87)$$

Por outro lado, usando a lei de Gauss com uma superfície gaussiana esférica de raio r , concluímos que

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{r} \quad (5.88)$$

onde $M(r)$ é a massa total das estrelas no interior da superfície gaussiana. Igualando as duas expressões, obtemos

$$v^2 r = GM(r) = G \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (5.89)$$

Lembrando que v é constante, diferenciando os dois lados em relação a r , achamos

$$v^2 = G \rho(r) 4\pi r^2 \quad (5.90)$$

ou,

$$\rho(r) = \frac{v^2}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (5.91)$$

A densidade cai como $1/r^2$

5.8. (a) Veja a dedução no Problema (5.7), Equação (5.89).

(b) A razão entre as massas é

$$\frac{M_{dark}}{M_o} = \left(\frac{v_{obs}}{v_{prev}} \right)^2 = \left(\frac{120}{40} \right)^2 = 9 \quad (5.92)$$

ou seja, 90% da massa é de matéria escura. Da expressão do item (a),

$$M(r) = \frac{rv^2}{G} = \frac{10 \times 3,08 \times 10^{16} m \times 16 \times 10^8 m^2/s^2}{6,67 \times 10^{-11} m^3/s^2 \cdot kg} = 3,7 \times 10^6 M \quad (5.93)$$

5.9. Por simetria, sabemos que a massa colocada no centro do anel está em equilíbrio porque ela está rodeada uniformemente de massa. Para saber se o equilíbrio é estável, precisamos deslocá-la da posição de equilíbrio. Vamos colocar a massa m em um ponto a uma distância r' do centro e escolher o eixo x como sendo ao longo desta direção (ver Figura 5.14).

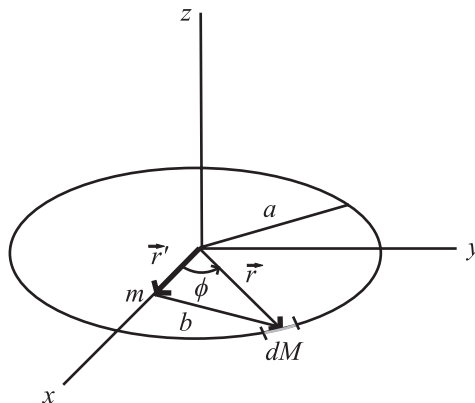


Figura 5.14

A energia potencial é dada por

$$dV = -Gm \frac{dM}{b} = -\frac{Gm\rho a}{b} d\phi \quad (5.94)$$

onde $\rho = M/2\pi a$ e $dM = \rho a d\phi$. A distância b entre dM e m é

$$b = |\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \phi)^{1/2} = a \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{1/2} \quad (5.95)$$

Para calcular a energia potencial, precisamos do valor de $1/b$ quando $r' \ll a$. Usando a expansão

$$(1 + \xi)^{-n} = 1 - n\xi + \frac{n(n+1)\xi^2}{2} + \dots \quad (5.96)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.97)$$

Substituindo na Equação (5.94) e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} V(r') &= -Gm\rho \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \right\} d\phi \quad (5.98) \\ &= -2\pi Gm\rho \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

ou,

$$V(r') = \frac{-GmM}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (5.99)$$

A posição de equilíbrio é dada por

$$\frac{dV}{dr'} = 0 = \frac{-GmM}{a} \frac{1}{2} \frac{r'}{a^2} + \dots \quad (5.100)$$

e portanto $r' = 0$ é uma posição de equilíbrio. Calculando a derivada segunda de V ,

$$\frac{d^2V}{dr'^2} = \frac{-GmM}{2a^3} + \dots < 0 \quad (5.101)$$

e o ponto de equilíbrio é instável.

5.10. A massa total da camada é

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho (a^3 - b^3) \quad (5.102)$$

Vamos aproveitar a simetria esférica do problema para usar a lei de Gauss para determinar o campo gravitacional.

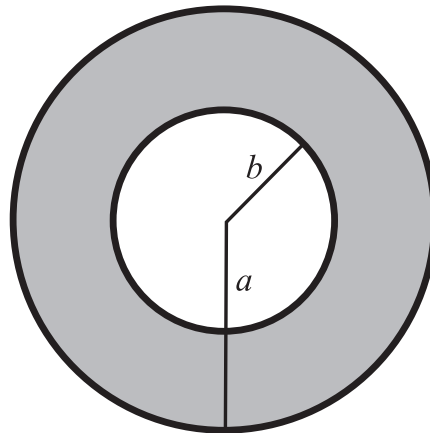


Figura 5.15

Tomando uma superfície gaussiana esférica de raio $r > a$ e com o centro no centro da casca, temos

$$4\pi r^2 g = -4\pi GM \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (5.103)$$

Em seguida, traçamos uma superfície gaussiana com raio $b < r < a$. Neste caso,

$$4\pi r^2 g = -4\pi G \frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - b^3) \Rightarrow \vec{g} = -\frac{4\pi \rho G}{3} \left(r - \frac{b^3}{r^2} \right) \hat{r} \quad (5.104)$$

Finalmente, a lei de Gauss aplicada a uma superfície gaussiana de raio $r < b$ dá:

$$4\pi r^2 g = 0 \Rightarrow \vec{g} = 0 \quad (5.105)$$

Agora vamos calcular o potencial $\varphi(r)$, fazendo $\varphi(\infty) = 0$. Temos que, para $r > a$,

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r g(r') dr' = GM \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \Rightarrow \varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (5.106)$$

Para $b < r < a$,

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(a) &= \frac{4\pi \rho G}{3} \int_a^r \left(r' - \frac{b^3}{r'^2} \right) dr' \\ &= \frac{4\pi \rho G}{3} \left[\frac{1}{2} (r^2 - a^2) + \frac{b^3}{r} - \frac{b^3}{a} \right] \end{aligned} \quad (5.107)$$

Então, sabendo que $\varphi(a) = -GM/a = -(4\pi G \rho / 3a) (a^3 - b^3)$, chegamos ao seguinte resultado:

$$\varphi(r) = -4\pi \rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3r} - \frac{r^2}{6} \right) \quad (5.108)$$

Finalmente, para $r < b$ como o campo é igual a zero, $\varphi(r) - \varphi(b) = 0$ e assim,

$$\varphi(r) = -2\pi \rho G (a^2 - b^2) \quad (5.109)$$

O método Lagrangiano e o Princípio de Mínima Ação

AULA 6

Meta da aula

Descrever o método Lagrangiano e mostrar que, nessa formulação da mecânica, as equações do movimento podem ser deduzidas a partir do Princípio de Mínima Ação.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- escrever a Lagrangiana para diversos sistemas simples e as equações de Euler-Lagrange correspondentes;
- compreender as relações entre as leis de Newton, as equações de Euler-Lagrange e o Princípio de Mínima Ação.

QUEM PRECISA DA FORÇA?

Você aprendeu que o conceito de força é fundamental para a descrição do movimento de um corpo. Uma vez calculada a resultante das forças que atuam sobre ele, obtemos, pela segunda lei de Newton, uma equação diferencial, a equação do movimento, cuja solução, para condições iniciais dadas, permite determinar completamente o movimento do corpo. Este é o método Newtoniano. No entanto, talvez para sua surpresa, há outro método, mais poderoso, em geral mais simples, que permite chegar à mesma equação do movimento que no método Newtoniano, porém sem fazer uso do conceito de força, chamado de *método Lagrangiano*. Nós vamos primeiro apresentar o método Lagrangiano, dizendo quais são suas regras, sem qualquer justificativa, e mostrar que elas funcionam. Depois, definiremos uma quantidade chamada ação e mostraremos que o método Lagrangiano pode ser justificado por ser meio do *Princípio de Mínima Ação*.

A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Vamos definir a seguinte combinação das energias cinética T e potencial V :

$$L = T - V \quad (6.1)$$

L é chamada Lagrangiana. Note o sinal negativo na definição. Se fosse um sinal positivo, teríamos a energia mecânica total. Uma partícula de massa m , que se move em uma dimensão, tem uma Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (6.2)$$

Agora, escrevemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (6.3)$$

Esta é a *equação de Euler-Lagrange*. Ela nos dá a equação do movimento da partícula. De fato, com a Lagrangiana (6.2) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{V(x)}{\partial x} = F(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

e, substituindo na (6.3), obtemos

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (6.5)$$

que é a segunda lei de Newton.

Se o problema envolver mais de uma coordenada, como ocorre na maioria das vezes, devemos aplicar a Equação (6.3) para cada coordenada. Serão tantas equações de Euler-Lagrange quantas forem as coordenadas independentes. Assim, se a energia potencial for $V(x, y, z)$, teremos para o movimento de uma partícula em três dimensões, em coordenadas cartesianas,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (6.6)$$

As equações de Euler-Lagrange serão três

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Seguem, então, as equações do movimento

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (6.8)$$

Estas, como você sabe, podem ser escritas na forma vetorial

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V \quad (6.9)$$

ou

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (6.10)$$

O método Lagrangiano também permite que tratemos o mesmo problema em outras coordenadas. Basta escrever a Lagrangiana em termos das coordenadas desejadas e uma equação de Euler-Lagrange para cada nova coordenada. Como exemplo, vamos considerar um problema em duas dimensões nas coordenadas polares planas da **Figura 6.1**.

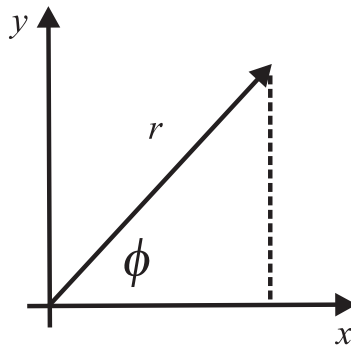


Figura 6.1: Definição das coordenadas polares planas r, ϕ .

Com as energias cinética e potencial escritas em coordenadas polares planas, a Lagrangiana tem a forma

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r, \phi) \quad (6.11)$$

As equações de Euler-Lagrange para r e ϕ são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (6.12)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (6.13)$$

Fazendo as derivadas,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \quad (6.14)$$

obtemos as equações do movimento

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (6.15)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (6.16)$$

Embora não seja necessário, é instrutivo neste ponto interpretar as Equações (6.15) e (6.16) em termos de forças só para adquirirmos a confiança de que as equações de Euler-Lagrange dão realmente os mesmos resultados que o método Newtoniano. Para isso, vamos precisar da expressão da força em coordenadas polares planas,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ &= F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi}\end{aligned}\quad (6.17)$$

onde usamos a expressão do gradiente em coordenadas polares planas dada na Aula 5. F_r e F_ϕ são as componentes radial e tangencial da força, respectivamente. Os unitários nas direções radial e tangencial são designados por \hat{r} e $\hat{\phi}$ (ver Figura 6.2).

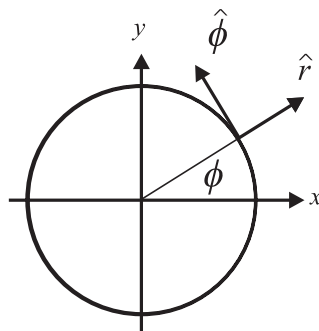


Figura 6.2: Os vetores unitários \hat{r} e $\hat{\phi}$.

Nestas mesmas coordenadas, a velocidade da partícula é

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \\ &= v_r\hat{r} + v_\phi\hat{\phi}\end{aligned}\quad (6.18)$$

o momento angular,

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ &= mr^2\dot{\phi}\hat{k} = J_z\hat{k}\end{aligned}\quad (6.19)$$

e o torque

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= rF_\phi\hat{k} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{k}\end{aligned}\quad (6.20)$$

Em termos destas quantidades, vemos que a Equação (6.16) é simplesmente a equação da variação do momento angular

$$\frac{dJ_z}{dt} = \tau_z \quad (6.21)$$

Já a Equação (6.15) assume a forma familiar

$$m\ddot{r} = \frac{mv_{\phi}^2}{r} + F_r \quad (6.22)$$

onde o primeiro termo do lado direito é a força centrípeta.

Uma coisa importante que você já deve estar percebendo no método Lagrangiano: mesmo que você nunca tivesse ouvido falar de termos como “torque”, “força centrípeta” ou “momento angular” você poderia obter as equações corretas simplesmente escrevendo as energias cinética e potencial, e fazendo algumas derivadas. Apesar disso, ainda pode parecer uma questão puramente de preferência pessoal se usamos o método Lagrangiano ou o método Newtoniano da segunda lei. Afinal os dois produzem as mesmas equações. No entanto, em problemas envolvendo mais de uma variável, usualmente é mais fácil escrever T e V do que escrever todas as forças. Isso porque T e V são simples *escalares*. As forças são *vetores* e é muito fácil confundir-se quando elas apontam em várias direções. Você também deve ter notado que, uma vez escrita a Lagrangiana, não temos mais que pensar, apenas efetuar algumas derivadas. Mas há razões mais fundamentais para introduzir o método Lagrangiano, como veremos nas próximas seções e na próxima aula.

Exemplo 6.1. Encontre a equação do movimento para um pêndulo simples. Ver Figura 6.3.

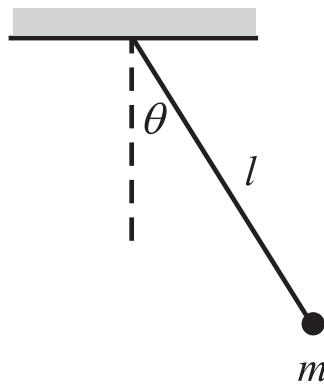


Figura 6.3: Pêndulo simples de massa m e comprimento l .

Solução: tomando o zero da energia potencial em $\theta = 0$, temos

$$V = mgl(1 - \cos\theta) \quad (6.23)$$

A velocidade da massa m está na direção $\hat{\theta}$ e é igual a $l\dot{\theta}$. A Lagrangiana do pêndulo é então

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad (6.24)$$

Assim, fazendo as derivadas, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (6.25)$$

e substituindo na equação de Euler-Lagrange, encontramos

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \quad (6.26)$$

ou

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (6.27)$$

Note que, para encontrar esta equação do movimento, não precisamos da expressão da componente polar da aceleração, nem da tensão no fio.

Exemplo 6.2. Considere agora um pêndulo consistindo de uma mola com uma massa m na sua extremidade (Figura 6.4).

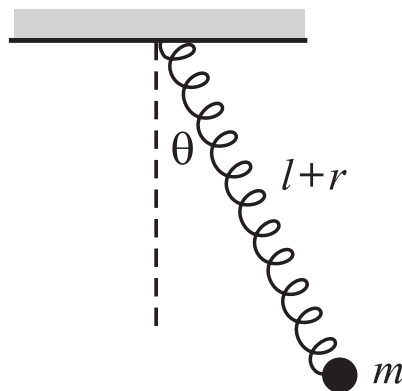


Figura 6.4: Pêndulo com mola. A barra sem massa, em torno da qual a mola está enrolada, não é mostrada na figura.

A mola é mantida em linha reta por uma barra rígida, sem massa, em torno da qual está enrolada. O comprimento de equilíbrio da mola é l . Sejam $l + r(t)$ e $\theta(t)$ o comprimento da mola e seu ângulo com a vertical no instante t , respectivamente. Supondo que o movimento ocorra num plano vertical, queremos encontrar as equações do movimento para r e θ .
Solução: a energia cinética tem uma parte radial e uma parte tangencial,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (l + r)^2 \dot{\theta}^2) \quad (6.28)$$

A energia potencial tem duas contribuições: a energia potencial gravitacional e a energia potencial da mola

$$V(r, \theta) = -mg(l + r)\cos\theta + \frac{1}{2}kr^2 \quad (6.29)$$

Aqui o zero da energia potencial foi escolhido como sendo em $\theta = 0$. A Lagrangiana é, portanto,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (l + r)^2 \dot{\theta}^2) + mg(l + r)\cos\theta - \frac{1}{2}kr^2 \quad (6.30)$$

Fazendo as derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m(l + r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kr \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m(l + r)^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg(l + r)\sin\theta \end{aligned} \quad (6.31)$$

e substituindo nas equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações do movimento,

$$m\ddot{r} = m(l + r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kr \quad (6.32)$$

$$(l + r)\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -g\sin\theta \quad (6.33)$$

O PRINCÍPIO DA AÇÃO ESTACIONÁRIA

Vamos trabalhar, por enquanto, em uma dimensão espacial. A quantidade

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (6.34)$$

é chamada *ação*. É um número com dimensões de (energia)×(tempo).

Pergunta: que outras quantidades em Física possuem dimensão de ação? Cite duas.

Resposta: (i) O momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (verifique você mesmo por análise dimensional). (ii) A constante de Planck da mecânica quântica, $h = 6,62 \times 10^{-23} \text{ J.s}$, uma das constantes fundamentais da natureza.

Considere uma função $x(t)$ definida no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, e cujas extremidades são $x(t_1) = x_1$ e $x(t_2) = x_2$, onde x_1 e x_2 são valores dados. Chamaremos $x(t)$ de caminho. Está claro na **Figura 6.5** que existe uma infinidade de caminhos $x(t)$ no plano t, x ligando o ponto (x_1, t_1) ao ponto (x_2, t_2) .

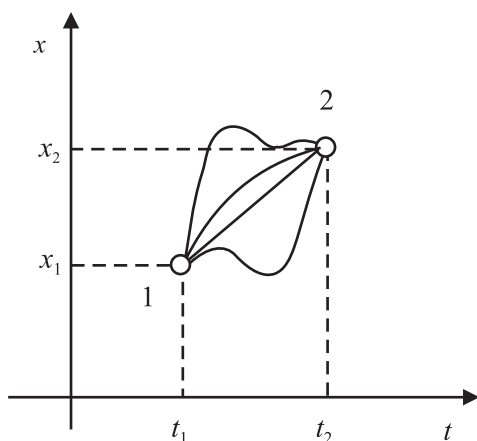


Figura 6.5: Diferentes caminhos ligando os pontos (x_1, t_1) e (x_2, t_2) .

Não confundir um caminho $x(t)$ com a trajetória da partícula. A trajetória da partícula em uma dimensão é, para todos os caminhos, a reta ligando x_1 a x_2 .

A ação S depende de L e L , por sua vez, depende de $x(t)$ por meio da Equação (6.1). Dada qualquer função $x(t)$, podemos produzir um número S . É importante notar, no entanto, que S *depende de todo o caminho* $x(t)$. De fato, para calcular S precisamos dos valores de $L(x, \dot{x}, t)$ para todos os valores de t no intervalo (t_1, t_2) , mas para isso precisamos de todos os valores de x e \dot{x} no intervalo (t_1, t_2) . Dizemos que a ação é um *funcional* de $x(t)$ e isto é representado pela notação $S[x(t)]$.

Vamos agora colocar a seguinte questão: para que caminho $x(t)$ a ação S terá um valor estacionário? Um valor estacionário de S é um mínimo local, um máximo local ou um ponto de sela. A resposta é dada pelo seguinte teorema:

Teorema: se um caminho $x(t)$ ligando o ponto (x_1, t_1) ao ponto (x_2, t_2) dá um valor estacionário de $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$, então,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (6.35)$$

para esse caminho.

Demonstração: seja $x(t)$ o caminho que torna a ação estacionária e $x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon \eta(t)$ uma curva vizinha, onde ε é um parâmetro infinitesimal arbitrário e $\eta(t)$ uma função diferenciável que se anula em $x = x_1$ e $x = x_2$:

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \quad (6.36)$$

Essas últimas condições são necessárias para que o caminho $x_\varepsilon(t)$ também passe pelos pontos extremos (t_1, x_1) e (t_2, x_2) . A ação para o caminho $x_\varepsilon(t)$ é

$$f(\varepsilon) = S[x_\varepsilon(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_\varepsilon(t), \dot{x}_\varepsilon(t), t) dt \quad (6.37)$$

Uma vez que, por hipótese, $x(t)$ dá um extremo de S , então a função $f(\varepsilon)$ deve passar por um extremo em $\varepsilon = 0$, pois neste caso $x(t, \varepsilon)$ torna-se idêntica a $x(t)$. Portanto, uma condição necessária para que $x(t)$ torne S um extremo é que

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\eta}{dt} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Vamos eliminar $d\eta/dt$ da Equação (6.38) fazendo uma integração por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\eta}{dt} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt \quad (6.39)$$

onde usamos as condições (6.36). Com a ajuda deste último resultado, a Equação (6.38) toma a forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt = 0 \quad (6.40)$$

Como η é arbitrário, segue que, no intervalo $[t_1, t_2]$, devemos ter

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (6.41)$$

Vemos que a equação de Euler-Lagrange é uma consequência de a ação ter um valor estacionário para o caminho $x(t)$ determinado pela segunda lei de Newton. Logo, chegamos a um resultado importante: podemos substituir a segunda lei de Newton pelo seguinte princípio:

Princípio da ação estacionária

O caminho $x(t)$ de uma partícula entre dois pontos fixos quaisquer (x_1, t_1) e (x_2, t_2) é aquele que dá um valor estacionário para a ação.

O princípio da ação estacionária é equivalente à segunda lei de Newton, $F = ma$, porque o teorema anterior mostra que se temos um valor estacionário de S , então a equação de Euler-Lagrange vale. Mas a equação de Euler-Lagrange é equivalente a $F = ma$. Portanto, “ação estacionária” é equivalente a $F = ma$.

Em geral, o valor estacionário de S é um mínimo e daí o princípio da ação estacionária ser mais conhecido como *Princípio de Mínima Ação*. Esse princípio, como formulado aqui, é também conhecido como princípio de Hamilton.

UMA BREVE HISTÓRIA DO PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Atribui-se a Heron de Alexandria, que viveu no século I a.C., um dos mais significativos descobrimentos da ciência grega. Já era conhecida, muito tempo antes, a chamada lei da reflexão da luz: “Um raio de luz se reflete em um espelho de tal modo que o raio refletido se encontra no plano de incidência e o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência”. Heron explicou a lei da reflexão como consequência do *princípio da mínima distância*: “Um raio de luz, entre a fonte e um ponto de recepção, segue o percurso de menor distância”. Vemos de imediato, a partir deste princípio que, em um meio homogêneo, se não houver nenhum obstáculo entre a fonte de luz e o ponto de recepção, um feixe de luz segue uma linha reta, já que uma reta é a menor distância entre dois pontos.

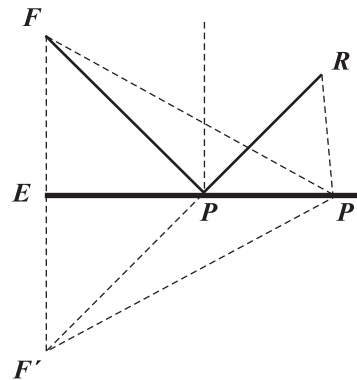


Figura 6.6: Construção geométrica mostrando como encontrar o percurso de menor distância entre os pontos F e R passando por um ponto do espelho. É aquela que corresponde à menor distância entre o ponto imagem F' de F e o ponto R .

Suponha agora que o raio de luz se reflita na superfície de um espelho plano. É evidente na construção geométrica da **Figura 6.6** que a menor distância entre a fonte de luz F e o ponto de recepção R , passando pelo espelho E , é o percurso FPR e para esse percurso vemos que o ângulo de incidência θ é igual ao ângulo de reflexão θ' .

O princípio de Heron não se aplica, no entanto, quando há uma mudança de meio. Na interface entre os dois meios, a direção do raio de luz muda. Esse fenômeno é conhecido como refração. O percurso do raio de luz entre dois pontos em meios diferentes é uma linha quebrada que claramente não é a menor distância entre os pontos.

Somente séculos mais tarde, o francês Pierre de Fermat (1601-1665) formulou o *princípio do tempo mínimo* que permitiu explicar a lei da reflexão e a lei da refração. O princípio do tempo mínimo, ou princípio de Fermat, diz o seguinte: “Um raio de luz, entre a fonte e um ponto de recepção, segue o percurso que toma o menor tempo possível”. Note que a lei da reflexão é uma consequência trivial do princípio de Fermat: em um meio homogêneo, a velocidade da luz é constante e independente da direção e, portanto, o percurso mais curto é também o percurso mais rápido.

Quando a luz passa de um meio 1 para um meio 2 de densidade diferente, a lei da refração diz que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (6.42)$$

onde θ_1 é o ângulo de incidência, θ_2 o ângulo de refração, v_1 a velocidade da luz no meio 1 e v_2 é a velocidade da luz no meio 2. Para mostrar como essa lei segue do princípio de Fermat, vamos considerar o seguinte problema equivalente: você está em uma praia e de repente ouve os gritos de uma pessoa na água pedindo socorro. Seja v_1 a sua velocidade máxima correndo na areia e v_2 sua velocidade máxima nadando naquela praia. Que percurso você deverá seguir para chegar o mais rápido possível até a pessoa em apuros? Claro que você vai correr e nadar o mais rápido que puder e vai fazer os percursos na terra e na água em linha reta. Mas isto não é suficiente: você terá ainda de escolher entre uma infinidade de percursos possíveis. Na **Figura 6.7** ilustramos um deles. Vamos agora mostrar que o menor tempo possível é obtido quando os ângulos θ_1 e θ_2 satisfazem a lei da refração (6.42).

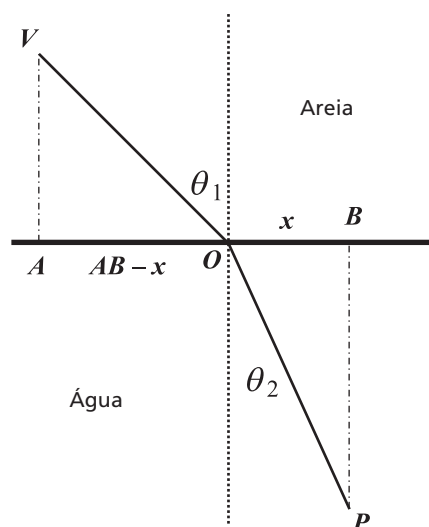


Figura 6.7: Um possível percurso entre V e P: linha reta na areia entre V e O seguido de linha reta na água entre O e P.

O tempo que você vai levar seguindo o percurso VOP é dado por

$$t = \frac{\overline{VO}}{v_1} + \frac{\overline{OP}}{v_2} = \frac{\sqrt{(\overline{AB} - x)^2 + \overline{VA}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + \overline{BP}^2}}{v_2} \quad (6.43)$$

O tempo será mínimo quando $dt/dx = 0$ e $d^2t/dx^2 > 0$. Agora,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= -\frac{1}{2} \frac{2(\overline{AB}-x)}{v_1 \sqrt{(\overline{AB}-x)^2 + \overline{VA}^2}} + \frac{1}{2} \frac{2x}{v_2 \sqrt{x^2 + \overline{BP}^2}} \quad (6.44) \\ &= -\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} + \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}\end{aligned}$$

e, fazendo $dt/dx = 0$, obtemos

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2} \quad (6.45)$$

que é exatamente a lei da refração.

O princípio de Fermat se tornou a base da Ótica Geométrica. No entanto, os contemporâneos de Fermat tinham uma objeção fundamental ao seu princípio na forma de uma pergunta profunda: como poderia a luz saber, de antemão, qual percurso é o mais rápido? Além disso, no exemplo anterior, você tinha um propósito ao escolher o percurso: chegar o mais rápido possível até a pessoa em dificuldade. Os princípios de Heron e Fermat introduziram na Física a idéia da existência de um ‘propósito’ ou ‘finalidade’: aparentemente, a luz escolhe o percurso que satisfaz a Equação (6.45) com o propósito de minimizar o tempo de percurso.

Em 1746, Pierre Louis Moreau de Maupertuis formulou o princípio da mínima ação. Sua motivação era dar um ponto de partida mais fundamental para a mecânica e, para isso, guiou-se pelo sentimento de que deveria existir de uma certa economia na Natureza. Movimentos naturais deveriam ser tais que tornassem alguma quantidade um mínimo. Essa quantidade, ele descobriu, deveria ser a ação. O caminho que uma partícula segue entre um ponto no espaço em um certo instante, a um outro ponto em outro instante, é aquele que minimiza a ação. E esse caminho é igual àquele calculado pela mecânica Newtoniana. Mas aqui volta a questão: como a partícula sabe de antemão qual o caminho que dá a menor ação? Será que ela “fareja” todos os caminhos possíveis antes de se decidir por aquele que dá a menor ação?

As respostas para as perguntas que fizemos aqui felizmente existem, porém, fora da Física Clássica, na *Mecânica Quântica*. Pode-se mostrar que, na verdade, uma partícula explora todos os possíveis caminhos entre sua posição inicial e sua posição final. Ela não tem de decidir nada, não tem nenhum ‘propósito’.

A explicação é mais ou menos assim: em Mecânica Quântica, a cada caminho que possamos imaginar entre dois pontos, associamos um número complexo $e^{iS/\hbar}$ (onde $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ é a constante de Planck). Esses números complexos têm valor absoluto 1 e são chamados “fases”. Para os objetos tratados em Mecânica Clássica, $S \gg \hbar$. As fases de todos os possíveis caminhos devem ser adicionadas para dar a “amplitude de probabilidade” da partícula ir de um ponto a outro. O valor absoluto da amplitude deve ser elevado ao quadrado para obter a probabilidade. O ponto básico é que nos valores não estacionários de S , como $S \gg \hbar$, contribuições de caminhos vizinhos se cancelam. Não havendo contribuição para a amplitude de valores não estacionários de S , nós não observamos os caminhos associados a eles. Em um valor estacionário de S , no entanto, as fases de caminhos vizinhos têm essencialmente o mesmo valor e, assim, adicionam-se construtivamente. Existe, portanto, uma probabilidade diferente de zero de a partícula tomar um caminho que dê um valor, estacionário de S . Logo, esse é o caminho que observamos.

Embora você ainda não possa compreender completamente o que foi dito no parágrafo anterior, pelo menos, você agora sabe que a Mecânica Clássica pode ser ‘explicada’ a partir de uma teoria mais fundamental, a Mecânica Quântica, e que essa explicação ocorre de modo mais natural por meio do formalismo Lagrangiano da Mecânica Clássica. Na próxima aula, você verá que o método Lagrangiano permite também obter um resultado de importância fundamental na Física: a relação entre simetrias e leis de conservação.

RESUMO

A Lagrangiana de um sistema é a diferença entre sua energia cinética e sua energia potencial. Um caminho é definido como uma função $x(t)$ ligando um ponto (t_1, x_1) a um outro ponto (t_2, x_2) . Com a Lagrangiana podemos escrever a ação, uma quantidade que depende de todos os caminhos entre dois pontos (t_1, x_1) e (t_2, x_2) dados.

O *princípio da ação estacionária* diz que o caminho $x(t)$ de uma partícula entre dois pontos fixos quaisquer (x_1, t_1) e (x_2, t_2) é aquele que dá um valor estacionário para a ação. O princípio da ação estacionária é equivalente à segunda lei de Newton, porque quando temos um valor estacionário da ação, então a equação de Euler-Lagrange vale. A equação de Euler-Lagrange, porém, é equivalente à segunda lei de Newton.

Para resolver um problema pelo método Lagrangiano, basta escrever a Lagrangiana e usar as equações de Euler-Lagrange para obter as equações do movimento.

PROBLEMAS

6.1. Para uma partícula livre, a Lagrangiana é $L = m\dot{x}^2/2$. Mostre que o valor mínimo da ação da partícula, S_m , para o caminho clássico ligando a posição x_1 no instante t_1 à posição x_2 no instante t_2 , é dada por

$$S_m = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} \quad (6.46)$$

6.2. Um bloco de massa M é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito, e preso a uma parede com a ajuda de uma mola sem massa e constante de mola k , como mostrado na figura. A mola está em seu estado de equilíbrio quando o bloco está a uma distância x_0 da parede. Um pêndulo de massa m e comprimento l está preso ao carrinho (imagine uma calha ao longo da mesa por onde passa o fio do pêndulo).

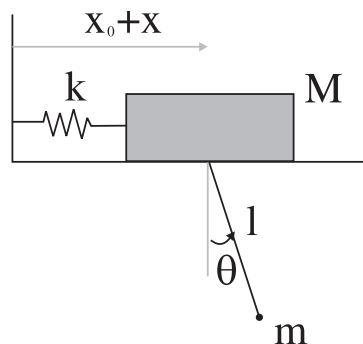


Figura 6.8

(a) Escreva a Lagrangiana $L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ do sistema, onde x é a posição do bloco, medida a partir da posição de equilíbrio da mola, e θ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical.

(b) Escreva, das equações de Euler-Lagrange, as equações do movimento para as coordenadas x e θ .

(c) Linearize as equações do movimento, ache as coordenadas normais e descreva o movimento dos dois modos normais. Considere que os parâmetros do sistema tenham sido escolhidos de tal modo que $(k/(m + M)) = g/l$.

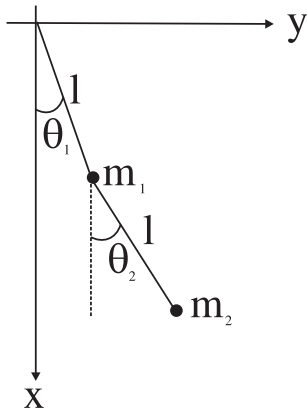


Figura 6.9

6.3 Considere o pêndulo duplo na figura a seguir.

(a) Mostre que a Lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1gl\cos\theta_1 + m_2gl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

e, a partir dela, encontre as equações do movimento para os dois pêndulos acoplados.

(b) Linearize as equações do movimento em torno da configuração de equilíbrio, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ para encontrar as equações do movimento que descrevem pequenas oscilações do sistema.

(c) Encontre as frequências de oscilação dos modos normais.

6.4. Uma conta está livre para deslizar ao longo de um aro sem atrito de raio R . O aro gira com velocidade angular constante ω em torno de um diâmetro vertical (veja a figura).

(a) Encontre a equação do movimento para a posição da conta.

(b) Quais são as posições de equilíbrio? Qual é a frequência de pequenas oscilações em torno do equilíbrio estável?

(c) Existe um valor de ω que é bastante especial. Qual é ele e por que ele é especial?

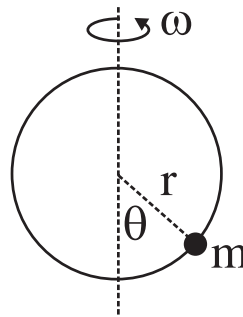


Figura 6.10

6.5. Lagrangiana para o movimento de uma partícula carregada.

Uma partícula de carga q e massa m se move nos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} dados. A Lagrangiana da partícula é

$$L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q \Phi \quad (6.47)$$

onde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $\Phi(\vec{r}, t)$ são os potenciais vetor e escalar, respectivamente. Se você ainda não viu como esses potenciais são introduzidos no eletromagnetismo é suficiente saber, para o nosso problema, que o campo elétrico \vec{E} e o campo magnético \vec{B} são obtidos a partir deles como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (6.48)$$

Use a Lagrangiana (6.47) para encontrar a equação do movimento da partícula e mostre que a equação é equivalente à lei de força de Lorentz,

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (6.49)$$

6.6. Um bloco de massa m é colocado num plano sem atrito que está inicialmente na horizontal (isto é, $\phi = 0$ em $t = 0$). O plano é levantado por uma das extremidades (veja a figura) a uma taxa constante tal que $\dot{\phi} = \omega$, fazendo com que o bloco desça o plano. Determine o movimento do bloco. As condições iniciais são $r(0) = R$ e $\dot{r}(0) = 0$.

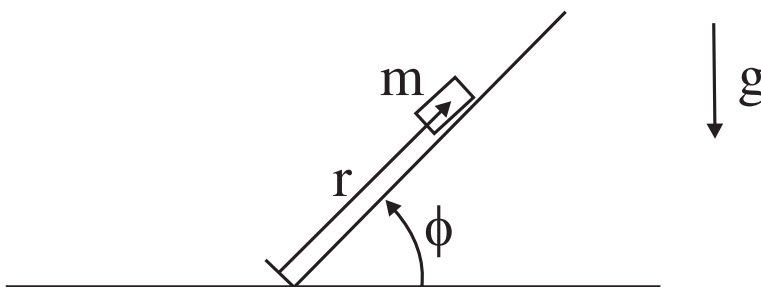


Figura 6.11

6.7. Uma conta de massa m desliza sem atrito em um fio com a forma de uma cicloide, cujas equações paramétricas são

$$x = \alpha(\theta - \sin\theta), \quad y = \alpha(1 + \cos\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (6.50)$$

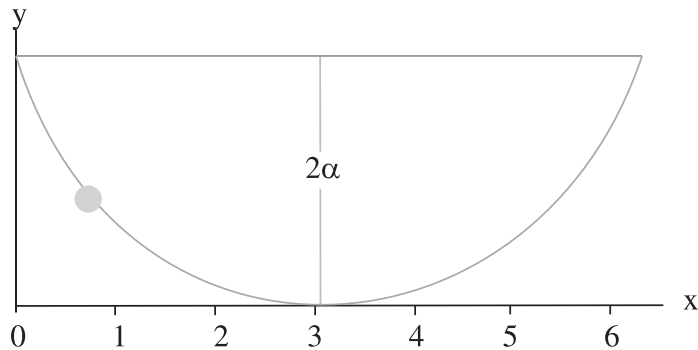


Figura 6.12

(a) Escreva a Lagrangiana da partícula.

(b) Mostre que o comprimento s de um pedaço de arco da cicloide que vai do ponto de mínimo, $\theta = \pi$, até um valor de θ qualquer é dado por

$$s = 4\alpha \cos \frac{\theta}{2} \quad (6.51)$$

(c) Escreva a Lagrangiana em termos da coordenada s e mostre que a equação do movimento tem a forma

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4\alpha} s = 0 \quad (6.52)$$

Esta é a equação de um oscilador harmônico simples e, portanto, a conta oscilando na cicloide é um oscilador isócrono, isto é, um oscilador cujo período não depende da amplitude.

6.8. Um pêndulo é construído prendendo-se uma massa m a um fio inextensível de comprimento l . A parte superior do fio está conectada ao ponto mais alto de um disco vertical de raio R ($R < l/\pi$) como na figura a seguir (onde $l = l_1 + l_2$).

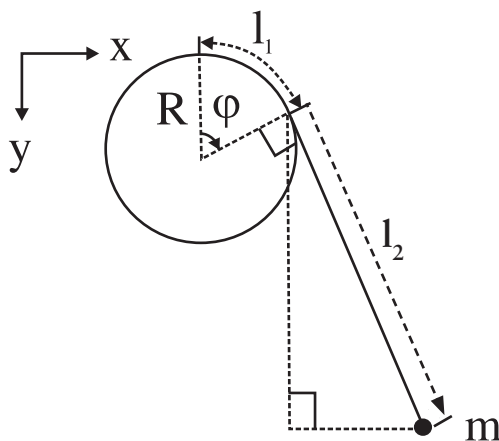


Figura 6.13

- (a) Escreva a Lagrangiana do pêndulo.
 (b) Mostre que a equação do movimento, para $l > R\varphi$, é

$$(l - R\varphi)\ddot{\varphi} - R\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi = 0$$

- (c) Resolva a equação do movimento para pequenas oscilações em torno de um ângulo φ_0 . (Dica: faça $\varphi = x + \varphi_0$, onde x é pequeno e linearize em x).

Qual a frequência das pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio? Mostre que as oscilações serão simétricas quando $\varphi_0 = \pi/2$.

SOLUÇÕES

6.1. Em Mecânica Clássica, raramente precisamos do valor da ação. No entanto, depois de tanto ouvir falar em ação, fica a curiosidade de saber como calcular essa quantidade. Temos que a solução da equação do movimento para uma partícula livre, satisfazendo as condições $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, é

$$x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}(t - t_1) \quad (6.53)$$

Então,

$$\dot{x} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \quad (6.54)$$

Agora, a Lagrangiana para uma partícula livre é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.55)$$

onde a velocidade v é dada pela Equação (6.54) para o caminho que minimiza a ação.

Assim,

$$S_m = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(x, \dot{x}, t) dt = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)} \quad (6.56)$$

Este é o valor da ação calculado com o caminho que a torna estacionária. Em Mecânica Clássica, é a forma da ação que é interessante. Isso porque precisamos conhecer a ação ao longo de um conjunto de caminhos vizinhos para poder determinar o caminho de mínima ação.

6.2. Este problema trata de um sistema de dois osciladores acoplados: massa-mola e um pêndulo. O primeiro é linear, porque estamos supondo uma mola ideal que satisfaz a lei de Hooke. O pêndulo, no entanto, só é linear para pequenas oscilações. Na primeira parte do problema, itens (a) e (b), usamos o método Lagrangiano para chegar às equações do movimento, que são equações não lineares acopladas, difíceis de resolver. A segunda parte, item (c), onde linearizamos as equações do movimento e aplicamos os métodos de oscilações acopladas, está resolvido no **Problema 4.4**, da Aula 4.

(a) As coordenadas e componentes da velocidade do bloco são

$$\begin{aligned} x_M &= x, \quad y_M = 0 \\ \dot{x}_M &= \dot{x}, \quad \dot{y}_M = 0 \end{aligned} \quad (6.57)$$

e as do pêndulo

$$\begin{aligned} x_m &= x + l \sin \theta, \quad y_m = -l \cos \theta \\ \dot{x}_m &= \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_m = l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.58)$$

Assim, temos para a energia cinética

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2} m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \quad (6.59)$$

Tomando o zero da energia potencial gravitacional em $y = 0$ a energia potencial do sistema é $V = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} kx^2$. Deste modo, a Lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.60)$$

(b) Para a coordenada x :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - \quad (6.61)$$

$$ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (6.62)$$

Com estes resultados, a equação de Euler-Lagrange dá para x a equação do movimento:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0 \quad (6.63)$$

Para a coordenada θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta \quad (6.65)$$

A equação do movimento é então,

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta = 0 \quad (6.66)$$

ou

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \quad (6.67)$$

As equações acopladas (6.66) e (6.67) são iguais às equações que obtivemos pelo método Newtoniano.

(c) Resolvido no **Problema 4.4** da Aula 4.

6.3. (a) Nós também já vimos esse problema nos problemas da Aula 4, **Problema 4.3**. Lá, porém, nós não deduzimos as equações do movimento a partir das forças sobre as partículas, o que será feito aqui, a partir da Lagrangiana.

As coordenadas de m_1 e m_2 são, respectivamente (ver figura),

$$\begin{aligned}(x, y)_1 &= (l \cos \theta_1, l \sin \theta_1) \\ (x, y)_2 &= (l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2, l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2)\end{aligned}\quad (6.68)$$

As velocidades ao quadrado são:

$$\begin{aligned}v_1^2 &= v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = l^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) = l^2 \dot{\theta}_1^2 \\ v_2^2 &= v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = l^2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + l^2 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \quad (6.69) \\ &= l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)\end{aligned}$$

A energia cinética é, então,

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (6.70)$$

Tomando o zero da energia potencial no ponto de onde o pêndulo está suspenso, temos

$$V = -m_1 g l \cos \theta_1 - m_2 g l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (6.71)$$

A Lagrangiana é, portanto,

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + m_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l \cos \theta_1 + m_2 g l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)\end{aligned}\quad (6.72)$$

Agora vamos encontrar as equações do movimento a partir das equações de Euler-Lagrange para θ_1 e θ_2 . Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l^2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l^2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (6.73)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l \sin \theta_1 \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \dot{\theta}_1 l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ddot{\theta}_1 l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l^2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}\quad (6.75)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l \sin \theta_2 \quad (6.76)$$

Assim, obtemos as equações

$$(m_1 + m_2) l^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l \sin \theta_1 = 0 \quad (6.77)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l^2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l^2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l \sin \theta_2 = 0 \quad (6.78)$$

que são as equações do movimento procuradas.

(b) Está resolvido no **Problema 4.3**.

6.4. (a) Seja θ o ângulo que o raio do centro à conta faz com a vertical. A velocidade da conta pode ser decomposta em uma componente perpendicular ao aro, $\omega R \sin \theta$, e outra ao longo do aro, $R \dot{\theta}$. Tomando o zero da energia potencial em $\theta = \pi/2$, a Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2} m (\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2) + mgR \cos \theta \quad (6.79)$$

Calculando as derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \ddot{\theta} \quad (6.80)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m R \sin \theta (\omega^2 R \cos \theta - g) \quad (6.81)$$

obtemos a equação do movimento:

$$R \ddot{\theta} = \sin \theta (\omega^2 R \cos \theta - g) \quad (6.82)$$

(b) A conta estará em equilíbrio quando $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. O lado direito da Equação (6.82) é zero quando $\sin \theta = 0$ (isto é, $\theta = 0$ ou $\pi = 0$) ou quando $\cos \theta_0 = g / \omega^2 R$. Como $\cos \theta$ deve ser menor ou igual a 1, esta última condição é possível somente se $\omega^2 \geq g / R$. Portanto, nós temos dois casos

• Se $\omega^2 < g/R$, então $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são os únicos pontos de equilíbrio. O ponto $\pi = 0$ é instável. Isto é óbvio, mas pode ser visto matematicamente fazendo $\theta = \pi + \eta$, onde η é pequeno. Então, $\sin(\pi + \eta) \approx -\eta$ e $\cos(\pi + \eta) \approx -1$ e a Equação (6.82) fica

$$\ddot{\eta} - \eta(\omega^2 + g/R) = 0 \quad (6.83)$$

Esta equação não admite solução oscilatória.

O ponto $\theta = 0$ é estável. Para θ pequeno, a Equação (6.82) torna-se

$$\ddot{\theta} + \theta(g/R - \omega^2) = 0 \quad (6.84)$$

que admite soluções oscilantes. A frequência de pequenas oscilações é $\sqrt{g/R - \omega^2}$.

• Se $\omega^2 > g/R$, então $\theta = 0$, $\pi = 0$ e $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$ são todos pontos de equilíbrio. O ponto $\theta = \pi$ é de novo um ponto de equilíbrio instável, como podemos ver da Equação (6.83). O ponto $\theta = 0$, é instável porque agora o coeficiente da Equação (6.84) é negativo. Portanto, $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$ é o único ponto de equilíbrio estável. Para encontrar a frequência de pequenas oscilações, fazemos $\theta = \theta_0 + \eta$ na Equação (6.82). Usando $\sin(\theta_0 + \eta) = \sin\theta_0 \cos\eta + \cos\theta_0 \sin\eta \approx \sin\theta_0 + \eta \cos\theta_0$ e $\cos(\theta_0 + \eta) = \cos\theta_0 \cos\eta - \sin\theta_0 \sin\eta \approx \cos\theta_0 - \eta \sin\theta_0$, substituindo na Equação (6.82), mantendo somente os termos lineares em η e, finalmente, fazendo $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$,

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \sin^2\theta_0 \eta = 0 \quad (6.85)$$

A frequência de pequenas oscilações é, portanto, $\omega \sin\theta_0 = \sqrt{\omega^2 - g^2/R^2\omega^2}$.

(c) A frequência $\omega = \sqrt{g/R}$ é a frequência crítica acima da qual existe um ponto de equilíbrio estável para $\theta \neq 0$, isto é, acima da qual a partícula vai querer mover-se fora do ponto mais baixo do aro. Agora, note uma coisa muito interessante: para $\omega^2 < g/R$ não existe uma direção privilegiada no sistema. A conta ou fica em $\theta = 0$ ou oscilando em torno desse ponto. Para $\omega^2 < g/R$, a partícula ou fica na posição

angular tal que $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$ ou oscilando em torno dela. Tanto θ_0 quanto $-\theta_0$ satisfazem a condição $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$. O sistema ou fica em $\theta = \theta_0$ ou em $\theta = -\theta_0$. Quando $\omega^2 > g/R$, há uma direção privilegiada no sistema. Na passagem do regime com $\omega^2 > g/R$ para o regime com $\omega^2 < g/R$ houve uma quebra de simetria. A conta vai estar só de um lado, esquerdo ou direito. Como nenhum agente externo foi responsável por essa quebra de simetria, dizemos que houve uma *quebra espontânea de simetria*.

6.5. Vamos escrever a Lagrangiana em termos das componentes dos vetores envolvidos:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\Phi \quad (6.86)$$

Primeiro considere a equação de Euler-Lagrange para a componente x . Vamos precisar das seguintes derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = q \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - q \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (6.87)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (6.88)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \quad (6.89)$$

Então, temos

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + q\dot{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + q\dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (6.90)$$

Usando

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (6.91)$$

vemos que podemos escrever a Equação (6.90) como

$$m\ddot{x} = qE_x + q(\dot{z}B_y - \dot{y}B_z) = q(\vec{E} + \vec{r} \times \vec{B})_x \quad (6.92)$$

Esta é a componente x da lei de força de Lorentz. Podemos proceder do mesmo modo para as componentes y e z .

6.6. Você deve resolver este problema pelo método Newtoniano. Aqui, vamos usar o método Lagrangiano. Com as coordenadas indicadas na figura, a energia cinética do bloco é

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 \quad (6.93)$$

e a energia potencial,

$$V = mgr \sin\phi \quad (6.94)$$

Temos ainda a condição

$$\phi = \omega t \quad (6.95)$$

A Lagrangiana do sistema é então,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - mgr \sin\omega t \quad (6.96)$$

Note que, devido à condição de vínculo (6.95), a Lagrangiana tem somente uma variável independente, r . Calculando as derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m\omega^2 r - mg \sin\omega t \end{aligned} \quad (6.97)$$

temos, da equação de Euler-Lagrange, que a equação do movimento é

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -mg \sin\omega t \quad (6.98)$$

Esta equação você já sabe como resolver. A solução geral da equação homogênea $m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0$ pode ser escrita como

$$r_h(t) = A \sinh\omega t + B \cosh\omega t \quad (6.99)$$

Uma solução particular da não homogênea tem a forma $r_p(t) = C \sinh\omega t$. Substituindo na equação (6.95), vemos que essa é de fato uma solução se $C = g/2\omega^2$. Logo, a solução geral da Equação (6.98) é

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sinh\omega t + A \sinh\omega t + B \cosh\omega t \quad (6.100)$$

Agora precisamos impor as condições iniciais $r(0) = R$ e $\dot{r}(0) = 0$. Acharmos que $B = R$ e $A = -g/2\omega^2$. Portanto, a solução geral da equação do movimento para as nossas condições iniciais é

$$r(t) = R \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sen \omega t - \sinh \omega t) \quad (6.101)$$

6.7. (a) Das equações paramétricas da cicloide temos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \dot{\theta} (1 - \cos \theta) \\ \dot{y} &= -\alpha \dot{\theta} \sen \theta \end{aligned} \quad (6.102)$$

Assim, a energia cinética da partícula é

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \alpha^2 \dot{\theta}^2 [(1 - \cos \theta)^2 + \sen^2 \theta] \\ &= m \alpha^2 \dot{\theta}^2 [1 - \cos \theta] \\ &= 2 m \alpha^2 \dot{\theta}^2 \sen^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Tomando o zero da energia potencial em $y = 0$,

$$V = mgy = mg\alpha (1 + \cos \theta) = 2mg\alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.104)$$

A Lagrangiana da particular é então

$$L = 2 m \alpha^2 \dot{\theta}^2 \sen^2 \frac{\theta}{2} - 2mg\alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.105)$$

(b) Vamos calcular o comprimento s de um pedaço de arco da cicloide que vai do ponto de mínimo, $\theta = \pi$, até um valor de θ qualquer. Para isso precisamos escrever um elemento de arco $ds = \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy$ em termos de θ . Da equação da cicloide podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha (1 - \cos \theta)}{-\alpha \sen \theta} = \frac{2\alpha \sen^2 \frac{\theta}{2}}{-2\alpha \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = -\tan \frac{\theta}{2} \quad (6.106)$$

Deste modo,

$$ds = -\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} 2\sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = -4\alpha \sen \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{2} \quad (6.107)$$

e portanto,

$$s = -4\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \sin \varphi \, d\varphi = 4\alpha \cos \frac{\theta}{2} \quad (6.108)$$

(c) Em termos da variável s , a Lagrangiana fica simplesmente

$$L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{4\alpha} \right) s^2 \quad (6.109)$$

Esta é a Lagrangiana de um oscilador harmônico simples de frequência angular $\omega = \sqrt{g/4\alpha}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4\alpha} s = 0 \quad (6.110)$$

Isso significa que se você largar a conta de qualquer posição s na cicloide, ela vai oscilar sempre com a mesma frequência $\omega = \sqrt{g/4\alpha}$, ou, em outras palavras, o período não depende da amplitude do movimento. Quando o período não depende da amplitude, dizemos que o oscilador é isócrono. Um pêndulo simples, é isócrono somente para pequenas oscilações. No pêndulo simples, a partícula descreve um arco de círculo. Nos relógios de pêndulo de Huygens, a quem nos referimos na aula sobre oscilações acopladas, o peso oscilante descreve um arco de cicloide e, portanto, são pêndulos isócronos.

6.8. (a) Da figura temos que $l = l_1 + l_2$ e $l_1 = R\varphi$. Logo, $l_2 = R\varphi$. Vamos considerar a origem do sistema de coordenadas como sendo o ponto de onde o pêndulo está suspenso e tomar, por conveniência, o sentido positivo do eixo- y para baixo. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi + (l - R\varphi) \cos \varphi \\ y &= R(1 - \cos \varphi) + (l - R\varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.111)$$

Destas equações, segue que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(l - R\varphi) \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= (l - R\varphi) \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.112)$$

A energia cinética do sistema é então,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l - R\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (6.113)$$

e a energia potencial,

$$V = -mgy = -mgR(1 - \cos \varphi) - mg(l - R\varphi)\sin \varphi \quad (6.114)$$

A menos de uma constante, a Lagrangiana do pêndulo é, portanto,

$$L = \frac{1}{2}m(l - R\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 - mgR \cos \varphi + mg(l - R\varphi)\sin \varphi \quad (6.115)$$

(b) Fazendo as derivadas,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l - R\varphi)^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -2m(l - R\varphi)R\dot{\varphi}^2 + m(l - R\varphi)^2 \ddot{\varphi} \quad (6.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m(l - R\varphi)R\dot{\varphi}^2 + mgR \sin \varphi - mgR \sin \varphi + mg(l - R\varphi)\cos \varphi \\ &= -m(l - R\varphi)R\dot{\varphi}^2 + mg(l - R\varphi)\cos \varphi \end{aligned} \quad (6.117)$$

Substituindo esses resultados na equação de Euler-Lagrange, encontramos

$$\begin{aligned} -2m(l - R\varphi)R\dot{\varphi}^2 + m(l - R\varphi)^2 \ddot{\varphi} &= -m(l - R\varphi)R\dot{\varphi}^2 \\ &+ mg(l - R\varphi)\cos \varphi \end{aligned} \quad (6.118)$$

ou, supondo $l > R\varphi$,

$$(l - R\varphi)\ddot{\varphi} - R\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi = 0 \quad (6.119)$$

(c) Vamos fazer $\varphi = \varphi_0 + x$, onde x é um ângulo pequeno em comparação com φ_0 . Substituindo na Equação (6.119), desprezando os termos contendo $x\ddot{x}$, \ddot{x}^2 e fazendo

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_0 + x) &= \cos \varphi_0 \cos x - \sin \varphi_0 \sin x \\ &\approx \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (6.120)$$

encontramos:

$$\ddot{x} + \frac{g \sin \varphi_0}{(l - R\varphi_0)} x = \frac{g \cos \varphi_0}{(l - R\varphi_0)} \quad (6.121)$$

A solução desta equação, como você já sabe, é a soma da solução geral da equação homogênea mais uma solução particular da não homogênea, ou seja,

$$x = A \cos(\omega t + \phi) + \cot \varphi_0 \quad (6.122)$$

onde A e ϕ são constantes e ω é a frequência das pequenas oscilações

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \varphi_0}{(l - R \varphi_0)}} \quad (6.123)$$

É evidente que as oscilações serão simétricas quando $\varphi_0 = \pi/2$ porque este valor anula o termo $\cot \varphi_0$ da solução (6.122).

O método Lagrangiano (II): simetrias e leis de conservação, equações de Hamilton, Teorema de Liouville e forças de vínculo

AULA 7

Meta da aula

Complementar o método Lagrangiano desenvolvido na Aula 6, com ênfase nas leis de conservação e simetrias a elas associadas.

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- entender a relação entre simetrias e leis de conservação e por que o conhecimento das quantidades conservadas é importante na análise do movimento de um sistema;
- construir a trajetória no espaço de fase para sistemas simples;
- calcular forças de vínculo em sistemas mecânicos semelhantes aos apresentados no texto, que envolvem somente vínculos holônomos.

INTRODUÇÃO

Na Aula 6, nós introduzimos o método Lagrangiano e mencionamos que, entre suas virtudes, está a possibilidade de estabelecer uma relação clara entre simetrias e leis de conservação. Essa relação, que será o tema principal desta aula, é assegurada por meio de um dos mais importantes e charmosos teoremas da física, o Teorema de Noether. Ao estudar a conservação da energia, introduziremos o Hamiltoniano de um sistema, uma função das coordenadas e de seus momentos conjugados, construído a partir da Lagrangiana e que, em muitos casos de interesse, é igual à soma da energia cinética mais a energia potencial. Dado o Hamiltoniano, as equações do movimento do sistema podem ser obtidas a partir das equações de Hamilton. Definiremos o espaço de fase, o espaço de coordenadas e momentos, e veremos que o volume de uma região do espaço de fase de um sistema se mantém constante quando a sua evolução temporal é dada pelas equações de Hamilton. Este resultado é chamado teorema de Liouville. Finalmente, também vimos na Aula 6 que o conceito de força no método Lagrangiano é desnecessário, o que é particularmente conveniente para sistemas com restrições, ou vínculos. É uma grande vantagem não ter de se preocupar com as forças de vínculo. Mas há situações em que é necessário conhecer tais forças. Ilustraremos, com dois exemplos, um método de encontrá-las.

SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Grandezas físicas conservadas, ou *constantes do movimento*, são quantidades associadas a um sistema que não mudam de valor durante a sua evolução temporal. Quando conhecemos as constantes do movimento de um sistema, podemos extrair informações importantes sobre seu movimento, mesmo sem uma solução completa das equações do movimento. Você já viu na Física 1B vários exemplos da utilidade da aplicação das leis de conservação da energia, momento linear e momento angular na análise do movimento de sistemas. Assim, seria de grande ajuda se tivéssemos um meio de identificar essas quantidades conservadas. Existe uma relação íntima entre as leis de conservação e a invariância dos sistemas físicos sob operações de simetria, como você verá adiante.

Dizemos que um objeto é simétrico em relação a uma dada operação se esta operação, quando aplicada ao objeto, não parecer alterá-lo. Designamos por objeto uma forma geométrica, uma equação, uma função, ou um sistema físico qualquer. Aqui, como estamos tratando do movimento

de um sistema, estamos interessados em saber que operações não alteram as equações do movimento e uma *condição suficiente* para isso é que a sua Lagrangiana não se altere.

COORDENADAS CÍCLICAS

Uma coordenada é cíclica quando não aparece explicitamente na Lagrangiana.

Exemplo 7.1. Considere uma partícula de massa m movendo-se num potencial unidimensional $V(z)$. A Lagrangiana da partícula é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z) \quad (7.1)$$

As variáveis x e y não aparecem explicitamente na Lagrangiana (embora \dot{x} e \dot{y} apareçam) e, portanto, são cíclicas.

Exemplo 7.2. Seja agora a Lagrangiana de uma partícula num potencial central

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (7.2)$$

A coordenada ϕ é uma coordenada cíclica.

Quando uma coordenada é cíclica, existe uma constante do movimento associada a ela. Veja a Lagrangiana do Exemplo 7.1. O fato de as coordenadas x e y não aparecerem explicitamente na Lagrangiana significa que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (7.3)$$

Mas, da equação de Euler-Lagrange para a coordenada x , isto significa que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (7.4)$$

Assim, a quantidade

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (7.5)$$

chamada *momento conjugado* à coordenada x é uma constante do movimento. O mesmo argumento mostra que $p_y = m\dot{y}$ também é uma constante do movimento da partícula cujo movimento é descrito pela Lagrangiana (7.1).

Note que momento conjugado não é sempre um momento linear. Se a coordenada for um ângulo, seu momento conjugado será um momento angular. Para a Lagrangiana (7.2) $p_r = \partial L / \partial \dot{r} = m\dot{r}$ é o momento linear da partícula, enquanto $p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = mr^2\dot{\phi}$ é o momento angular. Como para esta Lagrangiana a coordenada ϕ é cíclica, p_ϕ é uma constante do movimento.

Temos, então, o seguinte resultado:

Os momentos conjugados a variáveis cíclicas são constantes do movimento.

A ausência de uma certa coordenada pode ser interpretada como uma propriedade de simetria da Lagrangiana. Assim, o sistema do Exemplo 7.3 é invariante por um deslocamento dos eixos coordenados no plano xy . De fato, como a Lagrangiana não envolve as coordenadas x e y , o que matematicamente é expresso pelas condições (7.3), nada acontece se os eixos coordenados forem transladados no plano xy .

Já o sistema do Exemplo 7.2 é invariante por uma rotação dos eixos coordenados em torno do eixo z , uma vez que a Lagrangiana não depende de ϕ , e, portanto, permanece inalterada se os eixos coordenados são girados em torno do eixo z .

Nesses dois exemplos, *a existência de uma propriedade de simetria implica a presença de uma grandeza conservada.*

TEOREMA DE NOETHER

Você agora vai conhecer um dos mais úteis e mais bonitos teoremas na Física. Ele relaciona simetrias e leis de conservação. O Teorema de Noether pode ser enunciado assim:

Para cada simetria da Lagrangiana existe uma quantidade conservada.

Por “simetria” queremos dizer que, se as coordenadas são modificadas por pequenas quantidades, então a Lagrangiana não muda em primeira ordem nestas quantidades. As simetrias em relação

a transformações infinitesimais são chamadas simetrias contínuas porque, colocando transformações arbitrariamente pequenas juntas, podemos obter todo um conjunto de transformações. Elas dependem, então, de um parâmetro que pode ser variado continuamente. Os resultados para coordenadas cíclicas são casos especiais desse teorema. Não vamos demonstrar o Teorema de **NOETHER** aqui. Vamos apenas apresentar exemplos simples de sua aplicação.

Exemplo 7.3. Vejamos o que acontece quando uma Lagrangiana $L(x, \dot{x}, t)$ é invariante em relação à transformação

$$x \rightarrow x + \varepsilon \quad (7.6)$$

Esta transformação, para ε pequeno, é uma translação infinitesimal ao longo do eixo x . Se a Lagrangiana não muda, devemos ter que $dL/d\varepsilon = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dL}{d\varepsilon} \\ &= \frac{L(x + \varepsilon, \dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)}{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.7)$$

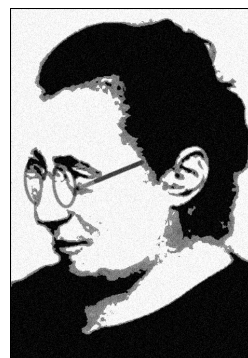
onde, da primeira linha para a segunda, usamos a definição de derivada. Chegamos a um resultado já esperado: se a Lagrangiana não muda por uma translação ao longo de x , então ela não deve depender explicitamente de x , ou seja, a coordenada x é cíclica e, como você já viu, o momento linear $m\dot{x}$ é uma constante do movimento. Assim, *invariância da Lagrangiana do sistema por uma translação infinitesimal implica a conservação do momento linear.*

Exemplo 7.4. Considere o sistema massa mola no plano x - y com Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \quad (7.8)$$

Esta Lagrangiana é invariante (em primeira ordem em ε) sob a transformação

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \varepsilon y \\ y &\rightarrow y + \varepsilon x \end{aligned} \quad (7.9)$$



EMMY NOETHER

O Teorema de Noether foi o grande feito de Emmy Noether, uma mulher, em 1918: relacionar simetrias a leis de conservação.

Este teorema desempenhou um importante papel no desenvolvimento da Física no século XX. Menciono o fato de se tratar de uma mulher porque no início do século as mulheres sequer tinham o direito de votar. Mulheres no meio acadêmico, então, eram raríssimas. Noether era uma matemática e trabalhava em álgebra abstrata.

De onde tiramos esta transformação? Olhando a **Figura 7.1**, vemos que para ε pequeno ela corresponde a uma rotação infinitesimal.

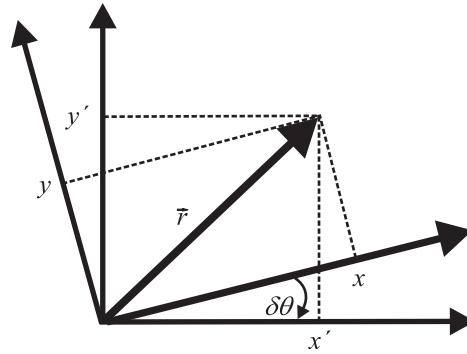


Figura 7.1: Rotação dos eixos cartesianos de um ângulo $\delta\theta$ no sentido horário. As coordenadas do vetor \vec{r} no sistema inicial são x e y . No sistema girado, as coordenadas são x' e y' .

De fato, sejam x' e y' as coordenadas depois da rotação infinitesimal $\delta\theta$. Então, da **Figura 7.1** podemos escrever

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \delta\theta - y \sin \delta\theta \approx x - y\varepsilon \\ y' &= y \cos \delta\theta + x \sin \delta\theta \approx y + x\varepsilon \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde usamos que, para $\delta\theta$ infinitesimal, $\cos \delta\theta \approx 1$ e $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$ e fizemos $\varepsilon = \delta\theta$. Agora, como no exemplo anterior, não mudar em primeira ordem quer dizer que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dL}{d\varepsilon} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial y} x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x} \\ &= -\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) y - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y \right) \\ &= \frac{d}{dt} (m\dot{y}x - m\dot{x}y) \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde, da terceira para a quarta linha usamos as equações de Euler-Lagrange. A invariância por uma rotação infinitesimal implica, portanto, que a quantidade entre parênteses, igual à componente z do momento angular do sistema, é uma constante do movimento. Chegamos a uma

outra conclusão importante: se a *Lagrangiana do sistema for invariante por uma rotação infinitesimal, o momento angular é conservado.*

Ainda como no exemplo anterior, podemos também encontrar uma relação com variáveis cíclicas. Para isso, vamos fazer uma mudança para variáveis polares planas

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi\end{aligned}\quad (7.12)$$

A Lagrangiana (7.8) fica então

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kr^2 \quad (7.13)$$

Esta é a Lagrangiana correspondente a uma força central e ϕ é uma coordenada cíclica. O momento conjugado conservado é

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (7.14)$$

que é o momento angular $m\dot{y}x - m\dot{x}y$ nas novas coordenadas.

A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Nós vamos tratar a conservação da energia de um modo um pouquinho diferente de como tratamos a conservação do momento linear e do momento angular. Para simplificar, vamos considerar a Lagrangiana de um movimento unidimensional em coordenadas cartesianas, $L(x, \dot{x}, t)$. A derivada total da Lagrangiana em relação ao tempo é

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (7.15)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange, esta relação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\&= \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}\quad (7.16)$$

Vamos agora definir a função

$$H = \dot{x}p_x - L \quad (7.17)$$

onde p_x é o momento conjugado a x . Usando a Equação (7.16), encontramos para a função H :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{x}p_x - L) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{dL}{dt} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}\quad (7.18)$$

A função H , chamada Hamiltoniano, é, portanto, uma grandeza conservada quando a Lagrangiana $L = T - V$ não depende explicitamente do tempo. Quando, além disso, a energia potencial V não depende da velocidade (condição suficiente) e T é uma função homogênea de segunda ordem na velocidade, H também é a energia total do sistema.

Exemplo 7.5. Seja $L = (1/2)m\dot{x}^2 - V(x)$. Neste caso,

$$\begin{aligned}H &= \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \\ &= m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V\right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = E\end{aligned}\quad (7.19)$$

Assim, nas situações em que podemos associar o Hamiltoniano à energia total do sistema, chegamos à importante conclusão:

A conservação da energia está associada à invariância em relação a deslocamentos no tempo.

AS EQUAÇÕES DE HAMILTON

Vamos mostrar que o Hamiltoniano (7.17) é uma função das variáveis x , p_x e t . De fato, diferenciando a Equação (7.17) e lembrando que L é uma função das variáveis x , \dot{x} , e t , temos

$$\begin{aligned}dH &= \dot{x}dp_x + p_x dx - dL \\ &= \dot{x}dp_x + p_x d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{x}dp_x - \dot{p}_x dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt\end{aligned}\quad (7.20)$$

onde usamos a Equação (7.18). Note que na segunda linha, o segundo termo é cancelado pelo quarto termo devido à definição de momento conjugado (veja a Equação (7.5)).

Conhecendo o Hamiltoniano do sistema, podemos escrever diretamente as equações do movimento sem necessidade das equações de Euler-Lagrange. Como H é uma função das variáveis x , p_x e t ,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7.21)$$

Então, comparando com a Equação (7.20), temos que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.22)$$

Estas são as *equações de Hamilton* que, assim como as equações de Euler-Lagrange, são completamente equivalentes às equações do movimento obtidas com a mecânica Newtoniana. As equações de Hamilton são equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo 7.6. O Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples é

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.23)$$

e as equações de Hamilton são

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -kx \quad (7.24)$$

A primeira equação, neste caso, equivale à definição do momento linear e a segunda é a segunda lei de Newton.

Exemplo 7.7. Usando o método Hamiltoniano, encontre as equações do movimento para o pêndulo esférico de massa m e comprimento l mostrado na **Figura 7.2**.

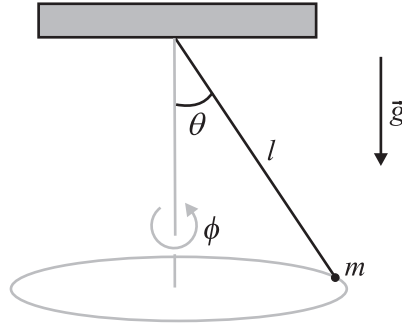


Figura 7.2: Pêndulo esférico de massa m e comprimento l .

A energia cinética do pêndulo é

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \quad (7.25)$$

Definindo a energia potencial zero como sendo no ponto em que o pêndulo está preso no teto,

$$V = -mgl \cos\theta \quad (7.26)$$

Os momentos conjugados são

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad (7.27)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \quad (7.28)$$

Resolvendo estas equações para $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$,

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \quad (7.29)$$

e substituindo na Equação (7.25), obtemos para o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= T + U \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl \cos\theta \end{aligned} \quad (7.30)$$

As equações do movimento são

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \quad (7.31)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl \sin\theta, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

A coordenada ϕ é cíclica e, portanto, o momento angular p_ϕ em torno do eixo de simetria, é constante.

ESPAÇO DE FASE

O estado de um sistema representado pelo Hamiltoniano $H(x, p)$ é dado num instante qualquer t especificando-se os valores de $x(t)$ e $p(t)$. Dizemos que (x, p) é um ponto representativo do estado do sistema no *espaço de fase*. À medida que o sistema evolui no tempo, o ponto (x, p) descreve uma trajetória no espaço de fase. A evolução temporal do sistema é dada pelas equações de Hamilton.

Exemplo 7.8. Como exemplo de uma trajetória no espaço de fase, consideremos o oscilador harmônico simples unidimensional, cujo Hamiltoniano é dado pela Equação (7.23). Neste caso, não precisamos resolver as equações de Hamilton (7.24) para encontrar a trajetória. Basta notar que, como a energia total do oscilador é conservada, o ponto (x, p) descreve uma trajetória dada por

$$\frac{x^2}{2(E/k)} + \frac{p^2}{2mE} = 1 \quad (7.32)$$

Esta é a equação de uma elipse, mostrada na figura a seguir.

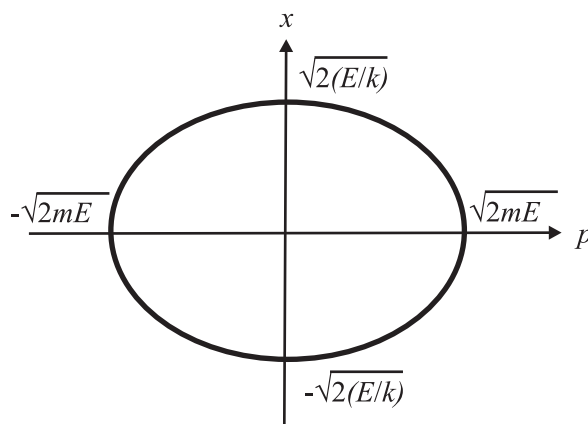


Figura 7.3: Trajetória no espaço de fase para um oscilador harmônico simples de energia total E .

Cada conjunto de condições iniciais corresponde a uma elipse diferente e as elipses para as diversas condições iniciais são concêntricas.

Dadas as condições iniciais, a solução das equações de Hamilton é única. Assim, duas trajetórias no espaço de fase de um mesmo sistema nunca podem se cruzar.

TEOREMA DE LIOUVILLE

Aproveitando a definição do espaço de fase, apresentamos uma quantidade conservada de significado mais elaborado que as apresentadas anteriormente, porém muito importante, a *densidade de pontos representativos no espaço de fase*, ρ .

Considere um sistema formado por um grupo de partículas idênticas com diferentes posições e momentos iniciais movendo-se, por simplicidade, em uma dimensão ao longo do eixo dos x . Mais especificamente, considere que em $t = 0$ as coordenadas e os momentos de todas as partículas estão nas faixas $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$ e $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$. As partículas se movem livremente sem interagir. O volume no espaço de fase ocupado pelos pontos representativos das partículas em $t = 0$ é $V(0) = \Delta x_0 \Delta p_0$ e está representado na Figura 7.4, onde também mostramos $V(t = \varepsilon)$ e $V(t = 2\varepsilon)$.

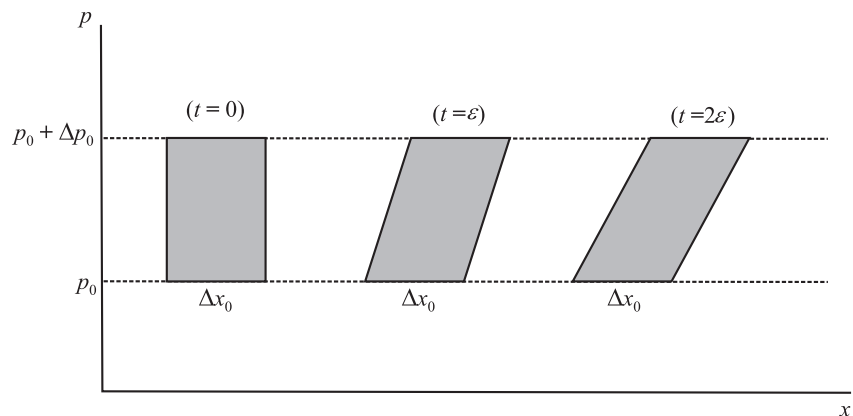


Figura 7.4: Evolução do volume do espaço de fase de um sistema de partículas livres. As condições iniciais das partículas estão todas dentro da área retangular. À proporção que o tempo passa, a figura se deforma, mas sua área se mantém constante.

É evidente que $V(0) = V(\varepsilon) = V(2\varepsilon)$ e logo,

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (7.33)$$

Este resultado, que mostramos para partículas livres, é verdadeiro para qualquer sistema que obedeça as equações de Hamilton (7.22) e é conhecido como *Teorema de Liouville*. Ele diz que os pontos representativos das partículas no espaço de fase se movem como um fluido incompressível.

Podemos escrever o Teorema de Liouville em termos da densidade de pontos representativos, $\rho(x, p, t)$. Referindo-se novamente ao exemplo das partículas livres, o número de pontos dentro do volume V não muda com o tempo e como V é constante, então

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (7.34)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial\rho}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Deste modo, podemos expressar a condição (7.34) como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0 \quad (7.36)$$

Onde

$$[\rho, H] = \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.37)$$

é o parêntesis de Poisson de ρ e H . A Equação (7.36), válida em geral para sistemas que obedecem às equações de Hamilton, é uma outra forma de apresentar o Teorema de Liouville.

VÍNCULOS E FORÇAS DE VÍNCULO

Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento. Aqui, por simplicidade, estaremos considerando apenas os tipos de vínculo que podem ser expressos por uma relação funcional

exclusivamente entre as *coordenadas* usadas para descrever a configuração do sistema, podendo envolver o tempo de modo explícito. Os casos em que os vínculos são expressos por relações funcionais entre coordenadas e *velocidades*, embora interessantes, são muito complicados e não serão tratados aqui.

Exemplo 7.9. Considere uma partícula restrita a mover-se sobre uma superfície fixa. Seja $\vec{r} = (x, y, z)$ o vetor posição da partícula em relação a um sistema de referência no qual a superfície permanece fixa. Então x , y e z não são variáveis independentes, mas devem satisfazer

$$f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z) = 0 \quad (7.38)$$

onde $f(\vec{r}) = 0$ é a equação da superfície. A Equação (7.38) é a condição de vínculo. Se, por exemplo, a superfície for uma esfera de raio R centrada na origem,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \quad (7.39)$$

Exemplo 7.10. Partícula restrita a uma superfície móvel ou deformável. Neste caso, a relação entre as coordenadas é

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (7.40)$$

onde a dependência temporal explícita indica a mudança da forma ou localização da superfície no transcurso do tempo.

Exemplo 7.11. Duas partículas ligadas por uma haste rígida movendo-se no espaço. A condição de vínculo tem a forma

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \quad (7.41)$$

onde l é o comprimento fixo da haste.

Os vínculos, portanto, reduzem o número de graus de liberdade independentes do sistema. Para manter o movimento restrito, os vínculos exercem forças. As forças de vínculo, como são chamadas, em geral são complicadas porque elas dependem da própria trajetória do sistema que queremos encontrar.

No método Lagrangiano, a escolha das coordenadas é feita de modo que as condições de vínculo são automaticamente satisfeitas. Assim podemos nos concentrar no movimento sem nos preocuparmos com os vínculos e as forças de vínculo. Esta é outra das vantagens do método Lagrangiano. No entanto, em muitos casos práticos importantes podemos querer as forças de vínculo. Um engenheiro certamente estará interessado nas tensões de uma estrutura para saber, por exemplo, se ela é viável com os materiais de que dispõe. Vejamos dois exemplos bem simples de cálculo da tensão.

Exemplo 7.12. Consideremos novamente o pêndulo simples oscilando num plano, (Figura 7.5)

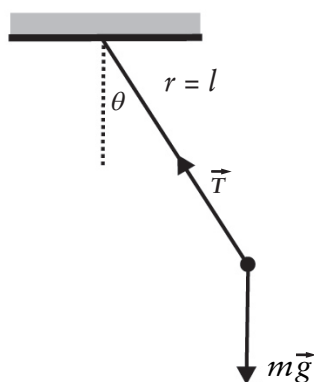


Figura 7.5

Escolhemos, como de costume, as coordenadas polares r e θ para descrever o movimento da massa m . A corda é inextensível e, portanto, temos a restrição, ou vínculo, $r = l$, o que deixa o sistema somente com um grau de liberdade, representado por θ . A força de vínculo é a tensão T no fio. No Exemplo 1 da Aula 6, a condição de vínculo está automaticamente incluída na Lagrangiana e obtivemos a equação do movimento sem que fosse necessário sequer mencionar as forças. Mas suponha que precisemos conhecer a tensão T no fio para saber se ele vai ou não se romper. Claro que para um pêndulo simples achar T é um problema trivial. Basta usar a segunda lei de Newton para escrever

$$T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2 \quad (7.42)$$

ou

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (7.43)$$

Mesmo neste problema simples, a complicação à qual nos referimos anteriormente aparece. O valor de T em um instante qualquer só pode ser encontrado depois de resolvida a equação do movimento $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$. Precisamos de $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ para calcular T da Equação 7.43.

Como encontrar as forças de vínculo no método Lagrangiano? Não vamos apresentar aqui o modo sistemático, mas apenas resolver uns casos simples explorando a idéia física por trás do método geral. Fisicamente, um fio não é inextensível. Ele se deforma, mesmo que imperceptivelmente, e é a reação a essa deformação que dá origem à tensão. Pense no fio como se fosse a mola do Exemplo 6.2 da Aula 6, com uma constante de mola muito grande. Assim, vamos violar a condição de vínculo e escrever para a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - V_d(r) \quad (7.44)$$

onde $V_d(r)$ é a energia potencial de deformação do fio, tal que $-T = -dV_d(r)/dr$ (lembre-se de que T é o módulo da força e o sinal negativo é porque ela aponta na direção oposta a \hat{r}). As equações de Euler-Lagrange dão

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + T = 0 \quad (7.45)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \quad (7.46)$$

Temos ainda a condição de vínculo

$$r = l \quad (7.47)$$

As Equações (7.45), (7.46) e (7.47) constituem um sistema de três equações e três incógnitas, r , θ e T . A Equação (7.47) nos diz que

$$\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \quad (7.48)$$

Substituindo a condição (7.47) na Equação (7.46), obtemos a equação do movimento do pêndulo simples

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (7.49)$$

Substituindo as Equações (7.47) e (7.48) na (7.45), encontramos a tensão no fio

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (7.50)$$

que é a expressão que tínhamos obtido usando a segunda lei de Newton.

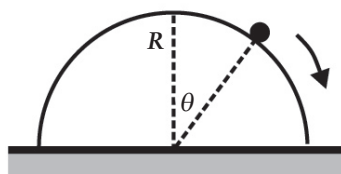


Figura 7.6: Partícula de massa m deslizando sobre um hemisfério fixo de raio R .

Exemplo 7.13. Um problema semelhante é o de uma partícula deslizando sobre um hemisfério fixo, sem atrito, de raio R . (Figura 7.6). Queremos saber em que ângulo a partícula vai deixar o hemisfério. Enquanto a partícula estiver sobre o hemisfério, teremos $r = R$ que é a condição de vínculo. A força de vínculo é a força normal que tem a direção de r e aponta no sentido positivo de r . A partícula deixará a superfície no momento em que a força normal for igual a zero. A Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta - V_d(r) \quad (7.51)$$

onde tomamos o zero da energia potencial na base do hemisfério. As equações do movimento são

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - N = 0 \quad (7.52)$$

$$mr^2\ddot{\theta} - mgr \sin \theta = 0 \quad (7.53)$$

onde $N = -dV_d/dr$. A essas equações juntamos a condição de vínculo

$$r = R \quad (7.54)$$

Procedendo como no exemplo anterior, substituímos a (7.54) na (7.53) e encontramos

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta \quad (7.55)$$

Note que a Equação (7.55) tem um sinal diferente da (7.49) e, portanto, não tem soluções periódicas em torno de $\theta = 0$, como era esperado já que $\theta = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. A condição de vínculo também nos diz que $\dot{r} = 0$ e a (7.52) dá então para a normal

$$N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \quad (7.56)$$

Agora que temos a expressão da força de vínculo, podemos dizer onde a partícula deixará o plano. Como já observamos, isso ocorre quando $N = 0$. Chamando o ângulo correspondente de θ_c , temos

$$R\dot{\theta}_c^2 = g \cos \theta_c \quad (7.57)$$

Por outro lado, a conservação da energia nos dá,

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta}_c)^2 = mgR - mgR \cos \theta_c \quad (7.58)$$

ou

$$R\dot{\theta}_c^2 = 2g - 2g \cos \theta_c$$

Substituindo a (7.58) na (7.57), achamos

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3} \quad (7.59)$$

A partícula deixa a superfície em $\theta_c = 48,2^\circ$.

RESUMO

O Teorema de Noether diz que para cada simetria da Lagrangiana existe uma quantidade conservada, ou seja, uma constante do movimento. A invariância por translação está associada à conservação do momento linear. Já a invariância por rotação implica a conservação do momento angular. A conservação da energia está associada à invariância em relação a deslocamentos no tempo.

Uma coordenada é dita cíclica quando ela não aparece explicitamente na Lagrangiana. O momento conjugado correspondente a uma variável cíclica é uma constante do movimento.

Para muitos sistemas físicos de interesse, a energia total é uma quantidade conservada e é igual ao Hamiltoniano. O Hamiltoniano, que pode ser construído a partir da Lagrangiana, é uma função das coordenadas e dos momentos conjugados a elas associados. Dado o Hamiltoniano de um sistema, seu movimento é descrito pelas equações de Hamilton.

O espaço de fase de um sistema com Hamiltoniano $H(x, p)$ é o espaço cartesiano cujos pontos são representados pelas duplas (x, p) . Um ponto no espaço de fase define o estado do sistema num dado instante. A especificação do estado do sistema num instante t_0 determina uma única solução para as equações de Hamilton. Assim, por cada ponto no espaço de fase passa uma única trajetória, e duas trajetórias distintas nunca se tocam.

Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema, restringindo o seu movimento. Vínculos exercem forças, as forças de vínculo, para manter o movimento restrito. Um modo de calcular essas forças consiste em violar a condição de vínculo, procedendo como se o sistema tivesse o grau de liberdade suprimido pelo vínculo, e aplicar a condição de vínculo somente depois de obtidas as equações do movimento.

PROBLEMAS

7.1. Considere o problema da máquina de Atwood.

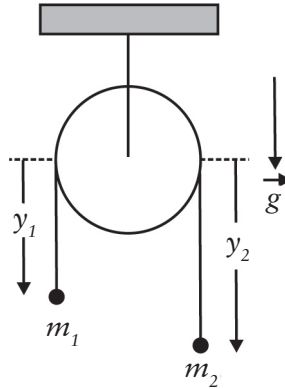


Figura 7.7: A máquina de Atwood.

Este sistema tem um vínculo, representando a condição de o fio ser inextensível,

$$y_1 + y_2 - l = 0 \quad (7.60)$$

onde l é uma constante. Encontre a tensão no fio.

7.2. *Partícula numa hélice.* Uma partícula de massa m move-se sob a influência da gravidade ao longo de uma hélice $z = k\phi$, $\rho = \text{constante}$, onde k é uma constante e o eixo z aponta verticalmente para cima.

- Escreva a Lagrangiana do sistema
- Calcule o momento conjugado p_z .
- Calcule o Hamiltoniano em termos das variáveis z e p_z .
- Derive as equações do movimento de Hamilton do sistema.
- Resolva as equações do movimento de Hamilton.

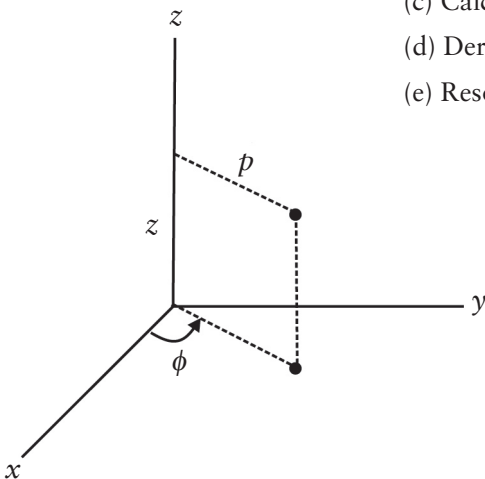


Figura 7.8: Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) .

7.3. Uma conta de massa m desliza ao longo de uma haste retilínea que gira com velocidade angular ω constante num plano horizontal.

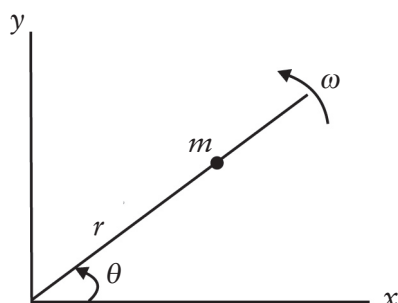


Figura 7.9: Conta deslizando ao longo de uma haste horizontal girante.

- Escreva a Lagrangiana da partícula e descreva seu movimento.
- Obtenha o Hamiltoniano.
- Mostre que a energia total não se conserva, mas que o Hamiltoniano é uma constante do movimento.

7.4. Um pêndulo plano de comprimento l e massa m está conectado a um bloco de massa M que pode se mover numa mesa horizontal sem atrito.

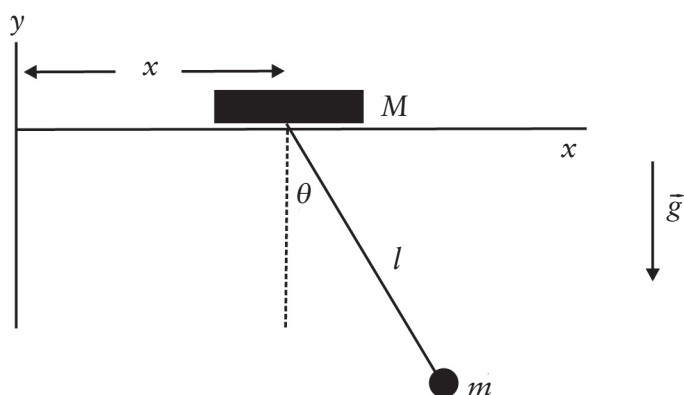


Figura 7.10: Pêndulo com suporte móvel.

- (a) Expresse as coordenadas da massa m em termos das coordenadas X e θ .
- (b) Construa a Lagrangiana desse sistema.
- (c) Usando as equações de Euler-Lagrange, deduza as equações do movimento para o sistema acoplado pêndulo mais bloco.
- (d) Encontre as quantidades conservadas.
- (e) Encontre a frequência ω de pequenas oscilações do pêndulo.

7.5. Uma partícula de massa m tem seu movimento descrito pela Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\omega}{2}l_z \quad (7.61)$$

onde ω é uma frequência angular constante e l_z é a componente z do momento angular

$$l_z = m(\vec{r} \times \vec{v})_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \quad (7.62)$$

- (a) Qual das coordenadas é cíclica e qual a grandeza associada conservada?
- (b) Encontre as equações do movimento. Escreva estas equações em termos das variáveis $(x + iy)$ e z e ache a solução.
- (c) A energia da partícula é conservada? Escreva a energia em termos dos momentos canônicos, p_x , p_y , p_z e mostre que a partícula tem somente energia cinética.
- (d) Que situação física é descrita pela Lagrangiana (7.61)?

7.6. Um pêndulo de massa m tem seu comprimento l encurtado a uma taxa constante α , ou seja, $l(t) = l_0 - \alpha t$.

- (a) Escreva a Lagrangiana, o Hamiltoniano e a energia total do pêndulo.
- (b) Mostre que nem o Hamiltoniano nem a energia total são constantes do movimento.

SOLUÇÕES

7.1. Para achar a tensão no fio, o truque, como vimos, é violar a condição de vínculo. Suponha que o fio não é inextensível e associe a ele uma energia potencial de deformação. A Lagrangiana é, então,

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + m_2gy_2 - V_d(y_1 - y_2) \quad (7.63)$$

As equações do movimento seguem das equações de Euler-Lagrange e são

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= m_1g - T \\ m_2\ddot{y}_2 &= m_2g - T \end{aligned} \quad (7.64)$$

onde fizemos $T = |\partial V_d / \partial y_1| = |\partial V_d / \partial y_2|$. Temos agora que acrescentar às equações (7.64) a condição de vínculo

$$y_1 + y_2 - l = 0 \quad (7.65)$$

Resta resolver as Equações (7.64) e (7.65). Da condição de vínculo,

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2. \quad (7.66)$$

Subtraindo a segunda equação (7.64) da primeira e usando o resultado (7.66), obtemos

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = (m_1 - m_2)g \Rightarrow \ddot{y}_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g \quad (7.67)$$

Levando esse resultado para a primeira Equação (7.64), podemos, finalmente, tirar o valor de T :

$$m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g = m_1g - T \Rightarrow T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g \quad (7.68)$$

7.2. (a) É importante, antes de tudo, que você faça um esboço da trajetória da partícula, e verifique que a equação $z = k\phi$, $\rho = \text{constante}$ representa uma hélice. Da **Figura 7.8**, temos que

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi = \rho \sin \frac{z}{k} \Rightarrow \dot{x} = \rho \frac{\dot{z}}{k} \cos \frac{z}{k} \\ y &= \rho \cos \phi = \rho \cos \frac{z}{k} \Rightarrow \dot{y} = -\rho \frac{\dot{z}}{k} \sin \frac{z}{k} \\ z &= z \end{aligned} \quad (7.69)$$

A energia cinética da partícula é então

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left(\frac{\rho^2}{k^2} + 1 \right) \dot{z}^2 \quad (7.70)$$

e a energia potencial, $V = mgz$ (7.71)

Portanto, a Lagrangiana da partícula é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{\rho^2}{k^2} + 1\right)\dot{z}^2 - mgz \quad (7.72)$$

(b) O momento conjugado p_z é dado por

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)m\dot{z} \quad (7.73)$$

(c) O Hamiltoniano é

$$H = \dot{z}p_z - L = m\left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)\dot{z}^2 + mgz \quad (7.74)$$

ou,

$$H = \frac{p_z^2}{2m(1 + \rho^2/k^2)} + mgz \quad (7.75)$$

(d) Equações do movimento de Hamilton:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(1 + \rho^2/k^2)} \quad (7.76)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg \quad (7.77)$$

(e) Derivando a Equação (7.76) em relação ao tempo e substituindo o valor de \dot{p}_z da (7.77), obtemos

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m(1 + \rho^2/k^2)} = -\frac{g}{(1 + \rho^2/k^2)} \quad (7.78)$$

Esta é a equação de um movimento uniformemente desacelerado cuja solução é

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} \frac{g}{(1 + \rho^2/k^2)} t^2 \quad (7.79)$$

7.3. (a) Seja xy o plano horizontal que contém a haste (ver Figura 7.9). O sistema possui somente um grau de liberdade, o movimento radial, descrito pela coordenada r . A coordenada θ é forçada a obedecer à restrição

$$\theta = \omega t \quad (7.80)$$

Então,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = r \cos \omega t \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \omega t - r \omega \sin \omega t \\ y &= r \sin \theta = r \sin \omega t \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \omega t + r \omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.81)$$

e a energia cinética fica

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) \quad (7.82)$$

Adotando o nível zero do potencial no plano do movimento, a Lagrangiana se reduz à energia cinética

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) \quad (7.83)$$

A equação do movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\omega^2 r = 0 \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \quad (7.84)$$

A massa m tende a afastar-se do eixo de rotação em consequência da ‘força centrífuga’.

(b) O momento conjugado à coordenada r é

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (7.85)$$

Assim,

$$H = \dot{r} p_r - L = \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7.86)$$

ou seja,

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7.87)$$

A energia total E é puramente cinética, já que a energia potencial é igual a zero. Podemos escrever a energia total em termos do momento conjugado (7.85), como

$$E = T = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \quad (7.88)$$

(c) A energia total não se conserva. Você pode mostrar isso calculando explicitamente dE/dt ou notando que o sistema não é isolado porque é necessário um agente externo para manter a barra girando com velocidade angular constante. O Hamiltoniano neste problema não é igual à energia total do sistema. H é uma constante do movimento, já que não depende explicitamente do tempo ($\partial H / \partial t = 0$). (Também é evidente,

comparando-se as expressões de H e E que se um é constante, o outro não pode ser constante.)

7.4. (a) Designando as coordenadas da massa m por (x_m, y_m) , podemos escrever

$$\begin{aligned}x_m &= X + l \sin \theta \\y_m &= -l \cos \theta\end{aligned}\quad (7.89)$$

(b) Das Equações (7.89) temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= \dot{X} + l\dot{\theta} \cos \theta \\\dot{y}_m &= l\dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}\quad (7.90)$$

Assim, a energia cinética do sistema fica

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) \\&= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + 2l \cos \theta \dot{X} \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2)\end{aligned}\quad (7.91)$$

Tomando o zero da energia potencial em $y = 0$, a energia potencial do sistema é

$$V = -mgl \cos \theta \quad (7.92)$$

A Lagrangiana do sistema é então,

$$L = \frac{1}{2} (m + M) \dot{X}^2 + ml \cos \theta \dot{X} \dot{\theta} + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (7.93)$$

(c) As equações do movimento são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange. Para θ nós temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (ml \cos \theta \dot{X} + ml^2 \dot{\theta}) = -ml \sin \theta \dot{X} \dot{\theta} - mgl \sin \theta \quad (7.94)$$

ou,

$$-ml \sin \theta \dot{X} \dot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{X} + ml^2 \ddot{\theta} = -ml \sin \theta \dot{X} \dot{\theta} - mgl \sin \theta \quad (7.95)$$

o que dá, finalmente,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{l} \cos \theta \ddot{X} = 0 \quad (7.96)$$

Para X , temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [(m+M)\dot{X} + ml \cos \theta \dot{\theta}] = 0 \quad (7.97)$$

Esta equação diz que o momento conjugado $p_x = \partial L / \partial \dot{X}$ é uma constante do movimento

$$p_x = (m+M)\dot{X} + ml \cos \theta \dot{\theta} = \text{constante} \quad (7.98)$$

O valor de p_x é determinado a partir das condições iniciais. Tomando a derivada em relação ao tempo da Equação (7.98), podemos obter

$$\ddot{X} = \frac{ml}{m+M} (\sin \theta \dot{\theta}^2 - \cos \theta \ddot{\theta}) \quad (7.99)$$

Esta equação pode ser usada para eliminar \ddot{X} da Equação (7.96), deixando como resultado uma única equação diferencial não linear de segunda ordem para θ .

(d) Já vimos que p_x é uma quantidade conservada. Você pode ver da Lagrangiana que a coordenada X é cíclica. O Hamiltoniano também é uma quantidade conservada, uma vez que a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Além disso, o Hamiltoniano é a energia total do sistema, como podemos verificar explicitamente:

$$\begin{aligned} H &= \dot{X} p_x + \dot{\theta} p_\theta - L \\ &= \dot{X} [(m+M)\dot{X} + ml \cos \theta \dot{\theta}] + \dot{\theta} (ml \cos \theta \dot{X} + ml^2 \dot{\theta}) - L \quad (7.100) \\ &= \frac{1}{2} (m+M) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{\theta} \dot{X} - mgl \cos \theta \\ &= T + V = E \end{aligned}$$

(e) Quando as oscilações são de pequenas amplitudes, é válido fazer $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx 0$. As Equações (7.96) e (7.99) ficam

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta + \frac{1}{l} \ddot{X} = 0 \quad (7.101)$$

e

$$\ddot{X} \approx -\frac{ml}{m+M} \ddot{\theta} \quad (7.102)$$

onde, nesta última, o termo $\theta \dot{\theta}^2$ foi desprezado por ser de ordem superior para pequenas amplitudes. Substituindo o resultado (7.102) na Equação (7.101), obtemos

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m+M}{M} \right) \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (7.103)$$

de onde concluímos que a frequência de pequenas oscilações é

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{m+M}{M}\right)\frac{g}{l}} \quad (7.104)$$

Note que, quando $M \gg m$, a frequência ω se reduz à frequência do pêndulo não acoplado.

7.5. (a) A Lagrangiana é $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m\omega}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$. Vemos que z é uma coordenada cíclica cujo momento conjugado é

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (7.105)$$

que é o momento linear na direção z .

(b) As equações do movimento, dadas a partir das equações de Euler-Lagrange, são:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} - \frac{m\omega}{2}y \right) = \frac{m\omega}{2}\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \omega\dot{y} \quad (7.106)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(m\dot{y} + \frac{m\omega}{2}x \right) = -\frac{m\omega}{2}\dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = -\omega\dot{x} \quad (7.107)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \quad (7.108)$$

Definindo a variável $\eta = x + iy$, concluímos, usando as duas primeiras equações, que η satisfaz

$$\ddot{\eta} = -i\omega\dot{\eta} \quad (7.109)$$

cujas soluções consistentes com as Equações (7.106) e (7.107) é

$$\eta = Ae^{-i\omega t} + B \quad (7.110)$$

(c) O Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m\omega}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= \dot{x} \left(m\dot{x} - \frac{m\omega}{2}y \right) + \dot{y} \left(m\dot{y} + \frac{m\omega}{2}x \right) + \dot{z} (m\dot{z}) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m\omega}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T \end{aligned} \quad (7.111)$$

que, como vemos, consiste somente de energia cinética. Substituindo os valores dos momentos conjugados, obtemos

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right)^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 \quad (7.112)$$

Não depende explicitamente do tempo. É conservado.

(d) Tem a forma da energia cinética de uma partícula de carga q na presença de um campo com potencial vetor $A_x = -\frac{m\omega}{2q} y$, $A_y = \frac{m\omega}{2q} x$, $A_z = 0$. Isso corresponde a um campo magnético

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \frac{m\omega}{q} \hat{k} \quad (7.113)$$

onde \hat{k} é o vetor unitário na direção z .

7.6.

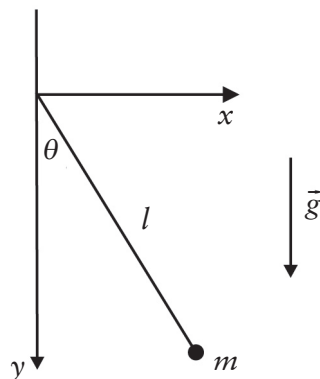


Figura 7.11: Escolha do sistema de eixos de coordenadas para o pêndulo do problema 7.6.

(a) Da **Figura 7.11**, temos que

$$\begin{aligned} x &= l(t) \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{l} \cos \theta - l \dot{\theta} \sin \theta \\ y &= l(t) \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{l} \sin \theta + l \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (7.114)$$

onde estamos escrevendo $l(t)$ para lembrar a dependência explícita no tempo. Segue que a energia cinética do pêndulo é

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \dot{l}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (7.115)$$

A energia potencial é

$$V = -mgl(t)\cos\theta \quad (7.116)$$

A Lagrangiana é, portanto,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 + mgl(t)\cos\theta \quad (7.117)$$

Note que, devido à presença explícita do tempo, $\partial L / \partial t \neq 0$. O momento conjugado à coordenada θ é

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2(t)\dot{\theta} \quad (7.118)$$

e o Hamiltoniano é

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}p_\theta - L \\ &= \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2 - mgl(t)\cos\theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2(t)} - \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2 - mgl(t)\cos\theta \end{aligned} \quad (7.119)$$

e a energia,

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 - mgl(t)\cos\theta \quad (7.120)$$

No Problema 7.3 e neste problema, o Hamiltoniano não é igual à energia total. Nos dois problemas, há uma presença explícita do tempo nas relações entre as coordenadas cartesianas e a coordenada (ou coordenadas) usada para descrever o sistema, Equações (7.81) e (7.114). Sempre que isso acontece, teremos $H \neq E$.

(b) O sistema não está isolado (um agente externo está encurtando o fio); logo, a energia total E não é uma constante do movimento. H também não é uma quantidade conservada, porque $\partial H / \partial t \neq 0$.

O movimento sob a ação de uma força central

AULA 8

Meta da aula

Apresentar o movimento de duas partículas que interagem entre si através de uma força central.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- mostrar que o movimento de duas partículas, que interagem entre si através de uma força central, se reduz ao problema de uma única partícula movendo-se em uma dimensão sob a ação de um potencial modificado;
- dado o potencial efetivo, descrever qualitativamente o tipo de órbita para os possíveis valores da energia total da partícula;
- determinar as órbitas quando a força central é a força gravitacional;
- dadas as condições iniciais, saber determinar os parâmetros da órbita correspondente;
- entender as relações entre as leis de Kepler e a lei da gravitação.

INTRODUÇÃO

Esta aula é inteiramente dedicada às chamadas forças centrais. Uma força central é, por definição, uma força que aponta na direção radial e cujo módulo depende somente da distância à fonte. A força gravitacional e a força eletrostática são forças centrais. A força entre duas partículas, ligadas uma à outra por uma mola, também é uma força central. As forças centrais estão, portanto, presentes em toda parte. É surpreendente que um problema tão importante para nós, como o de duas partículas interagindo por meio de uma força central, possa ser resolvido, como você verá, de uma forma tão simples. A simplificação se dá porque podemos reduzir esse problema essencialmente a um problema de uma única partícula movendo-se em uma dimensão.

A ênfase desta aula será dada aos problemas relacionados com a força gravitacional, que é sempre atrativa. Destaca-se o problema do movimento dos planetas no sistema solar e que vamos chamá-lo de *o problema de Kepler*. Ele foi resolvido, como você sabe, por Newton. Você verá duas abordagens:

- (i) conhecido o movimento dos planetas, cujas características são dadas pelas leis de Kepler, determinar a lei de força;
- (ii) conhecida a lei de força, encontrar a órbita.

É evidente que o cálculo da órbita de um planeta não é um simples problema de dois corpos. Um planeta é atraído pelo Sol e também por todos os outros planetas. O efeito dos outros planetas introduz pequenos desvios das leis de Kepler que, apesar de mensuráveis, não serão considerados aqui.

Também são importantes, nos dias de hoje, os problemas de cálculos relacionados com transferências de órbita para colocação de satélites de comunicação em órbitas geoestacionárias, ou para enviar naves para outros planetas. Daremos exemplos simples numa próxima aula onde também abordaremos o problema de força central, resolvido por Rutherford, do cálculo da seção de choque clássica de espalhamento de uma partícula carregada por outra também carregada. O espalhamento envolve as órbitas hiperbólicas do movimento. Você verá como este cálculo foi de fundamental importância na descoberta do núcleo atômico.

O PROBLEMA DE DOIS CORPOS: REDUÇÃO A UM PROBLEMA DE UM CORPO

Considere um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 , no qual o potencial de interação entre elas, V , é uma função de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (Figura 8.1).

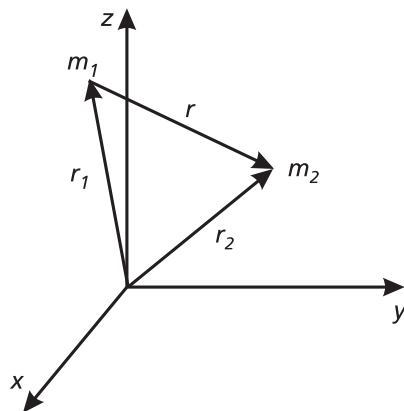


Figura 8.1: O vetor \vec{r} é o vetor posição da partícula de massa m_1 em relação à partícula de massa m_2 .

Esse sistema tem seis graus de liberdade que podemos tomar como sendo as três componentes do vetor posição do centro de massa

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (8.1)$$

e as três componentes do vetor posição relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (8.2)$$

A posição de cada partícula em termos de \vec{R} e \vec{r} é dada por

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Em termos de \vec{R} e \vec{r} , a energia cinética do sistema fica

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + T_r \quad (8.4)$$

onde

$$T_r = \frac{1}{2}m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 \quad (8.5)$$

é a energia cinética das partículas em um referencial fixo no centro de massa e μ é a massa reduzida do sistema

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.6)$$

As coordenadas das partículas neste referencial são

$$\begin{aligned}\vec{r}_1' &= \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_2' &= -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}\end{aligned}\quad (8.7)$$

A Lagrangiana do sistema é, então,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad (8.8)$$

Vemos que as três componentes de \vec{R} são coordenadas cíclicas e, portanto, o centro de massa ou está fixo, ou está em movimento retilíneo uniforme. A equação do movimento envolverá somente a coordenada relativa e é exatamente como se um centro de força estivesse localizado no centro de massa, com uma partícula adicional de massa μ na posição \vec{r} em relação ao centro de massa. O movimento das duas partículas em torno do seu centro de massa sempre pode ser reduzido ao problema equivalente de uma única partícula.

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E O POTENCIAL EFETIVO

Uma força central é, como já definimos antes, uma força cujo potencial depende somente da distância à fonte, ou seja, $V = V(r)$, onde $r = |\vec{r}|$. Assim,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad (8.9)$$

para as forças gravitacional e eletrostática, $V(r) \propto 1/r$. Com esta definição, podemos chegar imediatamente a duas conclusões importantes:

(i) Se uma partícula está sujeita somente a uma força central, seu momento angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ é conservado. Já mostramos no formalismo Lagrangeano que, se $V = V(r)$, então a variável angular é cíclica e a quantidade conservada é o momento angular. Vamos provar isso em termos da força.

Prova:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{p} \right) \\
 &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

porque a força é proporcional a \vec{r} e o produto vetorial de dois vetores paralelos é zero;

(ii) se uma partícula está sujeita somente a uma força central, seu movimento se dá em um plano.

Prova: seja P definido como sendo o plano ortogonal ao vetor $\vec{n}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ num instante t_0 . Mas sabemos que o vetor $\vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r} \times \vec{p})/m$ não muda com o tempo. Sendo assim, $\vec{n}_0 = \vec{r} \times \vec{v}$ para todo t . Como \vec{r} é ortogonal a $\vec{r} \times \vec{v}$, vemos que \vec{r} é ortogonal a \vec{n}_0 para todo t . Portanto deve estar no plano P . (O plano P não é bem definido se $\vec{v}_0 = 0$, ou $\vec{r}_0 = 0$, ou se \vec{v}_0 for paralelo a \vec{r}_0 , ou seja, quando $\vec{l} = 0$. Porém, nesses casos, é fácil observar que o movimento é sempre radial, ainda mais restritivo que um movimento num plano. Lembre-se de que já resolvemos na Aula 2 o movimento unidimensional de um corpo em queda).

Tomando o eixo z na direção de \vec{l} , o movimento ocorre no plano xy . Em coordenadas planas polares, a Lagrangiana deste movimento é

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \tag{8.11}$$

As equações do movimento seguem imediatamente das equações de Lagrange

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{dV}{dr} \tag{8.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\phi}) = 0 \tag{8.13}$$

A quantidade constante $l = \mu r^2 \dot{\phi}$ é o módulo do momento angular da partícula. Em termos dessa quantidade, a Equação (8.12) fica

$$\begin{aligned}
 \mu \ddot{r} &= \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dV}{dr} \\
 &= -\frac{d}{dr} \left[\frac{l^2}{\mu r^2} + V(r) \right]
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

ou

$$\mu \ddot{r} = -\frac{dV_{ef}(r)}{dr} \quad (8.15)$$

Essa equação é muito interessante. Ela envolve somente a variável r e tem a mesma forma que a equação de uma partícula que se move em uma dimensão (rotulada pela coordenada r) sob a influência do potencial efetivo $V_{ef}(r)$ dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (8.16)$$

Nosso problema de uma partícula movendo-se sob a ação de uma força central foi reduzido a um simples problema unidimensional com um potencial modificado. E a outra variável ϕ ? Resolvendo a Equação (8.14), achamos $r(t)$ e, então, usamos $\dot{\phi} = l / \mu r^2$ para resolver para $\phi(t)$.

A LEI DAS ÁREAS IGUAIS

Considere a área sombreada ΔS na Figura 8.2 varrida pelo vetor \vec{r} num curto intervalo de tempo Δt .

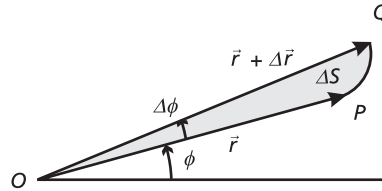


Figura 8.2: Área varrida pelo raio vetor da partícula quando essa se desloca do ponto P para o ponto Q .

Ela é dada aproximadamente pela área do triângulo POQ :

$$\Delta S = \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta \phi \quad (8.17)$$

A taxa na qual a área está sendo varrida, instantaneamente, é o limite de $\Delta S / \Delta t$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Ao nos aproximarmos desse limite, $\Delta r / r \rightarrow 0$, e $\sin \Delta \phi \rightarrow \Delta \phi$, chegamos ao resultado

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (8.18)$$

Da conservação do momento angular, Equação (8.13), temos então que

$$\text{(qualquer força central)} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{constante} \quad (8.19)$$

Esse resultado foi primeiro descoberto por Kepler na sua análise dos movimentos planetários. Se o movimento da partícula for periódico, então, integrando sobre um período completo τ do movimento, temos para a área da órbita

$$S = \frac{l\tau}{2\mu} \quad (8.20)$$

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA ÓRBITA

A solução das equações do movimento permite determinar as coordenadas da partícula em função do tempo, isto é, $r(t)$ e $\phi(t)$. Muito frequentemente, o que nós estamos realmente procurando é a equação da órbita $r(\phi)$. Para isso, devemos mudar de derivadas em t para derivadas em ϕ . Da regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\phi} \quad (8.21)$$

onde na segunda igualdade usamos que $\dot{\phi} = l / \mu r^2$. A equação que queremos obter será mais fácil de resolver se também fizermos uma troca de variável independente de r para $u = r^{-1}$. Fazendo isso,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{l}{\mu} \frac{d(r^{-1})}{d\phi} = -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\phi} \quad (8.22)$$

A segunda derivada é dada por

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\phi} \right) = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} \quad (8.23)$$

Usando a notação $f(r) = -dV(r)/dr$, reescrevemos a Equação (8.14) como

$$\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu^2 r^3} + \frac{f(r)}{\mu} \quad (8.24)$$

Finalmente, substituindo a Expressão (8.23) para a derivada segunda na Equação (8.24), dividindo tudo por u^2 e, re-arranjando, obtemos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{\mu}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (8.25)$$

A (8.25) é uma equação diferencial que dá a órbita se a força f for conhecida. Por outro lado, se a órbita for conhecida, isto é, se conhecermos r em função de ϕ , podemos usar a Equação (8.25) para determinar a força. Embora aqui nosso problema principal seja determinar a órbita, vamos considerar um exemplo de uma órbita conhecida muito interessante e descobrir que força é responsável por ela. (Veja também mais adiante o Problema 8.2 no qual pedimos que seja determinada a lei de força da gravitação a partir das leis de Kepler).

Exemplo 8.1. Neste exemplo, conhecemos a órbita e queremos encontrar a lei de força. A partícula move-se numa órbita espiral logarítmica, Figura 8.3, dada por

$$r = Ce^{k\phi} \quad (8.26)$$

onde C e k são constantes.

Procure informar-se sobre esta espiral. A história dela é muito interessante e você vai descobrir que ela aparece com muita frequência na natureza: em galáxias, tornados, girassóis, caramujos, arranjo das pétalas de uma rosa, no embrião humano, para citar alguns exemplos. Ela foi descoberta por Descartes, estudada por Torricelli e, principalmente, por Jacob Bernoulli que ficou tão impressionado com suas propriedades que pediu que uma espiral logarítmica fosse desenhada na lápide de seu túmulo.

Vamos usar a fórmula da órbita, Equação (8.26), para determinar $f(r)$. Temos que

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{e^{-k\phi}}{C} \right) = -\frac{ke^{-k\phi}}{C} \quad (8.27)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{k^2 e^{-k\phi}}{C} = \frac{k^2}{r} \quad (8.28)$$

Substituindo a Equação (8.28) na (8.25), encontramos para $f(r)$

$$f(r) = \frac{-l^2}{\mu r^2} \left(\frac{k^2}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{-l^2}{\mu r^3} (k^2 + 1) \quad (8.29)$$

A força que gera uma órbita na forma de uma espiral logarítmica é, portanto, uma força atrativa que varia com o inverso do cubo da distância.

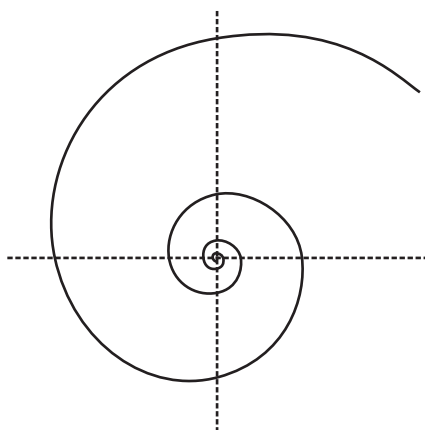


Figura 8.3: A espiral logarítmica.

O PROBLEMA DE KEPLER

Daqui em diante, e até o final desta aula, vamos supor que a força seja atrativa e varie com o inverso do quadrado da distância à fonte. Queremos encontrar a órbita. Historicamente, esse foi o primeiro problema para o qual a mecânica Newtoniana foi aplicada, pelo próprio Newton, com o objetivo de explicar o movimento dos planetas em torno do Sol e dos satélites em torno dos planetas. A resposta do problema já era conhecida: as três leis de Kepler. Que a força gravitacional deveria variar com o inverso do quadrado da distância também já havia sido proposto trinta anos antes de Newton, por Wren e por Hooke. O grande problema, que estamos chamando de *problema de Kepler*, era mostrar que essa lei de força explicava as leis de Kepler. Para isso, Newton teve que formular as leis da mecânica e inventar o cálculo diferencial e integral. Como se não bastasse, Newton teve ainda a percepção genial de que a mesma força responsável pelo movimento dos corpos celestes é responsável pela queda dos corpos aqui na Terra, ou seja, que a lei da gravitação é universal.

Quando a força central varia com o inverso do quadrado da distância, o lado direito da Equação (8.25) é constante e a equação pode ser resolvida facilmente. Fazendo $f(r) = -k/r^2$, onde (veja na Aula 5, a Equação 5.28) $k = GMm$ é uma constante positiva, a Equação (8.25) toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu k}{l^2} \quad (8.30)$$

A solução dessa equação é igual à solução geral da equação homogênea mais uma solução particular da não homogênea. A equação homogênea (fazendo o lado direito igual a zero) é a equação do oscilador harmônico simples e a sua solução geral é

$$u_h = A \cos(\phi - \phi') \quad (8.31)$$

onde A e ϕ são constantes. Por inspeção, uma solução particular da Equação (8.30) é

$$u_p = \frac{\mu k}{l^2} \quad (8.32)$$

Então, a solução geral da Equação (8.30) é $u = u_h + u_p$, ou seja,

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\mu k}{l^2} + A \cos(\phi - \phi') \quad (8.33)$$

Esta é a equação de uma seção cônica (círculo, elipse, parábola ou hipérbole) com foco em $r = 0$, como vamos mostrar a seguir. A constante ϕ' determina a orientação da órbita no plano. A constante A , que pode ser tomada como positiva porque ϕ' é arbitrário, determina os pontos de retorno do movimento r , que são dados por (fazendo $\cos(\phi - \phi') = \pm 1$)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\mu k}{l^2} + A, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\mu k}{l^2} - A, \quad (8.34)$$

Os dois pontos existem e são finitos se $A < \mu k / l^2$ (que corresponde a órbitas circulares ou elípticas, como mostraremos a seguir). Se $A \geq \mu k / l^2$ (o que corresponde a órbitas parabólicas ou hiperbólicas), o lado direito da Equação (8.33) pode tornar-se zero (quando $\cos(\phi - \phi') = -\mu k / A l^2$), e $r_2 = \infty$. Os pontos de retorno são soluções da equação

$$V_{ef}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} = E \quad (8.35)$$

e, logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{\mu k}{l^2} + \left[\left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2} \right]^{1/2} \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{\mu k}{l^2} - \left[\left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.36)$$

Comparando as Equações (8.34) e (8.36), vemos que o valor de A em termos da energia e do momento angular é dado por

$$A = \left[\left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2} \right]^{1/2} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \right]^{1/2} \quad (8.37)$$

Substituindo este resultado na Equação (8.33), podemos escrevê-la como

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\mu k}{l^2} (1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi')) \quad (8.38)$$

O parâmetro ε é chamado de excentricidade da órbita e é dado por

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \right]^{1/2} \quad (8.39)$$

Em termos de ε , os pontos de retorno ficam

$$\begin{aligned} r_1 = r_{\min} &= \frac{l^2}{\mu k(1 + \varepsilon)} \\ r_2 = r_{\max} &= \frac{l^2}{\mu k(1 - \varepsilon)} \end{aligned} \quad (8.40)$$

Como observamos anteriormente, r_2 tem um valor finito quando $A < \mu k/l^2$, ou seja, $\varepsilon < 1$, que, da Equação (8.39), ocorre quando $E < 0$. Em particular, quando $E = -\mu k^2/2l^2$, $\varepsilon = 0$ e $r_1 = r_2$. Para energias positivas, $\varepsilon \geq 1$ e $r_2 = \infty$.

AS ÓRBITAS

Vamos agora mostrar que a Equação (8.38), ou sua equivalente (8.33), de fato descreve uma seção cônica. É conveniente, aqui, trabalhar com coordenadas cartesianas e vamos fazer $\phi' = 0$. Definindo $\alpha = l^2 / \mu k$ e usando $\cos\phi = x/r$, a Equação (8.38) pode ser escrita na forma

$$\alpha = r + \varepsilon x \quad (8.41)$$

Resolvendo para r e tomando o quadrado, obtemos

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 \quad (8.42)$$

Vamos examinar os vários casos para ε .

- Círculo ($\varepsilon = 0$). Neste caso a Equação (8.42) se torna

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad (8.43)$$

que é a equação de um círculo de raio α com centro na origem. A Figura 8.4 mostra a órbita e, ao lado, um gráfico do potencial efetivo com a energia total E da partícula indicada.

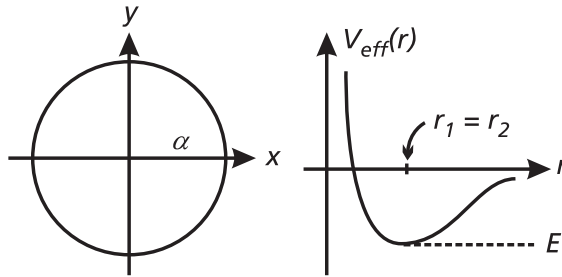


Figura 8.4: Órbita circular de raio α com centro na origem e, ao lado, gráfico do potencial efetivo mostrando a energia total E da partícula nesta órbita.

- Elipse ($0 < \varepsilon < 1$)

Nesse caso, a Equação (8.42) pode ser reescrita como

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.44)$$

onde

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad c = \varepsilon a \quad (8.45)$$

Essa é a equação de uma elipse com o centro localizado em $(-c, 0)$. O semi-eixo maior da elipse é a . O semi-eixo menor é b , e c é a distância focal. Portanto, um foco está localizado na origem, como mostrado na Figura 8.5.

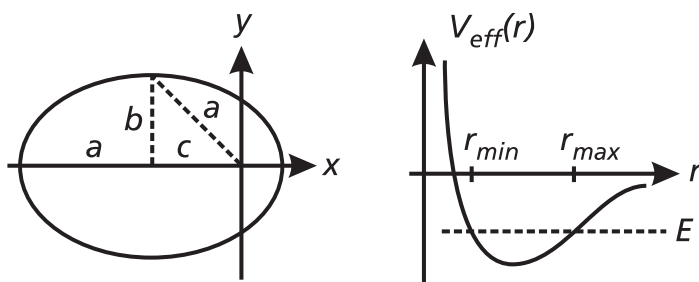


Figura 8.5: Órbita elíptica com um dos focos na origem. No gráfico do potencial efetivo, indicamos um valor típico da energia total E que corresponde a esse tipo de órbita.

- Parábola ($\varepsilon = 1$). Fazendo na Equação (8.42), obtemos

$$y^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon x = -2\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (8.46)$$

Esta é a equação de uma parábola com vértice em $(\alpha/2, 0)$ e distância focal $\alpha/2$. Ver Figura 8.6. Note na Equação (8.39) que, neste caso, $E = 0$. A velocidade da partícula tende a zero quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, uma partícula inicialmente em repouso, quando atraída por um centro de força gravitacional, vai descrever uma parábola.

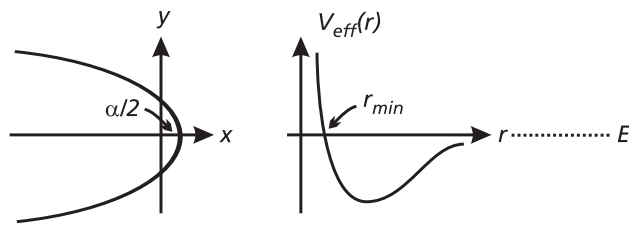


Figura 8.6: Órbita parabólica. Uma partícula nesse tipo de órbita tem energia total igual a zero.

• Hipérbole ($\varepsilon > 1$). Quando $\varepsilon > 1$, a Equação (8.39) mostra que devemos ter $E > 0$ e a órbita não pode ser fechada, como é claro pela existência de um único ponto de retorno.

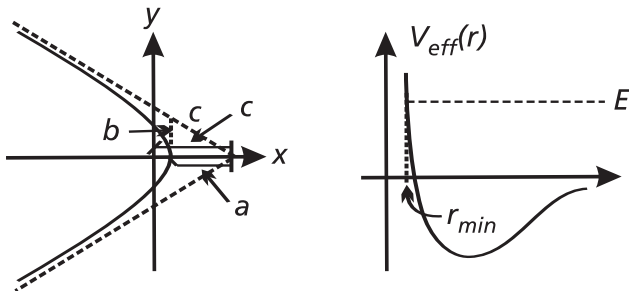


Figura 8.7: Órbita hiperbólica. Note, do gráfico do potencial efetivo, que para a energia total indicada, só há um ponto de retorno.

A equação da órbita pode ser colocada na forma

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.47)$$

onde

$$a = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad c = \varepsilon a \quad (8.48)$$

Essa é a equação de uma hipérbole cujas assíntotas se cruzam no ponto $(c, 0)$, chamado centro da hipérbole, como pode ser visto na **Figura 8.7**. A Equação (8.47) de fato descreve uma hipérbole completa, isto é, ela também descreve um ramo da hipérbole que se abre para a direita. Contudo, esse ramo da direita foi introduzido na operação de elevar ao quadrado que levou da Equação (8.41) para a Equação (8.42).

AS LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler chegou às suas três leis sobre o movimento dos planetas através de dados observacionais de Tycho Brahe, seu antecessor como astrônomo do imperador em Praga, e muita obstinação. Brahe havia acumulado dados muito precisos sobre o movimento dos planetas. As leis de Kepler são as seguintes:

Primeira lei:

Os planetas se movem em elipses tendo o Sol como um dos focos.

Ele chegou a essa lei que apresentava problemas para ser explicada pelas teorias da época estudando, por seis anos, a órbita de Marte. Esta, por sinal, é a órbita mais elíptica dos planetas para os quais Brahe tinha uma grande quantidade de dados. A primeira lei segue, como nós vimos, do fato de a força ser inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Segunda lei:

A linha ligando o Sol a um dado planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

Essa lei é uma consequência da conservação do momento angular, como mostramos na Equação (8.19). Ela diz que a força atuando num planeta é central.

Terceira lei:

O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.

Representando por τ o período de um planeta, temos

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (8.49)$$

A distância média a que se refere esta lei é o valor médio das distâncias máxima e mínima do planeta ao Sol, que é igual ao semi-eixo maior da elipse:

$$\frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{a(1 + \varepsilon) + a(1 - \varepsilon)}{2} = a \quad (8.50)$$

Demonstração: no caso de uma órbita elíptica, podemos achar o período do movimento a partir da Equação (8.20)

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi ab = \frac{2m}{l} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \quad (8.51)$$

onde usamos que a área de uma elipse é igual a πab e, da (8.45), que $b = a(1 - \varepsilon^2)^{1/2}$. Agora, para uma órbita elíptica, $a = GMm/2|E|$ (veja o Problema 8.1). Com esse resultado e a Equação (8.39), temos que

$$(1 - \varepsilon^2)^{1/2} = \left(\frac{2|E|l^2}{m(GMm)^2} \right)^{1/2} = \frac{l}{m(aGM)^{1/2}} \quad (8.52)$$

Substituindo a (8.52) na (8.51) e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos a Equação (8.49). Note que o fator de proporcionalidade é independente da massa do planeta e que isso só acontece *porque a força gravitacional é proporcional à massa do planeta*.

As leis de Kepler, como você vê, são uma receita precisa para construir a lei de força da gravitação: a força varia com o inverso do quadrado da distância, é central e é proporcional à massa do planeta.

RESUMO

Se a energia potencial V de interação entre duas partículas for uma função somente do vetor posição relativa \vec{r} , então o problema de encontrar o movimento dessas partículas pode ser reduzido ao problema de encontrar o movimento de uma única partícula, de massa igual à massa reduzida do sistema, com vetor posição \vec{r} em relação a um centro de força fixo.

Se, além disso, a energia potencial for uma função somente de r , ou seja, para uma força central, então as coisas tornam-se ainda mais simples: tudo que temos a fazer é resolver um problema unidimensional num potencial modificado, o potencial efetivo.

A equação da órbita de uma partícula sob a ação de uma força central é dada por

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{\mu}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

onde $r = 1/u$. Quando a força varia com o inverso do quadrado da distância, a solução desta equação é uma seção cônica com foco em $r = 0$. Isso explica, em particular, as órbitas dos planetas em torno do Sol.

As leis de Kepler foram obtidas por Kepler a partir de dados observacionais de Ticho Brahe. Newton usou essas leis e as leis da Mecânica, por ele formuladas, para chegar à forma da força gravitacional entre duas massas.

PROBLEMAS

8.1. *Energia total numa órbita elíptica.* Mostrar que o único parâmetro geométrico que entra na energia total de um planeta numa órbita elíptica é o comprimento do eixo maior a . Suponha que a massa do planeta, m , seja muito menor que a massa M do Sol. (Assim, a massa reduzida do sistema μ é igual a m).

8.2. Mostre, a partir das leis de Kepler e das leis do movimento da mecânica, que a força gravitacional entre um planeta de massa m e o Sol de massa $M \gg m$, tem a forma

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

onde G é a constante gravitacional.

8.3. *Sistema solar com poeira.* Imagine que o Sol fosse rodeado por uma nuvem de poeira de densidade uniforme que se estendesse pelo menos até a órbita da Terra. O efeito da nuvem de poeira seria modificar a força gravitacional experimentada pela Terra, de modo que a energia potencial gravitacional da Terra seria.

$$V(r) = -\frac{GM_s M_T}{r} + \frac{1}{2} k r^2$$

onde M_s é a massa, M_T a massa da Terra e $k = 4\pi\rho M_T G/3$. Mostre que o efeito da poeira é fazer com que as órbitas elípticas em torno do Sol entrem em lenta precessão. Queremos encontrar a frequência de precessão.

(a) A partir do potencial, encontre a força atuando sobre a Terra.

(b) Faça um esboço cuidadoso do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$. No seu esboço indique (i) a energia E_0 e o raio r_0 de uma órbita circular e (ii) a energia E_1 e os pontos de retorno r_1 e r_2 de uma órbita que não é circular.

(c) Suponha que a Terra esteja numa órbita circular de raio r_0 em torno do Sol. Derive a equação satisfeita por r_0 em termos do momento angular l e das constantes M_T , M_s , G e k . Atenção: você não precisa resolver essa equação.

(d) Encontre a frequência ω_r de pequenas oscilações em torno da órbita circular de raio r_0 . Seu resultado poderá ser escrito como

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3k}{M_T}}$$

onde ω_0 é a velocidade angular de revolução em torno do Sol para uma órbita circular.

(e) Finalmente, supondo que k seja pequeno, encontre a frequência de precessão para uma órbita quase circular.

8.4. Força inverso-do-quadrado modificada. Vamos considerar o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central que varia com o inverso do quadrado da distância e, superimposta a ela, outra força central cujo módulo é inversamente proporcional ao cubo da distância da partícula ao centro de força. Deste modo, temos que

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

onde k e λ são constantes positivas.

(a) Suponha que $\lambda < l^2 / \mu$ e use a equação da órbita para mostrar que a órbita é da forma

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{\mu k / l^2}{1 - \lambda \mu / l^2} + A \cos \kappa \theta$$

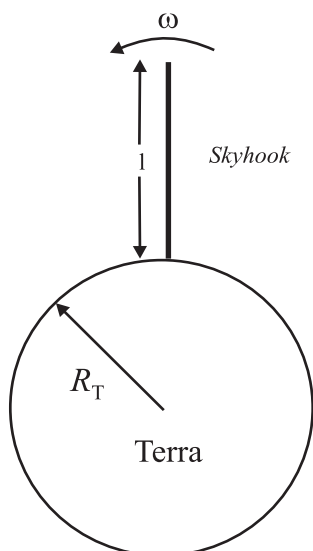
(b) Faça um gráfico da órbita para valores diferentes de k , tanto valores racionais (por exemplo, 1, $3/2$, 2), quanto valores irracionais (por exemplo, $\sqrt{2}$, $(\sqrt{5} - 1)/2$). Quando as órbitas são periódicas? Mostre que o movimento pode ser descrito por uma elipse em precessão.

8.5. Um satélite de comunicações está em uma órbita circular em torno da Terra de raio R e com velocidade v . Por acidente, um foguete dispara subitamente, dando ao satélite uma velocidade radial para fora da órbita de módulo v além de sua velocidade original.

(a) Calcule a nova energia total do satélite e seu novo momento angular.

(b) Descreva o movimento subsequente do satélite.

8.6. O “*Skyhook*”. Arthur C. Clarke, famoso autor de 2001: *Uma odisséia no espaço*, sugere em sua novela *As fontes do paraíso* que viagens espaciais poderiam ser mais viáveis usando-se um “gancho espacial” ou *skyhook*, um longo cabo suspenso no espaço numa órbita geossíncrona (cujo período de revolução é igual ao da rotação da Terra) acima do Equador da Terra, e alinhado ao longo da direção radial. Vamos supor que o cabo tenha uma massa por unidade de comprimento λ , constante, e um comprimento l . Como o cabo está numa órbita circular geossíncrona, ele tem uma frequência angular $\omega = 2\pi / T$, sendo T o período de rotação da Terra. A extremidade inferior do cabo está logo acima da superfície da Terra. Vamos supor que a Terra seja uma esfera de raio R_T



(a) Encontre a aceleração centrípeta do centro de massa do cabo em termos de l , R_E e ω .

(b) Encontre a força gravitacional que a Terra exerce sobre o cabo.

(c) Aplique a segunda lei de Newton para achar uma equação para o comprimento do cabo. Resolva essa equação e faça uma estimativa do comprimento do “*skyhook*”.

(d) Verifique se a idéia é viável, ou seja, se há materiais suficientemente fortes para suportar as tensões inerentes a um cabo tão longo. Com este objetivo, primeiro derive uma equação diferencial para a tensão $T(r)$ num ponto do cabo que está a uma distância r do centro da Terra. Use esta equação para encontrar a tensão máxima no cabo. Divida esse resultado pela área A da seção reta do cabo para obter a máxima tensão de tração.

8.7. O problema de Kepler revisitado: o vetor de Runge-Lenz.

Você já viu que quando duas partículas interagem através de uma força central, temos conservação da energia, momento linear e momento angular. Porém, quando a força é a gravidade – mais precisamente, quando a força é da forma $1/r^2$ – existe uma quantidade extra conservada. Ela foi originalmente descoberta por Laplace, mas é conhecida como vetor de Runge – Lenz. Sua existência pode ser deduzida do fato de que no problema gravitacional de duas partículas, cada partícula orbita o centro de massa numa elipse (parábola ou hipérbole) cujo *periélio não muda com o tempo*. O vetor de Runge-Lenz aponta na direção do periélio. Se a força variasse como $1/r^{2,1}$, ou algo semelhante, a órbita ainda seria aproximadamente elíptica, porém o periélio iria estar em precessão.

A primeira evidência experimental de que a lei da gravitação universal Newtoniana não era bem correta, foi a precessão do periélio de Mercúrio. A maior parte dessa precessão é devida à atração dos outros planetas e outros efeitos, mas cerca de 45 segundos de arco por século permaneceram não explicados até Einstein inventar a teoria geral da relatividade.

Nós podemos usar o vetor de Runge-Lenz para simplificar a prova de que as órbitas, no problema gravitacional de dois corpos, são elipses, parábolas e hipérboles. Como antes, vamos trabalhar com o vetor posição relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

A equação do movimento é

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \hat{r}$$

onde μ é a massa reduzida do sistema e $f(r) = -dV/dr$. No caso da força gravitacional,

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{k\hat{r}}{r^2} \quad (8.53)$$

(a) Seja $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ o vetor momento angular. Nós já mostramos que quando a força é central, como é o caso da força gravitacional, $\dot{\vec{L}} = 0$. Tome o produto vetorial de ambos os lados da Equação (8.53) com \vec{L} e mostre que

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = k\hat{r}$$

Dica: você vai precisar da identidade vetorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ e também precisará mostrar que

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r})\dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}}{r^3}$$

(b) Mostre então que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = k \frac{d}{dt} \hat{r}$$

e conclua que o vetor

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{k} - \hat{r}$$

é independente do tempo. Este é o vetor de Runge-Lenz.

(c) Mostre que

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{l^2}{\mu k} - \hat{r} \quad (8.54)$$

onde l é o módulo do momento angular \vec{L} . Fazendo $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \phi$, podemos colocar a Equação (8.54) na forma

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} (A \cos \phi + 1)$$

Essa é a equação da órbita. Compare com a dedução da equação da órbita no texto da aula. Note que o módulo vetor de Rugen-Lenz é igual à excentricidade da órbita:

$$A = \varepsilon$$

A conservação do vetor de Rugen-Lenz é um modo de dizer que a excentricidade e o periélio não mudam com o tempo.

SOLUÇÕES

8.1. Como a força gravitacional é conservativa, a energia total é constante e podemos calculá-la em qualquer ponto conveniente da órbita. Vamos escolher o ponto de maior afastamento

$$r_2 = r_{\max} = \frac{l^2}{\mu k(1-\varepsilon)} = \frac{\alpha(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)} = a(1+\varepsilon) \quad (8.55)$$

onde usamos a definição $\alpha = l^2 / \mu k$ e a definição de a na Equação (8.45). A energia potencial em r_2 é dada por

$$V(r_2) = -\frac{GMm}{a(1+\varepsilon)} \quad (8.56)$$

A energia cinética pode ser calculada observando-se que num ponto onde a velocidade é puramente transversal

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\phi})^2 = \frac{2m}{r^2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \quad (8.57)$$

onde usamos a Equação (8.18). Especificamente, temos

$$T(r_2) = \frac{2m}{a^2(1+\varepsilon)^2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \quad (8.58)$$

Da segunda lei de Kepler

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{\tau^2} \quad (8.59)$$

onde τ é o período do movimento. Usando a terceira lei de Kepler

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{GMa(1-\varepsilon^2)}{4} \quad (8.60)$$

Então, substituindo este resultado na (8.58), obtemos

$$T(r_2) = \frac{GMm(1-\varepsilon)}{2a(1+\varepsilon)} \quad (8.61)$$

Somando a Equação (8.56) e a (8.61), temos a seguinte fórmula para a energia total do movimento:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (8.62)$$

Note nesta expressão que qualquer aumento de E implica um aumento no comprimento do semi-eixo maior da elipse que descreve a órbita.

8.2. A primeira lei diz que a órbita do planeta é uma elipse com o Sol num dos focos. A equação de uma elipse com semi-eixos maior e menor a e b , respectivamente, e excentricidade ε tem a forma

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2} (1 + \varepsilon \cos \phi) \quad (8.63)$$

Da Equação (8.12), consistente com o movimento sob a ação de uma força central, vemos que a aceleração radial do planeta é dada por

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (8.64)$$

Agora, vamos calcular o lado direito desta equação a partir da Equação da elipse (8.63) e usando a lei das áreas. Diferenciando ambos os lados da Equação (8.63), obtemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \varepsilon \frac{a}{b^2} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \quad (8.65)$$

e, usando a Equação (8.18), podemos escrever

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2\varepsilon a}{b^2} \sin \phi \frac{dS}{dt} \quad (8.66)$$

Diferenciando uma segunda vez, lembrando que dS/dt é constante, encontramos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2\varepsilon a}{b^2} \frac{dS}{dt} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{4\varepsilon a}{b^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \frac{1}{r^2} \cos \phi \quad (8.67)$$

A aceleração radial fica então

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{4\epsilon a}{b^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \frac{1}{r^2} \cos \phi - 4 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{4}{r^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \left[\frac{a}{b^2} \epsilon \cos \phi - \frac{1}{r} \right] = -\frac{4}{r^2} \frac{a}{b^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.68)$$

onde, na última linha, usamos novamente a Equação (8.63). Agora, da segunda lei,

$$\left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\tau^2} \quad (8.69)$$

e assim,

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{r^2 \tau^2} \quad (8.70)$$

Vemos, portanto, voltando à Equação (8.12), que

$$m a_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi^2 m a^3}{r^2 \tau^2} \quad (8.71)$$

Finalmente, a terceira lei de Kepler diz que a^3/τ^2 é constante, independente da m massa do planeta. Esta constante, entretanto, deve envolver a massa M do Sol (por quê?) Assim, a lei de força deve ser da forma

$$\vec{F} = \text{const} \times \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (8.72)$$

8.3. (a) A força é igual a menos o gradiente do potencial. Como o potencial depende só de r , ficamos com

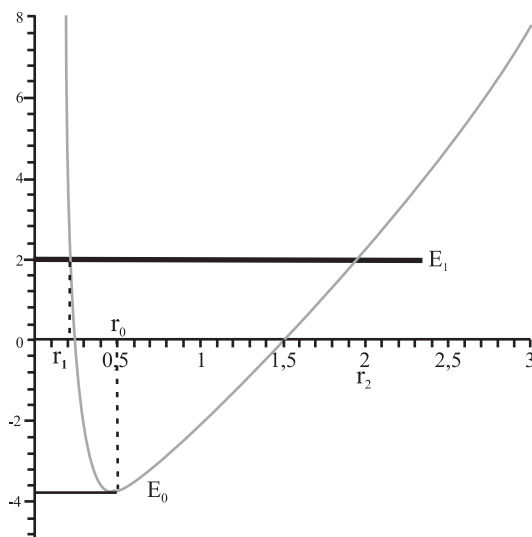
$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{dV}{dr} \hat{r} \\ &= -\left(\frac{GM_s M_T}{r^2} + kr \right) \hat{r} \end{aligned} \quad (8.73)$$

A força é atrativa e aponta da Terra para o Sol.

(b) O potencial efetivo é

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM_s M_T}{r} + \frac{1}{2} k r^2 + \frac{l^2}{2M_T r^2} \quad (8.74)$$

No último termo nós usamos a massa da Terra em vez da massa reduzida, o que é aqui, uma boa aproximação uma vez que a massa do Sol é muito maior que a massa da Terra. O esboço de $V_{eff}(r)$ está na figura a seguir:



(c) A órbita circular é aquela que minimiza o potencial efetivo. Portanto, nós temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 = \frac{GM_S M_T}{r_0^2} + k r_0 - \frac{l^2}{M_T r_0^3} \quad (8.75)$$

Esta é a equação que dá r_0 . É uma equação de quarto grau para r_0 .

(d) Expandindo o potencial efetivo em torno de $r = r_0$, temos,

$$V_{eff}(r) \approx V_{eff}(r_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} (r - r_0)^2 \quad (8.76)$$

A frequência para oscilações em torno de $\nu = \nu_0$ é dada por:

$$\omega_r = \sqrt{\left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} / M_T} \quad (8.77)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} &= - \left(\frac{2l^2}{M_T r_0^4} - 2k \right) + k + \frac{3l^2}{M_T r_0^4} \\ &= \frac{l^2}{M_T r_0^4} - 3k \end{aligned} \quad (8.78)$$

Mas, numa órbita circular de raio r_0 , $l = M_T r_0^2 \omega_0$; substituindo na equação acima, obtemos

$$\left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} = M_T \omega_0^2 + 3k \quad (8.79)$$

Finalmente,

$$\omega_r = \sqrt{\left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} / M_T} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3k}{M_T}} \quad (8.80)$$

(e) A frequência de precessão, ω_p é dada pela diferença $\omega_r - \omega_0$. Supondo k pequeno, escrevemos

$$\omega_r = \omega_0 \left(1 + \frac{3k}{M_T \omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 + \frac{3k}{2M_T \omega_0^2} \quad (8.81)$$

e logo,

$$\omega_p = \omega_r - \omega_0 = \frac{3k}{2M_T \omega_0^2} \quad (8.82)$$

8.4. (a) A equação da órbita é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u &= -\frac{\mu}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= -\frac{\mu}{l^2} (-k - \lambda u) \end{aligned} \quad (8.83)$$

Rearranjando os termos da Equação (8.83),

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{\mu \lambda}{l^2} \right) u = \frac{\mu k}{l^2} \quad (8.84)$$

Esta equação pode ser simplificada fazendo-se uma mudança para a variável

$$w = u - \frac{\mu k / l^2}{1 - \mu \lambda / l^2} \quad (8.85)$$

Ficamos com

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \kappa^2 w = 0 \quad (8.86)$$

onde $\kappa^2 = 1 - \mu \lambda / l^2$. A natureza da solução da Equação (8.86) vai depender do sinal de κ^2 ; se $\kappa^2 > 0$, nos temos

$$w = A \cos \kappa (\theta - \theta_0) \quad (8.87)$$

onde A e θ_0 são constantes de integração. Em termos de $u = 1/r$, nós temos

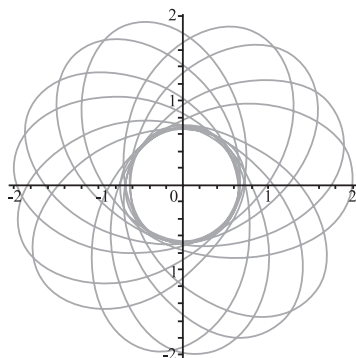
$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{\mu k / l^2}{1 - \mu \lambda / l^2} + A \cos \kappa \theta \quad (8.88)$$

onde fizemos $\theta_0 = 0$ sem perda de generalidade. A constante A depende das condições iniciais e pode ser escrita em termos da energia E da órbita.

(b) A Equação (8.88) descreve uma elipse em precessão. Se a constante κ for um número racional ($\kappa = p/q$, com p e q inteiros), então a órbita será fechada para $\theta = 2\pi q$. Quando κ for um número irracional ($\kappa = \sqrt{2}$, por exemplo), a órbita nunca se fechará. A figura seguinte mostra um gráfico de

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \sqrt{2} \theta} \quad (8.89)$$

para θ de 0 a 40π .



8.5. (a) A energia total do satélite é

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{R} \quad (8.90)$$

onde $k = GM_T m$, sendo M_T a massa da Terra e m a massa do satélite. Mas, numa órbita circular,

$$\frac{k}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (8.91)$$

de onde concluímos que

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2R} = -\frac{V}{2} \quad (8.92)$$

Assim, para uma órbita circular, $E = T + V = T - 2T = -T$. Como o satélite está em órbita circular, podemos escrever que, $E_i + T_i = 0$ onde o índice i indica o valor inicial.

Imediatamente após o foguete ter disparado, a energia potencial do satélite ainda continua a mesma (a posição do satélite não se altera significativamente durante o tempo de disparo do foguete), ou seja, $V_f = V_i$. No entanto, sua energia cinética dobra: $T_f = 2 \times mv^2 / 2 = 2T_i$ porque o foguete ganha uma velocidade v perpendicular à velocidade inicial. Usando esses resultados, a energia total do satélite logo após o disparo é, então, $E_f = T_f + V_f = 2T_i + V_i = E_i + T_i = 0$.

Uma vez que, o disparo foi na direção radial, o momento angular do satélite não se altera.

(b) Sabemos que, quando a energia total é zero num movimento sob a ação de uma força central que varia com o inverso do quadrado da distância, a trajetória é uma parábola. Então, após o disparo do foguete, o satélite passará a se mover numa órbita *parabólica*.

8.6. (a) O centro de massa do cabo está em

$$r = R_T + l/2 \quad (8.93)$$

de modo que a aceleração centrípeta do CM é

$$a = \omega^2 (R_T + l/2) \quad (8.94)$$

(b) A força gravitacional sobre um elemento de massa do cabo $dm = \lambda dr$ é

$$dF = \frac{GM_T \lambda dr}{r^2} \quad (8.95)$$

Integrando sobre o comprimento do cabo, obtemos

$$\begin{aligned} F &= \int_{R_T}^{R_T+l} \frac{GM_T \lambda dr}{r^2} \\ &= GM_T \lambda \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+l} \right) \\ &= \frac{GMm}{R_T(R_T+l)} \end{aligned} \quad (8.96)$$

onde usamos que $m = \lambda l$ é a massa do cabo.

(c) A massa total do cabo multiplicada pela aceleração do centro de massa é igual à força total sobre o cabo:

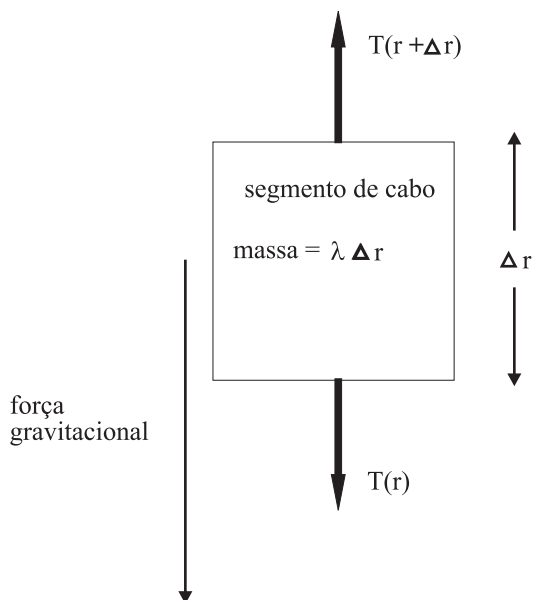
$$m\omega^2(R_T + l/2) = \frac{GM_T m}{R_T(R_T + l/2)} \quad (8.97)$$

Esta é uma equação de segundo grau para l . É conveniente escrevê-la em termos da quantidade adimensional $x = l/R_T$. Após um pouco de álgebra, obtemos

$$(x+2)(x+1) = \frac{2GM_T}{\omega^2 R_T^3} = \frac{2g}{\omega^2 R_T} \quad (8.98)$$

Usando os valores $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $\omega = 2\pi/T$ com $T = 86.400 \text{ s}$ e $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, encontramos, ou seja, $l = 22R_T = 1,4 \cdot 10^5 \text{ km}$. Compare este resultado com a distância da Terra à Lua que é de $3,8 \times 10^5 \text{ km}$!

Considere um *pequeno* segmento do cabo a uma distância r do centro da Terra e de comprimento Δr .



Referindo-se à figura, nós temos para a força radial

$$F_r = T(r + \Delta r) - T(r) - \frac{GM_T \lambda \Delta r}{r^2} \quad (8.99)$$

Mas, $F_r = -(\lambda \Delta r) \omega^2 r$ (o sinal negativo é para indicar que a aceleração centrípeta aponta no sentido contrário ao vetor \hat{r}). Isso nos dá

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} = \frac{GM_T \lambda}{r^2} - \lambda \omega^2 r \quad (8.100)$$

Tomando o limite $\Delta r \rightarrow 0$, temos finalmente,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{GM_T \lambda}{r^2} - \lambda \omega^2 r \quad (8.101)$$

A tensão máxima ocorre quando $(dT/dr)_0 = 0$, a uma distância do centro da Terra, onde

$$\frac{GM_T}{r_0^2} - \omega^2 r_0 = 0 \quad (8.102)$$

de modo que

$$r_0 = \left(\frac{GM_T}{\omega^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{g R_T^2}{\omega^2} \right)^{1/3} \quad (8.103)$$

Note que este é o raio de uma órbita geossíncrona para uma massa puntiforme. Pondo números, achamos: $r_0 = 42.340 \text{ km}$, ou 36.940 km acima da superfície da Terra.

Para achar a tensão, precisamos integrar a equação (8.101):

$$T(r) - T(R_T) = \int_{R_T}^r \frac{dT}{dr} dr = GM_T \lambda \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_T} \right) - \frac{\lambda \omega^2}{2} (r^2 - R_T^2) \quad (8.104)$$

A tensão é zero nas extremidades e, portanto, $T(R_T) = 0$. Temos então para a tensão máxima

$$T_{\max} = T(r_0) = GM_T \lambda \left(-\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_T} \right) - \frac{\lambda \omega^2}{2} (r_0^2 - R_T^2) \quad (8.105)$$

Agora, substituímos o valor de r_0 nesta expressão e dividimos pela área A da seção reta do cabo para obter a tração máxima $\sigma_{\max} = T_{\max} / A$:

$$\sigma_{\max} = \rho \left[gR_T + \omega^2 R_T^2 / 2 - \frac{3}{2} (gR_T^2 \omega)^{2/3} \right] \quad (8.106)$$

onde $\rho = \lambda / A$ é a densidade de massa do cabo. Substituindo os valores numéricos das quantidades conhecidas, obtemos

$$\sigma_{\max} = \rho \times (48,7 \times 10^6 \text{ m}^2 / \text{s}^2) \quad (8.107)$$

Agora, precisamos de um valor de ρ . Vamos usar o valor da densidade do aço que é cerca de $8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Isto dá $\sigma_{\max} = 390 \times 10^9 \text{ Pa}$, várias ordens de grandeza maior que o ponto de ruptura do aço.

8.7. (a) Multiplicando ambos os lados da equação (8.53) por \vec{L} , temos

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} &= -\mu \frac{k\hat{r}}{r^2} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= -\frac{\mu k}{r^2} (\hat{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} + \frac{\mu k}{r^2} (\hat{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{\mu k}{r^3} ((\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}) \end{aligned} \quad (8.108)$$

Assim,

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = \frac{k}{r^3} ((\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}) \quad (8.109)$$

Agora, tomando a derivada em relação ao tempo de ambos os lados de $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$, achamos

$$2r\dot{r} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (8.110)$$

Fazendo o mesmo com $\vec{r} = r\hat{r}$, encontramos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \quad (8.111)$$

Com esses dois últimos resultados, podemos escrever que

$$r^3 \dot{\hat{r}} = r^2 (r\dot{\hat{r}}) = r^2 (\dot{\vec{r}} - \dot{r}\hat{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (r\dot{r}) \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} \quad (8.112)$$

Então, substituindo a relação (8.112) na equação (8.109), obtemos a relação procurada:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = k \dot{\vec{r}} \quad (8.113)$$

(b) Calculando a derivada de $\dot{\vec{r}} \times \vec{L}$ e usando a conservação do momento angular e equação (8.113), temos

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \frac{d\vec{L}}{dt} = k \frac{dr}{dt} \quad (8.114)$$

de onde concluímos que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - kr) = 0 \quad (8.115)$$

Logo, o vetor

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{k} - \hat{r} \quad (8.116)$$

é uma quantidade conservada.

(c) Multiplicando escalarmente o vetor de Runge-Lenz pelo vetor \vec{r} e usando a identidade vetorial $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, encontramos

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{k} - \hat{r} \right) \cdot \vec{r} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r}}{k} - r = \frac{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L}}{k} - r = \frac{l^2}{\mu k} - r \quad (8.117)$$

que é o resultado desejado.

Movimento em um referencial não inercial

AULA 9

Meta da aula

Descrever o movimento a partir de um referencial acelerado.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- descrever como aparecem as forças inerciais;
- distinguir forças inerciais das forças resultantes da interação da partícula com sua vizinhança;
- dar exemplos de manifestações dessas forças para um observador na Terra.

INTRODUÇÃO

Observe as fotos a seguir. Elas mostram dois furacões famosos: um deles é o Catarina, que atingiu a costa brasileira em março de 2004; o outro é o Isabel, que atingiu a costa americana em setembro de 2003. Você conseguiria dizer, usando somente argumentos físicos, qual deles é o brasileiro?

Nesta aula, vamos estudar a dinâmica em referenciais não inerciais. Você já aprendeu, no Módulo 2, Volume 2, do curso Física 1A, que a segunda lei de Newton tem a forma simples $\vec{F} = m\vec{a}$, com a força resultante oriunda apenas de interações, somente em referenciais inerciais. No entanto, vivemos na superfície de um planeta que gira em torno do seu eixo e percorre uma órbita elíptica em torno do Sol, para citar apenas os dois movimentos mais relevantes, o que faz com que qualquer referencial fixo em relação à Terra seja um referencial não inercial. Em um referencial não inercial aparecem as *forças inerciais*, assim chamadas porque todas, a exemplo da força gravitacional, são proporcionais à massa da partícula considerada. Nesta aula, você verá que uma dessas forças inerciais está diretamente envolvida na existência de furacões. Também verá que, em certas situações, como no tratamento do movimento de corpos rígidos, pode ser conveniente trabalhar em um referencial não inercial.

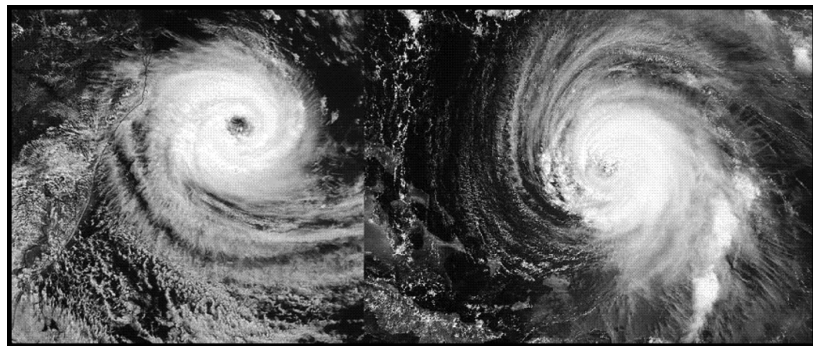


Figura 9.1: Os furacões Catarina e Isabel. Um ocorreu no hemisfério norte e o outro, no hemisfério sul. Observe que eles giram em sentidos opostos.

Em muitos fenômenos, é difícil perceber que a Terra está girando em torno do seu eixo. Na antiga Grécia houve uma disputa entre os astrônomos sobre os possíveis movimentos da Terra. Aristarco (310–230 a.C.) afirmava que a Terra girava em torno do seu eixo a cada vinte e quatro horas e também dava uma volta em torno do Sol a cada ano e, ainda, que os outros planetas todos se moviam em órbitas em torno do Sol. O motivo para Aristarco acreditar que a Terra girava em torno de seu eixo era que isto explicaria facilmente o movimento aparente de rotação das estrelas no céu (ver **Figura 9.2**). Mas a teoria dominante dizia que a Terra estava fixa, imóvel, no centro do universo.

Os argumentos contra as idéias de Aristarco eram os mais variados. Por exemplo, os astrônomos gregos já haviam tentado calcular a distância do Sol e sabiam que ela excedia dois milhões de quilômetros (um valor estimado muito baixo, a distância é de 150 milhões de quilômetros). Diziam os oponentes de Aristarco que, como a distância do Sol é muito grande, se a Terra se movesse num círculo tão grande nós deveríamos ver a distribuição das estrelas no céu mudar ao longo do ano, porque as mais próximas pareceriam se mover de uma certa extensão contra o *background* daquelas mais distantes. Aristarco respondeu que as estrelas estão todas tão distantes que uma diferença de dois milhões de quilômetros ou três no ponto de observação é desprezível. Isto implicava, porém, que o universo deveria ser realmente enorme, pelo menos bilhões de quilômetros de extensão, no que poucos estavam prontos para acreditar. O modelo da Terra fixa, imóvel, foi, mais tarde, adotado pela Igreja, tornou-se um dogma e somente mil anos depois as idéias de Aristarco reapareceram com Copérnico.



Figura 9.2: Fotografia de longa exposição do céu no hemisfério sul. Os rastros circulares das estrelas são uma consequência da rotação da Terra em torno de seu eixo.

ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

Vamos tentar definir um vetor que represente uma rotação finita cujo módulo é o ângulo de rotação e cuja direção é o eixo de rotação, no sentido determinado pela regra da mão direita. É este um bom vetor? A resposta é não. O problema é que *a adição de rotações finitas não é comutativa*, ao passo que a adição de vetores é comutativa. Para ver como isso acontece, considere o exemplo da **Figura 9.3**. Nela mostramos

o efeito da aplicação de duas rotações sucessivas de 90° a um dado, uma em torno do eixo-z, e outra em torno do eixo-x. Em (a), a rotação em torno de x é aplicada antes da rotação em torno de z , e em (b) a ordem é invertida. O dado termina em estados completamente diferentes. Claramente, a rotação- z mais a rotação- x não é igual à rotação- x mais a rotação- z . Esta álgebra não-comutativa não pode ser representada por vetores. Assim, embora rotações finitas tenham módulo e direção bem definidos, elas *não* são quantidades vetoriais.

Mas este não é bem o final da história. Suponha que tomemos um vetor qualquer \vec{r} e giremos este vetor de um pequeno ângulo $\delta\theta$, como mostrado na Figura 9.4. Referindo-se à mesma figura, vemos que o módulo da variação do vetor $|\delta\vec{r}|$ é dado por

$$|\delta\vec{r}| = r \sin\alpha \delta\theta \quad (9.1)$$

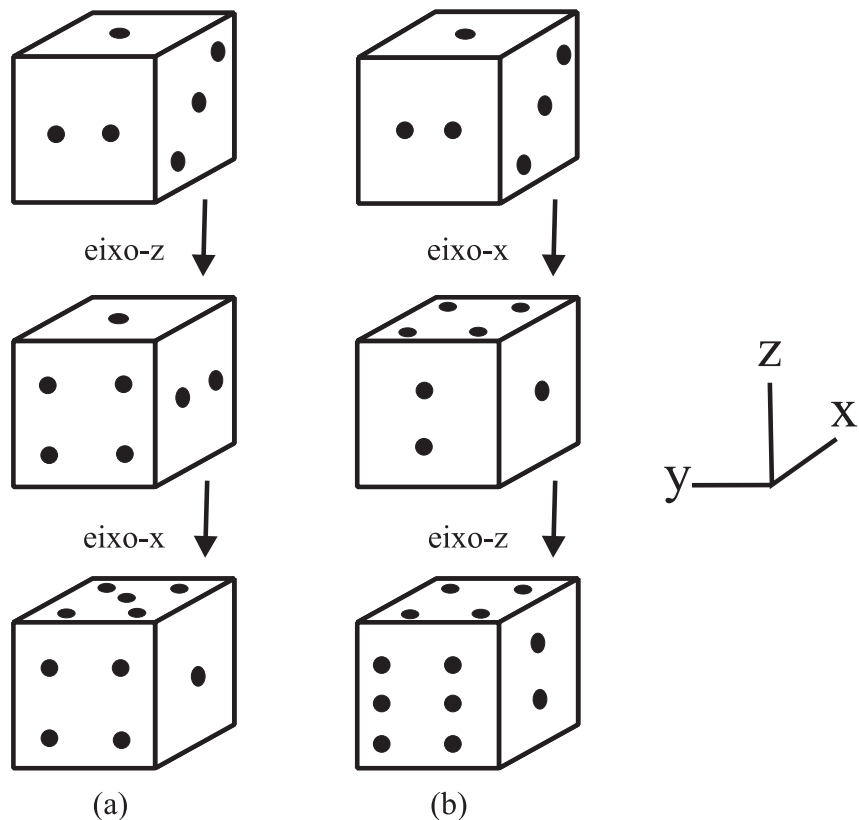


Figura 9.3: Em (a), o dado é girado de 90° primeiro em torno do eixo-z, depois, em torno do eixo-x. Em (b), a primeira rotação de 90° é em torno do eixo-x e a segunda, em torno do eixo-z.

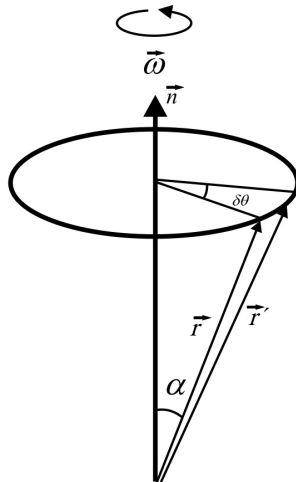


Figura 9.4: O vetor \vec{r} faz um ângulo α com a direção do vetor \vec{n} e é girado de um ângulo $\delta\theta$ em torno dessa direção.

Lembrando a definição do produto vetorial, podemos escrever

$$\delta\vec{r} = \overline{\delta\theta} \times \vec{r} \quad (9.2)$$

ou,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overline{\delta\theta} \times \vec{r} \quad (9.3)$$

onde introduzimos o vetor rotação infinitesimal $\overline{\delta\theta} = \delta\theta \vec{n}$. Vejamos agora o que acontece quando aplicamos ao vetor \vec{r} duas rotações infinitesimais sucessivas $\overline{\delta\theta}_1$ e $\overline{\delta\theta}_2$, não necessariamente co-lineares. Sob essas operações, o vetor primeiro muda para \vec{r}' , onde

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overline{\delta\theta}_1 \times \vec{r} \quad (9.4)$$

e depois se transforma em

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \vec{r}' + \overline{\delta\theta}_2 \times \vec{r}' \\ &= \vec{r} + \overline{\delta\theta}_1 \times \vec{r} + \overline{\delta\theta}_2 \times (\vec{r} + \overline{\delta\theta}_1 \times \vec{r}) \\ &\approx \vec{r} + (\overline{\delta\theta}_1 + \overline{\delta\theta}_2) \times \vec{r} \\ &= \vec{r} + \overline{\delta\theta}_{12} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Aqui, ao passar da segunda para a terceira linha, desprezamos infinitésimos de segunda ordem. O resultado final da Equação (9.5) mostra que \vec{r}'' difere de \vec{r} por uma única rotação infinitesimal, $\overline{\delta\theta}_{12} = \overline{\delta\theta}_1 + \overline{\delta\theta}_2$ obtida como a soma vetorial de $\overline{\delta\theta}_1$ e $\overline{\delta\theta}_2$. Por outro lado, em virtude

da comutatividade da soma de vetores, a Equação (9.5) também vale, em primeira ordem, se as rotações forem realizadas na ordem reversa. Portanto, concluímos que *rotações infinitesimais sucessivas são comutativas*. Assim, nós estabelecemos explicitamente que rotações infinitesimais podem de fato ser adicionadas como vetores.

O fato de uma rotação infinitesimal ser um vetor implica que a velocidade angular

$$\vec{\omega} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\delta\theta}}{\delta t} \quad (9.6)$$

também é um vetor.

Se interpretarmos \vec{r}'' como $\vec{r}(t + \delta t)$ na Equação (9.3), então a equação do movimento de um vetor \vec{r} , executando um movimento de precessão em torno da origem com velocidade angular $\vec{\omega}$, é dada por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.7)$$

Este resultado é muito importante para o desenvolvimento subsequente desta aula.

SISTEMAS DE COORDENADAS GIRANTES

Considere um sistema de referência inercial com um conjunto fixo de eixos coordenados ortogonais $\{\hat{e}_i\}$ e uma origem O . Veja a Figura 9.5. (Aqui, por conveniência, usaremos a notação $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$; $\hat{e}_1 = \hat{i}, \hat{e}_2 = \hat{j}, \hat{e}_3 = \hat{k}$).

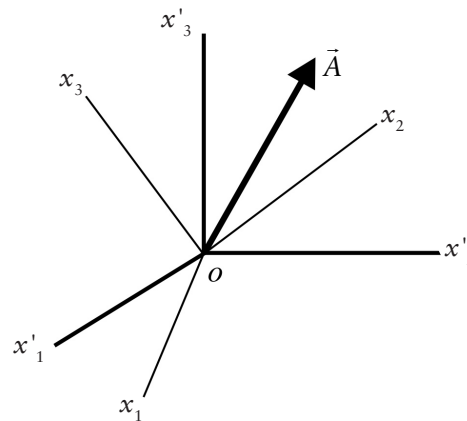


Figura 9.5: Dois referenciais com uma mesma origem O . O referencial com eixos ao longo dos unitários $\{\hat{e}_i\}$ é inercial e o outro gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a ele.

Um segundo referencial, com a mesma origem O e eixos coordenados $\{\hat{e}_i\}$, gira com velocidade angular $\vec{\omega}$. Visto do referencial inercial, os vetores unitários \hat{e}_i estão se movendo segundo as equações

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.8)$$

Seja \vec{A} um vetor qualquer. Podemos decompô-lo em termos de suas componentes $A_i = \vec{A} \cdot \hat{e}_i$ no sistema girante

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (9.9)$$

ou, em termos de suas componentes $A'_i = \vec{A} \cdot \hat{e}'_i$ no sistema inercial fixo,

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A'_i \hat{e}'_i \quad (9.10)$$

Suponha agora que um observador no referencial inercial fixo veja \vec{A} variando com o tempo. A derivada temporal de \vec{A} , no sistema inercial fixo, é

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA'_i}{dt} \hat{e}'_i \quad (9.11)$$

porque neste sistema os unitários \hat{e}'_i são fixos. Mas, usando a Equação (9.9), temos também que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (9.12)$$

O primeiro termo do lado direito desta equação é, por comparação com a Equação (9.11), a derivada temporal do vetor \vec{A} calculada no referencial girante, onde os unitários \hat{e}_i são fixos. Usando a equação (9.8), vemos que

$$\sum_{i=1}^3 A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (9.13)$$

Assim, podemos escrever, finalmente,

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_f = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_r + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (9.14)$$

onde o índice f refere-se ao referencial inercial fixo e o índice r ao sistema girante. Uma aplicação importante dessa fórmula é ao caso em que $\vec{A} = \vec{\omega}$. Como $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, temos que a aceleração angular $d\vec{\omega}/dt$ é a mesma em ambos os sistemas:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_f = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_r = \dot{\vec{\omega}} \quad (9.15)$$

A SEGUNDA LEI DE NEWTON NUM SISTEMA DE COORDENADAS ACELERADO

A Equação (9.14) pode ser usada para relacionar a velocidade e aceleração de uma partícula como observadas no sistema girante com a sua velocidade e aceleração medidas no sistema inercial fixo. Na **Figura 9.6** \vec{r}' representa a posição da partícula no referencial inercial fixo e \vec{r} a posição relativa ao sistema girante. Temos que

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} \quad (9.16)$$

onde o vetor \vec{R} localiza a origem do sistema girante no sistema fixo. Para o observador no sistema fixo,

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_f = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_f + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_f \quad (9.17)$$

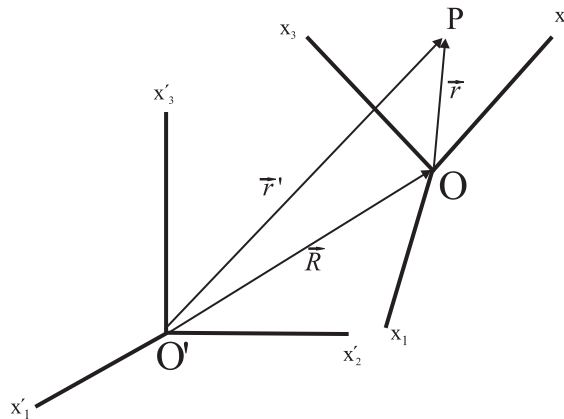


Figura 9.6: A partícula em P tem vetor posição \vec{r}' no referencial inercial com origem em O' e vetor posição \vec{r} no referencial girante com origem em O . \vec{R} é o vetor posição da origem do referencial girante em relação ao referencial inercial.

de modo que, usando a Equação (9.14),

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.18)$$

ou, numa notação óbvia,

$$\vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.19)$$

Esta é a relação procurada entre as velocidades no sistema inercial fixo e no sistema girante.

Para encontrar a relação entre as acelerações, derivamos a Equação (9.18) mais uma vez em relação ao tempo. Encontramos,

$$\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)_f = \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_f + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r\right)_f + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_f \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_f \quad (9.20)$$

Usando as Equações (9.14) e (9.15), podemos escrever

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_f = \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_f + \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.21)$$

Assim, para um observador no sistema de coordenadas girante, a força efetiva \vec{F}_r sobre uma partícula de massa m é dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &\equiv m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_r \\ &= \vec{F} - m \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_f - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (9.22)$$

O primeiro termo \vec{F} é a soma das forças atuando sobre a partícula, medida no referencial inercial fixo. Essa força resultante pode ser relacionada com a interação da partícula com sua vizinhança. Já os outros termos aparecem devido ao fato de o movimento estar sendo observado de um referencial não inercial. Note que todos eles são proporcionais à massa inercial da partícula e por isso são chamados *forças inerciais*. O termo $-m\ddot{\vec{R}}_f$ vem da aceleração da origem do sistema girante em relação ao sistema original inercial. O termo $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, chamado *força de Coriolis*, se anula a menos que a partícula se mova no referencial girante ao longo de uma direção diferente daquela de $\vec{\omega}$. Em contraste, a *força centrífuga* $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ atua mesmo numa partícula estacionária. Finalmente, a contribuição $-m(d\vec{\omega}/dt) \times \vec{r}$, chamada *força de Euler*, ocorre somente para um referencial com aceleração angular.

MOVIMENTO PRÓXIMO À SUPERFÍCIE DA TERRA

Vamos agora aplicar a Equação (9.22) ao movimento de uma partícula visto por um observador num sistema de coordenadas em repouso em relação à Terra. O movimento da Terra tem duas componentes principais:

(i) um movimento anual numa trajetória aproximadamente circular em torno do Sol de raio $R_{ST} = 1 \text{ UA}$ ($\text{UA} \approx 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$), período $\tau_{ST} \approx 3,16 \times 10^7 \text{ s}$ e frequência angular

$$\omega_{ST} = \frac{2\pi}{\tau_{ST}} \approx 1,99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

(ii) uma rotação diária em torno da direção da estrela do pólo norte, raio equatorial $R_T \approx 6,38 \times 10^6 \text{ m}$, período $\tau_T \approx 8,62 \times 10^4 \text{ s}$ e frequência angular

$$\omega_T = \frac{2\pi}{\tau_T} \approx 7,29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Vamos considerar um referencial inercial fixo no centro do Sol e um referencial fixo na Terra com origem no centro da Terra. (Você pode argumentar que um referencial fixo no Sol não é inercial, porque o Sol descreve um movimento orbital em torno do centro da nossa galáxia, a Via Láctea. No entanto, o período deste movimento é de 226 milhões de anos, ou um Ano Cósmico, e a frequência angular correspondente é igual ao valor de ω_{ST} dividido por $2,26 \times 10^8$). O referencial fixo na Terra tem uma velocidade angular $\vec{\omega}_{ST} + \vec{\omega}_T$ que podemos tomar como constante, desprezando assim o termo contendo $d\vec{\omega}/dt$ na Equação (9.22). (Na verdade, $\vec{\omega}_T$ não é constante, devido à precessão dos equinócios, um movimento muito lento do eixo de rotação da Terra com um período de cerca de 25 mil anos). A Equação (9.22) então fica

$$m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_T = \vec{F} - m \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_S - 2m(\vec{\omega}_{ST} + \vec{\omega}_T) \times \vec{v} - m(\vec{\omega}_{ST} + \vec{\omega}_T) \times [(\vec{\omega}_{ST} + \vec{\omega}_T) \times \vec{r}] \quad (9.23)$$

onde \vec{F} inclui a força gravitacional do Sol, a força gravitacional da Terra e qualquer outra força que possa estar atuando sobre a partícula considerada. Podemos, ainda em relação à Equação (9.22), observar que:

(i) como $M_T \approx 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ e $M_S \approx 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, temos que o campo gravitacional da Terra na sua superfície excede o campo gravitacional do Sol por um fator

$$(M_T / M_S)(R_S / R_T)^2 \approx 1,66 \times 10^3$$

(ii) no centro da Terra, a força gravitacional do Sol precisamente cancela a contribuição $m \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_S$

(iii) os efeitos da rotação da Terra em torno do Sol são de ordem $\omega_{ST} / \omega_T \approx 2,73 \times 10^{-3}$ em relação aos efeitos provocados pela rotação em torno do eixo.

Deste modo, podemos escrever a seguinte equação de movimento aproximada para partículas movendo-se próximo da superfície da Terra:

$$m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_T = \vec{F}_g + \vec{F}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.24)$$

Aqui, $\vec{\omega} \approx \vec{\omega}_T$, \vec{r} é medido a partir do centro da Terra, \vec{F}_g é a força gravitacional devida à Terra e \vec{F}' são outras forças sobre a partícula. Por simplicidade, vamos considerar a Terra como sendo uma esfera uniforme, o que dá para

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^3} \vec{r} \quad (9.25)$$

A DIREÇÃO VERTICAL

O que nós chamamos usualmente de "direção vertical" é a direção de um fio de prumo. Vamos aplicar a Equação (9.24) a um fio de prumo estacionário em relação à Terra. Como o fio de prumo está parado, sua velocidade e sua aceleração são iguais a zero, e a Equação (9.24) fica

$$0 = -\frac{GM_T m}{r^3} \vec{r} + \vec{F}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.26)$$

ou

$$\vec{F}' + m\vec{g}_e = 0 \quad (9.27)$$

onde

$$\vec{g}_e = -\frac{GM_T}{r^3}\vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.28)$$

Portanto, a direção do fio de prumo é a direção do g efetivo, \vec{g}_e , que é a soma da aceleração gravitacional, $\vec{g} = -(GM_T/r^2)\hat{r}$, na direção radial para dentro $-\hat{r}$, mais a aceleração centrífuga $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, na direção equatorial para fora, perpendicular a $\vec{\omega}$ (veja a Figura 9.7). Para ter uma idéia dos valores numéricos, $g = GM_T/R_T^2 \approx 9,8 m/s^2$ e $\omega^2 R_T \approx 3,39 \times 10^{-2} m/s^2$. A contribuição da aceleração centrífuga é pequena, porém significativa. Quando a Terra se solidificou, foi essa aceleração que provocou a pequena deformação quadrupolar observada na sua forma atual.

Para concluir, podemos escrever \vec{g}_e em coordenadas polares como

$$\vec{g}_e = -(GM_T R_T^{-2} - \omega^2 R_T \sin^2 \theta) \hat{r} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \omega^2 R_T \hat{\theta} \quad (9.29)$$

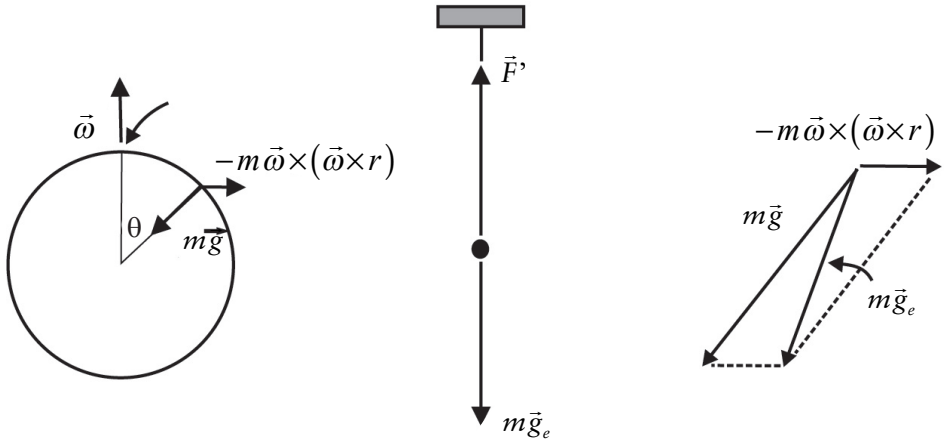


Figura 9.7: O que determinamos com o fio de prumo como sendo a direção vertical é, na verdade, a direção do vetor resultante da soma da força gravitacional mais a força centrífuga. O desenho no centro ilustra o fio de prumo em equilíbrio.

QUEDA LIVRE

Consideremos uma partícula de massa m em queda livre e vamos desprezar a resistência do ar. Neste caso, $\vec{F}' = 0$ e, usando a Equação (9.28), podemos escrever a Equação (9.24) como

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (9.30)$$

Como esta equação vetorial depende somente de $\dot{\vec{r}}$ e $\ddot{\vec{r}}$, ela pode ser resolvida em qualquer referencial fixo na Terra que seja mais conveniente. Vamos escolher o referencial indicado na **Figura 9.8**. Nele, o vetor unitário \hat{i} aponta para o sul, \hat{j} para o leste e \hat{k} para cima. Como vimos, \hat{k} não está exatamente na direção vertical (a direção local do fio de prumo) devido à aceleração centrífuga. Mas este efeito é de segunda ordem em ω e desprezível para o presente problema. Assim, vamos fazer $\vec{g}_e \approx \vec{g} = -g\hat{k}$ e reter somente termos lineares em ω .

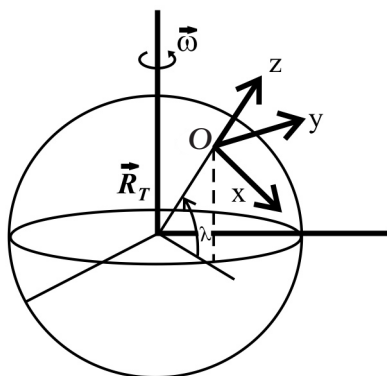


Figura 9.8: Referencial fixo na Terra.

Seja $\vec{r}(0) = h\hat{k}$ a posição inicial da partícula e seja $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}(0) = 0$. Como queremos reter somente termos lineares em ω , vamos escrever a solução do nosso problema como $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t)$, onde $\vec{r}_0(t)$ descreve a trajetória numa Terra que não estivesse girando e $\vec{r}_1(t)$ incorpora as pequenas correções proporcionais a ω . É evidente que $\vec{r}_0(t)$ satisfaz a equação

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{g} = -g\hat{k} \quad (9.31)$$

que integrando dá

$$\vec{r}_0(t) = (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{k} \quad (9.32)$$

Substituindo $\vec{r}_0 + \vec{r}_1$ na Equação (9.30) e expandindo até primeira ordem em ω , obtemos

$$\ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_0 \quad (9.33)$$

Mas, da Equação (9.31), vemos que o termo de ordem zero na Equação (9.33) se cancela identicamente, deixando a seguinte equação não homogênea:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -2\vec{\omega} \times \vec{g}t \quad (9.34)$$

A solução desta equação com a condição inicial $\vec{r}_1(0) = \dot{\vec{r}}_1(0) = 0$ é

$$\vec{r}_1(t) = -\frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}t^3 = \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\theta \hat{j} \quad (9.35)$$

onde o ângulo polar $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ é a co-latitute. Juntando as Equações (9.32) e (9.35), temos, para a trajetória total

$$\vec{r}(t) = (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{k} + \frac{1}{3}g\omega t^3 \sin\theta \hat{j} \quad (9.36)$$

Esta equação mostra que o efeito da força de Coriolis é desviar a partícula para o leste, tanto no hemisfério norte quanto no hemisfério sul. Note que o movimento vertical é independente de ω em primeira ordem, com o tempo de queda dado por $t_0 = (2h/g)^{1/2}$. Desse modo, uma partícula caindo de uma altura h terá sua trajetória desviada para o leste de

$$d = \frac{1}{3}g\omega t_0^3 \sin\theta = \frac{1}{3}g\omega (2h/g)^{3/2} \sin\theta \quad (9.37)$$

O desvio se anula nos pólos e é máximo no equador. Se $h = 100m$, então $t_0 \approx 4,5s$ e o desvio no equador é $d = 2,2\text{ cm}$.

EFEITOS DA FORÇA DE CORIOLIS SOBRE O MOVIMENTO HORIZONTAL

Considere uma partícula na co-latidade θ , movendo-se com uma velocidade horizontal \vec{v} que faz um ângulo ϕ com o eixo dos x no sistema de referência da **Figura 9.8**. Mais especificamente, neste referencial temos $\vec{v} = v(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$ e $\vec{\omega} = \omega(\cos\theta\hat{k} - \sin\theta\hat{i})$. Efetuando o produto vetorial destes dois vetores, encontramos, para a força de Coriolis

$$\begin{aligned} F_{\text{coriolis}} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= 2m\omega v (\cos\theta \sin\phi\hat{i} - \cos\theta \cos\phi\hat{j} + \sin\theta \sin\phi\hat{k}) \end{aligned} \quad (9.38)$$

Como um exemplo de aplicação desse resultado, uma partícula movendo-se para o norte ($\phi = \pi$) no hemisfério sul ($\cos\theta < 0$) vai sofrer uma força para o oeste, enquanto uma partícula, movendo-se para o sul ($\phi = 0$) no hemisfério sul, vai experimentar uma força para o leste. Embora a força de Coriolis seja pequena (é proporcional a ω), seus efeitos em escalas maiores são muito importantes. Assim, em cálculos precisos de trajetórias balísticas, ela deve ser incluída. Ela é responsável por muitos aspectos do movimento da atmosfera e dos oceanos e, portanto, nosso clima e tempo dependem dela. Veja, por exemplo, a famosa corrente do Golfo no hemisfério norte, que flui no sentido dos ponteiros do relógio quando observada de cima.

Finalmente, consideremos uma região atmosférica de baixa pressão no hemisfério sul. A massa de ar resultante que flui para dentro da região sofre uma força de Coriolis, impelindo-a num movimento no sentido dos ponteiros do relógio quando vista de cima.

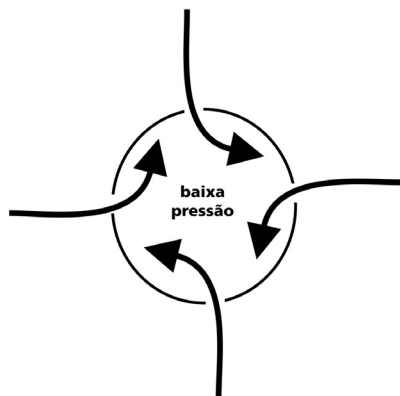


Figura 9.9: Ciclones e furacões no hemisfério sul.

Agora você já sabe, usando somente argumentos físicos, como identificar o Catarina na **Figura 9.1**.

O PÊNDULO DE FOUCAULT

Os pequenos efeitos da força de Coriolis podem também se tornar apreciáveis se o movimento persistir por um tempo longo. A demonstração clássica dessa afirmação é o pêndulo de Foucault. Trata-se de um pêndulo muito longo, livre para oscilar em qualquer direção horizontal. À medida que o pêndulo oscila, seu plano de oscilação executa um movimento de precessão. A taxa de precessão é igual à componente vertical da velocidade angular da Terra, ou seja, é igual à velocidade angular da Terra multiplicada pelo seno da latitude local. Em 1851, o cientista francês Jean-Bernard-Leon Foucault, idealizador do pêndulo, usou um fio de aço de 67 metros para suspender uma bola de ferro de 28 quilos do domo do Panthéon, em Paris.

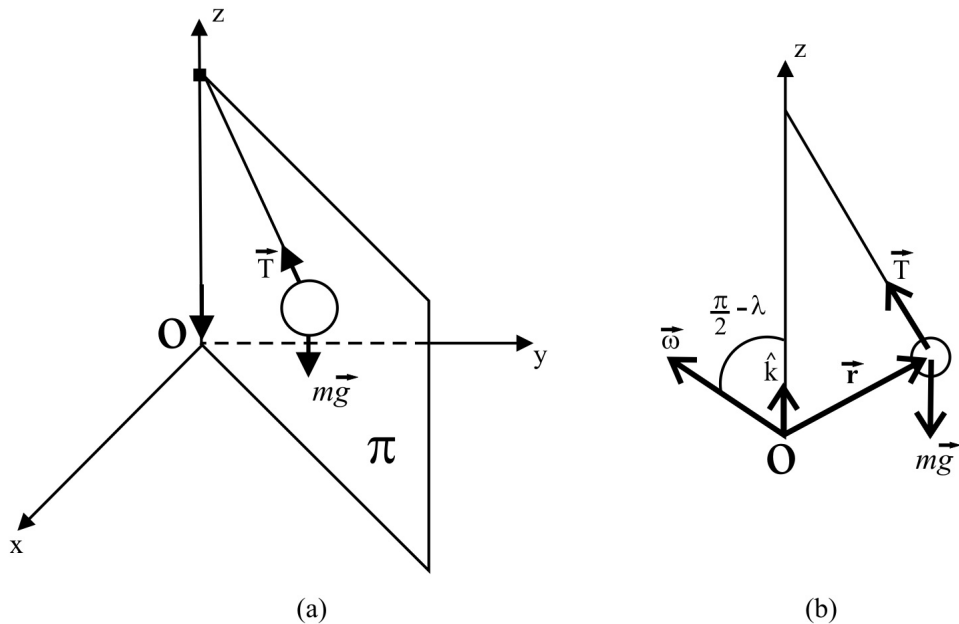


Figura 9.10: (a) Plano Π definido pelos vetores \vec{T} e \vec{g} ; (b) diagrama mostrando os vetores envolvidos no problema.

Agora vamos considerar o movimento de um pêndulo, de comprimento l e massa m , no sistema girante fixo na Terra. Referindo-se à Equação (9.24), a equação do movimento do pêndulo é dada por

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_T = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_T \quad (9.39)$$

onde \vec{T} é a tensão na corda. Estamos na Equação (9.39), considerando $\vec{g}_e \approx \vec{g}$. Note que os dois vetores \vec{g} e \vec{T} definem o plano Π no qual o pêndulo se moveria na ausência da aceleração de Coriolis $-2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$. A força de Coriolis tem uma componente na direção perpendicular ao plano Π que, mesmo sendo pequena, muda a natureza do movimento, já que seu efeito não é contrabalançado por nenhuma outra força.

Vamos determinar a velocidade angular de precessão do plano do pêndulo por meio do seguinte artifício: tentaremos encontrar um novo referencial girando em torno do eixo vertical que passa pelo ponto de suporte do pêndulo com uma velocidade angular Ω escolhida de tal modo que a componente da força de Coriolis que causa a precessão seja nula, ou seja, nesse novo referencial, um observador apenas vê o pêndulo executar o movimento de vaivém no plano vertical. Aplicando a Equação (9.14), temos

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_T = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega + \Omega \hat{k} \times \vec{r} \quad (9.40)$$

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_T = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_\Omega + \Omega^2 \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) + 2\Omega \hat{k} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega \quad (9.41)$$

onde $(d\vec{r}/dt)_\Omega$ representa a derivada temporal em relação ao novo referencial. Substituindo esses resultados na Equação (9.39), ficamos com

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_\Omega &= \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega + \Omega \hat{k} \times \vec{r} \right] - \Omega^2 \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) - 2\Omega \hat{k} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega \\ &= \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\Omega \vec{\omega} \times (\hat{k} \times \vec{r}) - \Omega^2 \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) - 2(\vec{\omega} + \Omega \hat{k}) \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega \end{aligned} \quad (9.42)$$

Finalmente, usando a identidade vetorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, reescrevemos esta equação como

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_\Omega &= \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - (2\Omega \vec{\omega} \cdot \vec{r} + \Omega^2 \hat{k} \cdot \vec{r}) \hat{k} + \\ &\quad (2\Omega \hat{k} \cdot \vec{\omega} + \Omega^2) \vec{r} - 2(\vec{\omega} + \Omega \hat{k}) \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\Omega \end{aligned} \quad (9.43)$$

Cada vetor do lado direito da Equação (9.43) está no plano Π , exceto o último termo. Para pequenas oscilações, $(d\vec{r}/dt)_\Omega$ é

praticamente horizontal. Assim, podemos fazer com que o último termo também seja um vetor no plano vertical Π exigindo que o vetor $\vec{\omega} + \hat{k}\Omega$ seja horizontal, ou seja, exigindo que

$$\hat{k} \cdot (\vec{\omega} + \hat{k}\Omega) = 0 \quad (9.44)$$

Isto determina o valor de Ω :

$$\Omega = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \omega \sin\lambda \quad (9.45)$$

Qual seria a frequência angular de precessão de um pêndulo de Foucault no Rio de Janeiro?

RESUMO

Uma rotação finita, embora tenha módulo, direção e sentido, não pode ser representada por um vetor porque a adição de duas rotações finitas não é comutativa. Já a adição de rotações infinitesimais é comutativa, e estas são vetores. Como consequência, a velocidade angular também é um vetor.

A segunda lei de Newton, para um observador em um referencial não inercial cuja origem está acelerada em relação a um referencial inercial e que também gira com velocidade instantânea ω em relação ao mesmo referencial inercial, tem a forma complicada

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &\equiv m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_r \\ &= \vec{F} - m \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_f - m \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m \vec{\omega} \times \vec{v} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

\vec{F} é a resultante das forças oriundas das interações da partícula de massa m com sua vizinhança. Os outros termos, todos proporcionais a m , são as chamadas forças inerciais: o termo $-m \ddot{\vec{R}}_f$ vem da aceleração da origem do sistema girante em relação ao sistema original inercial. O termo $-2m \vec{\omega} \times \vec{v}$, chamado *força de Coriolis*, se anula a menos que a partícula se mova no referencial girante ao longo de uma direção diferente daquela de $\vec{\omega}$. Em contraste, a *força centrífuga* $-m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ atua mesmo numa partícula estacionária. Finalmente, a contribuição $-m(d\vec{\omega}/dt) \times \vec{r}$, chamada *força de Euler*, ocorre somente para um referencial com aceleração angular.

A Terra é um referencial não inercial, principalmente em virtude do seu movimento de rotação. Embora a aceleração centrífuga e a aceleração de Coriolis sejam pequenas em comparação com a aceleração gravitacional, seus efeitos em movimentos de longa duração ou de grande escala são consideráveis.

PROBLEMAS

9.1. Mostre que a força centrífuga $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ numa co-latidade (ângulo polar) θ pode ser escrita como

$$-m\vec{\nabla} V_c,$$

onde V_c é o potencial

$$V_c = -\frac{1}{2}|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

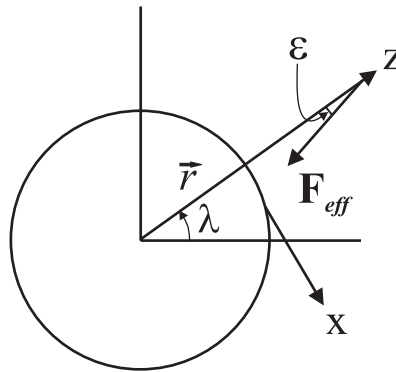
9.2. Um canhão está localizado na superfície da Terra na co-latidade θ (ângulo polar) e apontando para o leste.

(a) Se o cano do canhão faz um ângulo α com a horizontal, mostre que a deflexão lateral de um projétil, quando ele atinge o solo, é $(4v_0^3/g^2)\omega \cos \theta \sin^2 \alpha \cos \alpha$, onde v_0 é a velocidade inicial do projétil e ω é a velocidade angular da Terra. Qual é a direção dessa deflexão?

(b) Se R é o alcance do projétil para o caso $\omega = 0$, mostre que a mudança no alcance é dada por $(2R^3/g)^{1/2} \omega \sin \theta [(\cot \alpha)^{1/2} - (1/3)(\tan \alpha)^{3/2}]$. Despreze termos de ordem ω^2 .

9.3. Mostre que o pequeno desvio angular ε de um fio de prumo da verdadeira vertical (isto é, em direção ao centro da Terra) num ponto da Terra de latitude λ é

$$\varepsilon = \frac{R\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{g_0 - R\omega^2 \cos^2 \lambda}$$



onde R é o raio da Terra. Qual é o valor (em segundos de arco) do desvio máximo? (g_0 é o valor da aceleração gravitacional sem efeitos da rotação).

Dica: $\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_f - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

9.4. Um motorista está dirigindo seu carro, numa estrada reta, com aceleração a e velocidade instantânea v . Os pneus, de raio r_0 , não deslizam. Encontre o ponto no pneu que tem a maior aceleração relativa ao solo. Qual é essa aceleração?

9.5. Uma partícula é lançada verticalmente para cima e sobe até uma altura h num ponto da superfície da Terra de latitude norte λ . Mostre que a partícula cairá de volta num ponto

$$\frac{4}{3}\omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

a oeste do ponto de lançamento. Despreze a resistência do ar e considere $h \ll R_T$ (raio da Terra).

SOLUÇÕES

9.1. Fazendo $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, então temos, em coordenadas polares (com unitários \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$)

$$\vec{\omega} = \omega (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$$

e

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

Assim, $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \hat{\phi} \sin \theta$ e

$$\begin{aligned} -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \omega^2 r (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \times \hat{\phi} \sin \theta \\ &= m \omega^2 r (\sin^2 \theta \hat{r} + \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}) \end{aligned}$$

(Este é o caminho para chegar à Equação 9.29.)

O operador gradiente em coordenadas polares tem a forma

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Se $V_c = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$, então,

$$\begin{aligned} -m \vec{\nabla} V_c &= m \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \\ &= m \omega^2 r (\sin^2 \theta \hat{r} + \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}) \end{aligned}$$

9.2. A posição e a velocidade iniciais no referencial fixo na Terra (ver Figura 9.8) são:

$$\vec{r}(0) = 0$$

$$\vec{v}(0) = v_0 (\cos \alpha \hat{j} + \sin \alpha \hat{k})$$

Também, nesse referencial,

$$\vec{\omega} = \omega (\cos \theta \hat{k} - \sin \theta \hat{i})$$

Agora, como fizemos no texto da aula quando estudamos a queda livre, vamos escrever

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t)$$

onde $\vec{r}_0(t)$ descreve a trajetória numa Terra que não estivesse girando e $\vec{r}_1(t)$ incorpora as pequenas correções proporcionais a ω . É evidente que a trajetória não perturbada $\vec{r}_0(t)$ é dada por

$$\vec{r}_0(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{k} + v_0 (\cos \alpha \hat{j} + \sin \alpha \hat{k}) t$$

O projétil retorna ao solo depois de um tempo $\tau_0 = 2v_0 \sin \alpha / g$.

A velocidade do projétil é

$$\dot{\vec{r}}_0 = -g t \hat{k} + v_0 (\cos \alpha \hat{j} + \sin \alpha \hat{k})$$

Usando a Equação (9.30), podemos escrever, mantendo somente termos lineares em ω ,

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_0 \\ &= -2\omega(\cos\theta\hat{k} - \sin\theta\hat{i}) \times (-gt\hat{k} + v_0(\cos\alpha\hat{j} + \sin\alpha\hat{k})) \\ &= -2\omega v_0 \cos\theta \cos\alpha \hat{k} \times \hat{j} + \omega \sin\theta(-gt\hat{i} \times \hat{k} + v_0(\cos\alpha\hat{i} \times \hat{j} + \sin\alpha\hat{i} \times \hat{k})) \\ &= 2\omega v_0 \cos\theta \cos\alpha \hat{i} + 2\omega gt \sin\theta \hat{j} + 2v_0 \omega \sin\theta \cos\alpha \hat{k} - 2v_0 \omega \sin\theta \sin\alpha \hat{j} \\ &= 2\omega \sin\theta(gt - v_0 \sin\alpha)\hat{j} + 2v_0 \omega \cos\alpha(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k})\end{aligned}$$

Portanto, o movimento lateral (perpendicular à velocidade inicial) é dado por

$$\ddot{x}_1 = 2v_0 \omega \cos\alpha \cos\theta \hat{i}$$

de onde, usando as condições iniciais do problema $x_1(0) = 0$ e $\dot{x}_1(0) = 0$, concluímos que

$$x_1(t) = v_0 \omega \cos\alpha \cos\theta t^2$$

e, assim, a deflexão lateral procurada é

$$\begin{aligned}x_1(\tau_0) &= v_0 \omega \cos\alpha \cos\theta \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2 \\ &= \frac{4v_0^3 \sin^2\alpha}{g^2} \omega \cos\alpha \cos\theta\end{aligned}$$

No hemisfério norte, o desvio é em direção ao sul, e no hemisfério sul, o desvio é para o norte, em direção ao equador.

(b) Agora queremos ver como a rotação da Terra modifica o alcance do canhão. O alcance, se a Terra não girasse, seria

$$R = v_0 \cos\alpha \tau_0 = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Da equação para $\ddot{\vec{r}}_1$ acima, temos que a aceleração na direção y devido à aceleração de Coriolis é

$$\ddot{y}_1 = 2\omega \sin\theta(gt - v_0 \sin\alpha)$$

Integrando com as condições iniciais $y_1(0) = 0$ e $\dot{y}_1(0) = 0$, obtemos a perturbação no movimento na direção y

$$y_1(t) = 2\omega \sin\theta \left(g \frac{t^3}{6} - v_0 \sin\alpha \frac{t^2}{2} \right)$$

No instante τ_0 em que o projétil toca o solo,

$$\begin{aligned} y_1(\tau_0) &= 2\omega \sin\theta \left(\frac{(2v_0 \sin\alpha)^3}{3g^2} - v_0 \sin\alpha \frac{(2v_0 \sin\alpha)^2}{g^2} \right) \\ &= -\frac{4}{3} \omega \frac{v_0^3}{g^2} \sin^3\alpha \sin\theta \end{aligned}$$

Temos ainda uma outra contribuição para a correção do alcance que vem da correção do tempo de queda. De fato, a equação para $\ddot{\vec{r}}_1$ tem uma componente na direção z . Incluindo essa correção, o movimento na direção z é

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0(t) + z_1(t) \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + v_0 \omega \cos\alpha \sin\theta t^2 \end{aligned}$$

Assim, o tempo corrigido que o projétil leva para voltar ao solo é

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g - 2v_0 \omega \cos\alpha \sin\theta} \approx \tau_0 \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos\alpha \sin\theta}{g} \right)$$

Essa correção no tempo de percurso introduz uma correção em y

$$\begin{aligned} \delta y &= (v_0 \cos\alpha)(\tau - \tau_0) \\ &= (v_0 \cos\alpha \tau_0) \left(\frac{2v_0 \omega \cos\alpha \sin\theta}{g} \right) \\ &= R \frac{2v_0 \omega \cos^2\alpha \sin\theta}{g} \end{aligned}$$

A variação no alcance é, então,

$$\begin{aligned} \Delta R &= y_0(\tau_0) + y_1(\tau_0) + \delta y_0 - R \\ &= -\frac{4}{3} \omega \frac{v_0^3}{g^2} \sin^3\alpha \sin\theta + R \frac{2v_0 \omega \cos^2\alpha \sin\theta}{g} \\ &= \frac{4v_0^3}{g^2} \omega \sin\alpha \sin\theta \left(\cos^2\alpha - \frac{1}{3} \sin^3\alpha \right) \end{aligned}$$

Usando que

$$v_0 = \sqrt{Rg/2\sin\alpha \cos\alpha}$$

encontramos, finalmente,

$$\Delta R = \omega \sin\theta \left(\frac{2R^3}{g} \right)^{1/2} [(\cot\alpha)^{1/2} - \frac{1}{3}(\tan\alpha)^{3/2}]$$

9.3. No sistema da figura a seguir, temos

$$\vec{r} = r\hat{k}$$

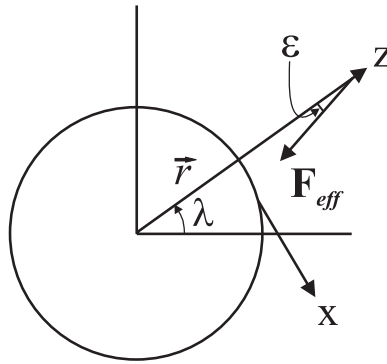
$$\vec{\omega} = \omega(-\cos\lambda\hat{i} + \sin\lambda\hat{k})$$

Assim,

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r(-\cos\lambda\hat{i} + \sin\lambda\hat{k}) \times \hat{k} = \omega r \cos\lambda\hat{j}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \omega^2 r \cos\lambda(-\cos\lambda\hat{i} + \sin\lambda\hat{k}) \times \hat{j} \\ &= -\omega^2 r \cos\lambda(\cos\lambda\hat{k} + \sin\lambda\hat{i})\end{aligned}$$



Substituindo esse resultado na expressão da força dada na dica do problema, ficamos com

$$F_{eff} = -m(g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda)\hat{k} - m\omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda\hat{i}$$

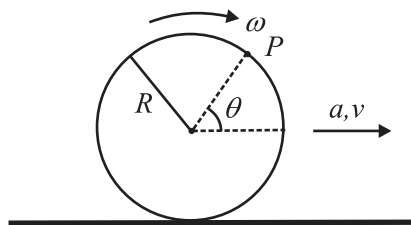
O termo de Coriolis não aparece porque a partícula está parada ($v_r = 0$).

A tangente do ângulo ε é dada pela razão $(F_{eff})_y / (F_{eff})_x$. Como o ângulo é pequeno, podemos fazer a tangente igual ao ângulo e, então,

$$\varepsilon = \frac{(F_{eff})_x}{(F_{eff})_z} = \frac{\omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda}{g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda}$$

que é o resultado procurado.

9.4. Queremos encontrar a aceleração total do ponto P na borda do pneu fazendo um ângulo θ com a direção do movimento.



Vamos aplicar a Equação (9.22). Dividindo todos os termos por m e passando os termos com sinal negativo para o lado esquerdo, ficamos com

$$\vec{a}_f = \ddot{\vec{R}}_f + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r,$$

onde \vec{a}_f é a aceleração no sistema de referência fixo no laboratório, $\ddot{\vec{R}}_f$ é a aceleração do centro do pneu no sistema de referência fixo no laboratório ($\ddot{\vec{R}}_f = a\hat{i}$), $\dot{\vec{\omega}}$ é a velocidade angular instantânea no sistema de referência fixo no laboratório, $\vec{\omega}$ é a aceleração angular ($|\dot{\vec{\omega}}| = \alpha = a/r$), é a aceleração do ponto P no sistema girante ($a_r = 0$) e v_r é a velocidade do ponto P no sistema girante.

$$\begin{aligned} \vec{a}_f &= a\hat{i} + (-\alpha\hat{k}) \times R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) + (-\omega\hat{k}) \times [(-\omega\hat{k}) \times R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})] \\ &= a\hat{i} - \alpha R(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + \omega^2 R\hat{k} \times (\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) \\ &= a\hat{i} - \alpha R(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) - \omega^2 R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \\ &= (a + \alpha R\sin\theta - \omega^2 R\cos\theta)\hat{i} - (\alpha R\cos\theta + \omega^2 R\sin\theta)\hat{j} \\ &= [a(1 + \sin\theta) - \frac{v^2}{R}\cos\theta]\hat{i} + [a\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta]\hat{j} \end{aligned}$$

O módulo de \vec{a}_f é

$$\begin{aligned} |\vec{a}_f|^2 &= [a(1 + \sin\theta) - \frac{v^2}{R}\cos\theta]^2 + [a\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta]^2 \\ &= 2a^2(1 + \sin\theta) + \frac{v^4}{R^2} - 2a\frac{v^2}{R}\cos\theta \end{aligned}$$

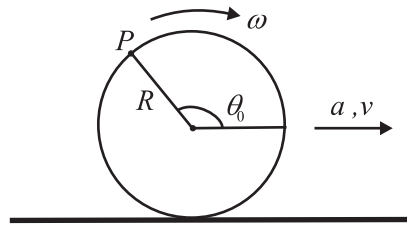
A maior aceleração relativa ao solo pode ser encontrada maximizando $|\vec{a}_f|^2$. Chamando de θ_0 o ângulo onde o máximo ocorre, temos

$$\left. \frac{d|\vec{a}_f|^2}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 2a^2 \cos \theta + 2 \frac{av^2}{R} \sin \theta = 0$$

o que dá

$$\tan \theta_0 = -\frac{aR}{v^2}$$

Nós queremos a solução correspondente ao segundo quadrante:



O que implica

$$\cos \theta_0 = -\frac{v^2}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}} \text{ e } \sin \theta_0 = \frac{aR}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}}$$

(Calcule a derivada segunda de $|\vec{a}_f|^2$ e verifique que esta é a solução que dá um máximo.) Substituindo esses resultados em \vec{a}_f , obtemos

$$\begin{aligned} \vec{a}_f^{\max} &= \left[a \left(1 + \frac{aR}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}} \right) - \frac{v^2}{R} \left(-\frac{v^2}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}} \right) \right] \hat{i} + \left[a \left(-\frac{v^2}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}} \right) + \frac{v^2}{R} \frac{aR}{\sqrt{(aR)^2 + v^4}} \right] \hat{j} \\ &= \left(a + a \frac{1}{\sqrt{1 + v^4/(aR)^2}} + a \frac{v^4/(aR)^2}{\sqrt{1 + v^4/(aR)^2}} \right) \hat{i} \\ &= a \left(1 + \sqrt{1 + v^4/(aR)^2} \right) \hat{i} \end{aligned}$$

A aceleração máxima é puramente horizontal.

9.5. Como antes, vamos considerar a velocidade do projétil na situação hipotética de que a Terra não estivesse girando

$$\vec{v}(t) = (v_0 - gt)\hat{k}$$

Com este resultado então calculamos a força de Coriolis

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Coriolis} &= -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \\ &\simeq -2m\omega(-\cos\lambda\hat{i} + \sin\lambda\hat{k}) \times (v_0 - gt)\hat{k} \\ &= -2m\omega(v_0 - gt)\cos\lambda\hat{j}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\ddot{y} = -2\omega\cos\lambda(v_0 - gt)$$

que, integrando com as condições iniciais $\dot{y}(0) = 0$ e $y(0) = 0$, obtemos

$$y = -2\omega\cos\lambda\left[\frac{1}{2}v_0t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right]$$

O projétil chega ao solo quando $t = 2v_0/g$ e $v_0 = \sqrt{2gh}$. O valor de y será

$$\begin{aligned}y &= -2\omega\cos\lambda\left[\frac{1}{2}v_0\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 - \frac{1}{6}g\left(\frac{2v_0}{g}\right)^3\right] \\ &= -\frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} = -\frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{(2gh)^{3/2}}{g^2}\end{aligned}$$

ou,

$$y = -\frac{4}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

para o oeste.

Colisões

AULA

10

Meta da aula

Estudar colisões elásticas e inelásticas entre duas partículas.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- deduzir as relações cinemáticas entre as configurações inicial e final na colisão elástica de duas partículas;
- encontrar a relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento para as interações consideradas no texto da aula e, a partir dela, obter a seção de choque diferencial;
- descrever as colisões tanto no sistema de centro de massa quanto no sistema de laboratório.

INTRODUÇÃO

Quando uma partícula é lançada contra outra e elas colidem, vários podem ser os resultados do processo de colisão. Se as partículas finais são as mesmas que as iniciais, chamamos o processo de *espalhamento*. O espalhamento é *elástico* se a energia cinética total das partículas é conservada. Caso contrário, o espalhamento é dito *inelástico*. Se as partículas finais são diferentes das iniciais, dependendo dos tipos de partícula e das energias envolvidas, o processo de colisão pode ser, por exemplo, uma reação nuclear ou uma reação química. Se tivermos várias partículas finais, o processo pode tratar-se, por exemplo, de uma reação de fragmentação ou de colisão de alta energia entre partículas elementares.

Aqui estaremos considerando somente os casos nos quais emergem duas partículas finais, iguais ou diferentes das iniciais. As “partículas” podem ser tanto corpos macroscópicos, como bolas de bilhar ou corpos celestes, ou, ainda, pertencer à escala atômica ou subatômica.

Em geral, quando falamos de uma colisão, em Física, estão implícitas as seguintes condições essenciais:

1. a interação é confinada, para todos os propósitos práticos, dentro de algum intervalo de tempo limitado, de modo que possamos dizer que ela tem um começo e um fim;
2. ao longo da duração da colisão, o efeito de quaisquer forças externas pode ser ignorado, de modo que o sistema se comporta como se estivesse isolado. Assim, falamos em *estado inicial* ou *configuração inicial* do sistema como sendo o estado das partículas antes da colisão, onde a interação entre elas é desprezível e elas se movem como partículas livres. O *estado final* ou *configuração final* é o estado depois da colisão quando as partículas já emergiram da região de interação e novamente se movem como partículas livres.

Quando duas partículas interagem, o movimento de uma relativa à outra é governado pela lei de força que descreve a interação. Essa interação pode resultar do contacto entre os dois objetos, como numa colisão de duas bolas de bilhar, ou pode ocorrer através da intermediação de um campo de força, como nos casos da interação gravitacional e da interação eletromagnética. Durante a interação, elas podem trocar energia e momento. Essa troca deve ser tal que o momento total e a energia total sejam conservados.

O problema fundamental da teoria das colisões consiste em obter a configuração final a partir da configuração inicial. Para isso, em princípio, é necessário conhecer as forças de interação entre as partículas. Em muitas situações, essas forças não são bem conhecidas e a análise dos resultados da colisão são usados para obter informação sobre as próprias interações.

Durante todo o século XX, as colisões foram o principal meio de obter informações sobre as interações entre as partículas atômicas e subatômicas. Tudo começou por volta de 1910, quando Lord Rutherford e seus estudantes, Geiger e Marsden, realizaram uma série de experiências sobre o espalhamento de partículas α por folhas metálicas finas. Essas experiências mostraram que a maior parte da massa de um átomo está concentrada num pequeno núcleo positivamente carregado. Estava descoberto o núcleo atômico. O mesmo tipo de experiência mostrou a existência da força nuclear. A partir daí, começaram a ser construídos os aceleradores de partículas até os gigantescos aceleradores de hoje que aceleram partículas atômicas e subatômicas até velocidades muito próximas da velocidade da luz. Quase todas as partículas elementares conhecidas foram descobertas por meio do estudo de colisões. Embora as colisões entre partículas elementares exijam mecânica quântica para seu correto tratamento, conceitos como referencial de momento zero, seção de choque diferencial e a aplicação das leis de conservação são semelhantes aos usados nesta aula.

O REFERENCIAL DE CENTRO DE MASSA

Considere um referencial inercial S e um outro referencial inercial S' movendo-se com velocidade \vec{u} em relação a S .

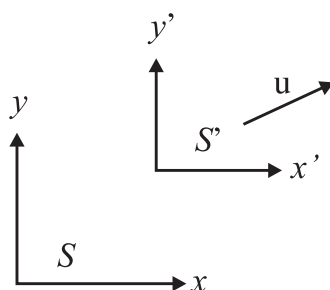


Figura 10.1: O referencial S' movendo-se com velocidade constante \vec{u} em relação ao referencial inercial S .

Dado um sistema de partículas, a velocidade da i -ésima partícula em S está relacionada com sua velocidade em S' como segue:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{u} \quad (10.1)$$

É fácil observar que se o momento é conservado numa colisão no referencial S' , ele também é conservado no referencial S . Isto é verdade, porque tanto o momento inicial quanto o momento final em S , são acrescidos da mesma quantidade $(\sum m_i)\vec{u}$, comparados com seus respectivos valores em S' .

Seja $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$ o momento total do sistema de partículas no referencial S . Então, podemos considerar um referencial S' movendo-se em relação a S com a velocidade \vec{u} dada por

$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (10.2)$$

onde $M = \sum m_i$ é a massa total do sistema. Usando a Equação (10.1), vemos que nesse referencial o momento total do sistema de partículas é zero:

$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \sum m_i \vec{v}_i' \\ &= \sum m_i \left(\vec{v}_i - \frac{\vec{P}}{M} \right) \\ &= \vec{P} - \vec{P} = 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

O referencial no qual o momento total de um sistema de partículas é zero é chamado *referencial de centro de massa*, ou referencial do CM. No referencial do CM, o centro de massa do sistema de partículas está parado. De fato, a posição do CM em S é dada por

$$R_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (10.4)$$

e, logo, o centro de massa move-se em S com a mesma velocidade que S' , $\vec{V}_{CM} = \dot{R}_{CM} = \vec{u}$. Podemos, então, tomar a origem do referencial de centro de massa no próprio centro de massa do sistema de partículas.

O referencial do CM é muito útil. Nele, como teremos oportunidade de ver em alguns exemplos, processos físicos são mais simétricos e os resultados mais transparentes.

Um outro referencial que as pessoas usam é o que chamamos *referencial de laboratório*, ou referencial do LAB, que é simplesmente um referencial inercial no qual as condições do problema são dadas. Se for mais fácil resolver o problema no referencial do CM, então isso envolve passar do referencial de laboratório para o CM e, no final, transformar o resultado de volta para o referencial de laboratório.

Exemplo 10.1. Uma massa m com velocidade v se aproxima de uma massa M estacionária (ver **Figura 10.2**). As massas colidem sem qualquer perda ou ganho de energia cinética. Quais são as velocidades finais das partículas? Suponha que todos os movimentos ocorrem em uma dimensão.



Figura 10.2: No referencial de LAB, partícula de massa m se aproxima de outra de massa M estacionária.

Solução: O momento total no laboratório é mv e, portanto, o referencial do CM se move para a direita no referencial de laboratório com velocidade $mv/(m+M) = u$. Assim, no referencial do CM, as velocidades das duas massas são

$$\begin{aligned} v'_m &= v - u = v - \frac{mv}{m+M} = \frac{Mv}{m+M} \\ v'_M &= -u = -\frac{mv}{m+M} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Note que a diferença entre as velocidades v'_m e v'_M é v e que a razão entre seus módulos é M/m , como exigido para que o momento total seja zero.

O ponto importante a compreender aqui é que, no referencial do CM, a única coisa que as partículas podem fazer ao colidirem é inverter suas velocidades (contanto que elas realmente se choquem). Isto porque os módulos de suas velocidades ainda devem estar na razão M/m após a colisão para que o momento total permaneça igual a zero. Portanto, se os módulos das velocidades pudessem mudar, ambos teriam de crescer

ou ambos teriam de diminuir. Mas se uma dessas coisas acontecesse, a energia cinética total não seria conservada.

Se agora passarmos de volta para o referencial do laboratório, adicionando $mv/(m+M)$ às novas velocidades $-Mv/(m+M)$ e $mv/(m+M)$, obtemos as velocidades finais no referencial de laboratório

$$\begin{aligned} v_m &= -\frac{Mv}{m+M} + u = \frac{(m-M)v}{m+M} \\ v_M &= \frac{mv}{m+M} + u = \frac{2mv}{m+M} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Casos particulares: (a) Se $m = M$, a partícula que incide com velocidade v fica parada após a colisão e a partícula que estava parada sai com velocidade v . (b) Se $M \gg m$, a partícula incidente bate e volta com a mesma velocidade e a partícula de massa M praticamente não se move. (c) Se $m \gg M$, então, $v_m \approx v$ e $v_M \approx 2v$.

COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS

No exemplo anterior, temos um tipo de colisão que é chamada elástica. Uma colisão é *elástica* quando não há nenhuma perda de *energia cinética translacional*. Assim, não somente nenhuma energia cinética translacional pode degradar-se em calor, como também nenhuma parte pode ser convertida em energia cinética rotacional ou energia vibracional. Para resolver qualquer problema de colisão elástica, tudo que precisamos fazer é escrever as equações de conservação da energia e do momento e resolvê-las para as variáveis que queremos encontrar.

Exemplo 10.2. Para ilustrar o procedimento geral, resolveremos novamente o problema do Exemplo 10.1 agora no sistema do LAB. Vamos usar aqui a seguinte notação: v_{01} e v_{02} são as velocidades iniciais das massas $m_1 = m$ e $m_2 = M$, respectivamente; v_1 e v_2 são as velocidades finais. Como $v_{01} = v$ e $v_{02} = 0$, as equações de conservação do momento e da energia são, respectivamente,

$$\begin{aligned} mv + 0 &= mv_1 + Mv_2 \\ \frac{1}{2}mv^2 + 0 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Devemos resolver estas duas equações para as duas incógnitas, v_1 e v_2 . Resolvendo a primeira equação para v_1 e substituindo na segunda, obtemos

$$mv^2 = mv_1^2 + M \frac{m^2(v - v_1)^2}{M^2} \quad (10.8)$$

$$\Rightarrow 0 = ((m + M)v_1 - (m - M)v)(v_1 - v)$$

Há duas soluções possíveis. Uma solução é $v_1 = v$, mas não é a que estamos procurando. Ela corresponde à situação em que não há colisão. A solução que procuramos é

$$v_1 = \frac{(m - M)v}{m + M} \quad (10.9)$$

Substituindo a Equação (10.9) na equação de conservação do momento, obtemos para a velocidade da partícula de massa M

$$v_2 = \frac{2mv}{m + M} \quad (10.10)$$

Esses resultados estão em acordo com os obtidos no exemplo anterior. Note, porém, que é muito mais simples resolver o problema trabalhando no referencial do CM.

Exemplo 10.3. Mostre que, numa colisão unidimensional, a velocidade relativa de duas partículas após a colisão é o negativo da velocidade relativa antes da colisão.

Solução: sejam m_1 e m_2 as massas das partículas, v_{01} e v_{02} suas velocidades iniciais e v_1 e v_2 as velocidades finais. Da conservação do momento e da energia, temos

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (10.11)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Rearranjando essas equações, podemos escrever

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_2 - v_{02}) \quad (10.12)$$

$$m_1(v_{01}^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_{02}^2) \quad (10.13)$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, encontramos que $v_{01} + v_1 = v_{02} + v_2$. Portanto,

$$v_{01} - v_{02} = -(v_1 - v_2) \quad (10.14)$$

Note que as Equações (10.12) e (10.13) também admitem a solução $v_{01} = v_1$ e $v_{02} = v_2$. Mas esta é uma solução trivial que, como vimos, corresponde às partículas passarem uma pela outra sem interagir.

A solução geral da colisão elástica de duas partículas em uma dimensão pode ser obtida resolvendo as duas Equações (10.12) e (10.14) para v_1 e v_2 . Obtemos:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02} \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{01} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{02} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Vemos que as velocidades finais, neste caso, são inteiramente determinadas pelas velocidades iniciais e pela conservação do momento e da energia cinética, não dependendo da natureza das forças de interação (desde que correspondam a um processo elástico).

COLISÕES ELÁSTICAS BIDIMENSIONAIS

No tratamento de colisões em mais de uma dimensão, vamos nos restringir ao caso em que uma das partículas, que chamaremos de alvo, está em repouso. Este é o caso em muitas situações práticas. Além disso, não perdemos nada em generalidade, porque se o alvo estiver inicialmente se movendo, sempre poderemos fazer uma mudança para um referencial inercial se movendo com a velocidade do alvo e cair de volta na situação do alvo parado.

Antes de considerar o caso geral, vamos explorar uma colisão em que as partículas têm massas iguais ilustrando os diferentes modos de descrevê-la.

Exemplo 10.4. Uma bola de bilhar lisa, com velocidade v , incide sobre uma outra idêntica estacionária. As bolas colidem elasticamente de tal modo que a bola incidente é defletida de um ângulo ψ (ver Figura 10.3). Quais são as velocidades finais das bolas? Qual é o ângulo ϕ no qual a bola inicialmente estacionária é ejetada?

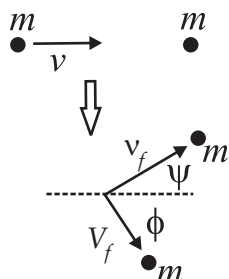


Figura 10.3: Configurações inicial e final da colisão elástica de duas massas iguais com a partícula incidente sendo defletida de um ângulo ψ .

Na Figura 10.4, esquematizamos, com mais detalhes, as bolas de bilhar em colisão. O parâmetro b é chamado *parâmetro de impacto*, ou parâmetro de choque. Se $b = 0$, a colisão será unidimensional. Agora, a interação entre duas esferas rígidas é uma interação de contacto e, portanto, se $b > 2R$, onde R é o raio das bolas, não há colisão. Quando afirmamos que o ângulo de deflexão é ψ , está implícito que $0 < b < 2R$.

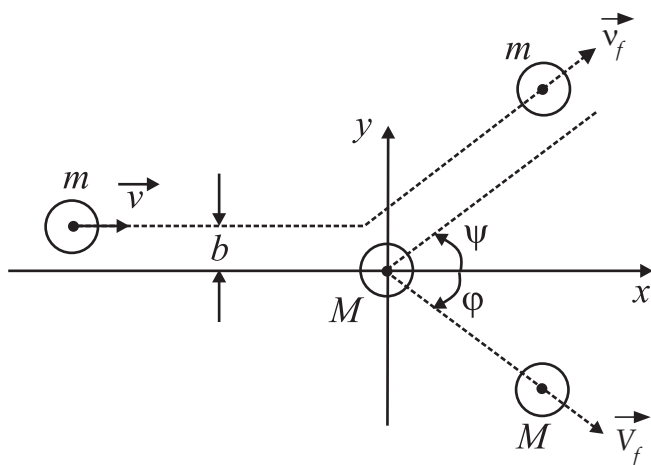


Figura 10.4: A mesma colisão da Figura 10.3, porém mostrando o parâmetro de impacto associado ao ângulo de deflexão ψ .

Aplicando a conservação do momento e da energia, temos

$$\begin{aligned}mv &= mv_f \cos\psi + mV_f \cos\phi \\mv_f \sin\psi &= mV_f \sin\phi \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mV_f^2\end{aligned}\tag{10.16}$$

Devemos resolver essas equações para as três incógnitas v_f , V_f e ϕ . Há várias maneiras de fazer isto. Aqui está uma: elimine ϕ adicionando os quadrados das duas primeiras equações (após passar $mv_f \cos\psi$ para o lado esquerdo) para obter

$$v^2 - 2vv_f \cos\psi + v_f^2 = V_f^2\tag{10.17}$$

Agora, da terceira equação em (10.16), temos

$$v^2 - v_f^2 = V_f^2\tag{10.18}$$

que, combinando com a Equação (10.17), diz que

$$v_f = v \cos\psi\tag{10.19}$$

A Equação (10.18) então requer que

$$V_f = v \sin\psi\tag{10.20}$$

Substituindo (10.19) e (10.20) na segunda Equação (10.16), obtemos

$$m(v \cos\psi) \sin\psi = m(v \sin\psi) \sin\phi$$

Esta relação implica que $\sin\phi = \cos\psi$, ou

$$\phi = 90^\circ - \psi\tag{10.21}$$

ou seja, as duas, após a colisão, se afastam uma da outra em ângulo reto.

Há um modo bem mais simples e elegante de obter esse último resultado. Basta escrever as equações de conservação na forma vetorial. Como as massas são iguais, temos

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_f + \vec{V}_f \\ v^2 &= v_f^2 + V_f^2\end{aligned}\quad (10.22)$$

Mas, da primeira equação temos que $v^2 = v_f^2 + 2\vec{v}_f \cdot \vec{V}_f + V_f^2$ e, comparando com a segunda, concluímos que

$$\vec{v}_f \cdot \vec{V}_f = 0 \Rightarrow \psi + \phi = 90^\circ \quad (10.23)$$

Vejamos, finalmente, como um observador no referencial do CM descreve a colisão. O centro de massa se move no referencial do laboratório com velocidade $\vec{u} = \vec{v}/2$, onde \vec{v} é o vetor velocidade inicial da partícula incidente. Então, as velocidades iniciais das partículas no CM são

$$\begin{aligned}\vec{v}_i' &= \vec{v} - \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{V}_i' &= 0 - \vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}\quad (10.24)$$

Como a energia cinética é conservada, as velocidades finais devem ter o mesmo módulo, e, pela conservação do momento, sentidos opostos. Assim, teremos uma situação como mostrada na **Figura 10.5**.

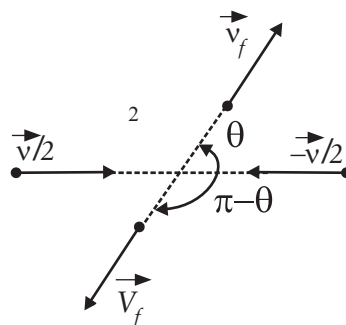


Figura 10.5: A colisão da **Figura 10.3** vista do referencial do centro de massa.

É fácil de ver que $\psi = \theta/2$ e que $\phi = (\pi - \theta)/2$ e logo, $\theta + \phi = \pi/2$ como havíamos concluído antes.

Passemos, agora, ao caso geral em que as partículas têm massas diferentes, a partícula de massa m tem velocidade inicial \vec{v} e a partícula de massa M está inicialmente em repouso.

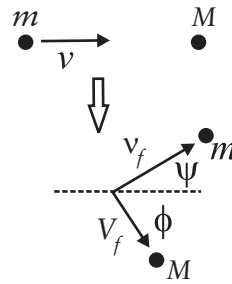


Figura 10.6: Configurações inicial e final da colisão de duas partículas de massas m e M .

Aplicando a conservação do momento e da energia temos de resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} mv &= mv_f \cos \psi + MV_f \cos \phi \\ mv_f \sin \psi &= MV_f \sin \phi \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 \end{aligned} \quad (10.25)$$

Note que, agora, temos três equações nas quatro incógnitas v_f, V_f, ψ e ϕ . A configuração inicial não determina completamente a configuração final.

Como deve ter ficado claro, é bem mais simples trabalhar no referencial do centro de massa. Neste referencial, as velocidades iniciais das partículas são

$$\begin{aligned} \vec{v}_i' &= \frac{M}{m+M} \vec{v} \\ \vec{V}_i' &= -\frac{m}{m+M} \vec{v} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Note que $m\vec{v}_i' + M\vec{V}_i' = 0$, como exigido pela conservação do momento. Já sabemos que, como a colisão é elástica, após a colisão o módulo da velocidade de cada partícula continua o mesmo mudando apenas a direção. Vamos chamar de \hat{n} o vetor unitário na direção de \vec{v}_f' . Assim, as velocidades finais no referencial do CM são

$$\begin{aligned} \vec{v}_f' &= \frac{M}{m+M} v \hat{n} \\ \vec{V}_f' &= -\frac{m}{m+M} v \hat{n} \end{aligned} \quad (10.27)$$

As velocidades após a colisão, no referencial do laboratório, são obtidas adicionando a essas expressões a velocidade do CM:

$$\vec{v}_f = \frac{M}{n+M} v \hat{n} + \frac{m}{m+M} \vec{v} \quad (10.28)$$

$$\vec{V}_f = -\frac{m}{m+M} v \hat{n} + \frac{m}{m+M} \vec{v} \quad (10.29)$$

Podemos interpretar graficamente os resultados obtidos. Para isso é interessante passar das velocidades para os momentos. Multiplicando a Equação (10.28) por m e a Equação (10.29) por M , obtemos

$$\vec{p}_f = \mu v \hat{n} + \frac{m}{m+M} \vec{p} = \mu v \hat{n} + \frac{m}{M} \mu \vec{v} \quad (10.30)$$

$$\vec{P}_f = -\mu v \hat{n} + \frac{M}{m+M} \vec{p} = -\mu v \hat{n} + \mu \vec{v} \quad (10.31)$$

onde $\mu = mM/(m+M)$ é a massa reduzida do sistema. Temos três casos a considerar: $m < M$, Figura 10.7; $m > M$, Figura 10.8; $m = M$, Figura 10.9.

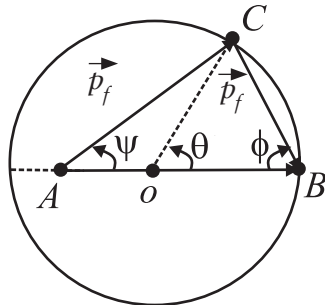


Figura 10.7: $m < M$. Círculo de raio μv com os vetores das Equações (10.30) e (10.31) representados. Note que $\overline{AO} = (m/M)\mu v > \overline{OB} = \mu v$.

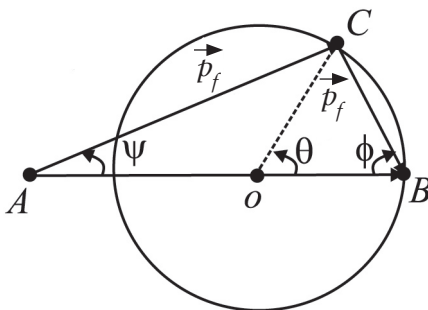


Figura 10.8: $m > M$. Neste caso, $\overline{AO} = (m/M)\mu v > \overline{OB} = \mu v$.

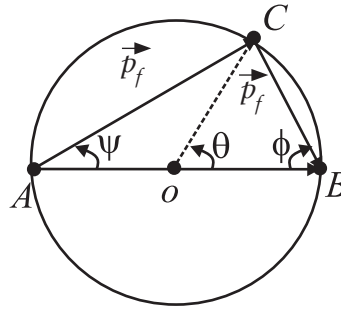


Figura 10.9: $m = M$ Aqui $\overline{AO} = \overline{OB}$.

É fácil mostrar a partir dos diagramas que os ângulos ψ e ϕ podem ser expressos em função do ângulo θ pelas fórmulas

$$\tan \psi = \frac{M \sin \theta}{m + M \cos \theta}, \quad \phi = \frac{\pi - \theta}{2} \quad (10.32)$$

As fórmulas dos módulos das velocidades das duas partículas, após o choque em função do mesmo ângulo de espalhamento θ , são:

$$v_f = \frac{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM \cos \theta}}{m + M} v \quad (10.33)$$

$$V_f = \frac{2mv}{m + M} \sin \frac{\theta}{2} \quad (10.34)$$

Note que, no caso da Figura 10.8, isto é, quando a massa da partícula incidente for maior que a massa da partícula alvo, existe um valor máximo do ângulo de espalhamento ψ . De fato, o ponto C deve estar sempre sobre o círculo e pode-se ver facilmente que o ângulo ψ passa por um máximo quando a direção de \vec{p}_f é tangente ao círculo (ver Figura 10.14 no problema P.4). Da Figura 10.14, vemos que

$$\sin \psi_{\text{máx}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AO}} = \frac{\mu v}{\frac{m}{M} \mu v} = \frac{M}{m} \quad (10.35)$$

ESPALHAMENTO POR UM CENTRO DE FORÇA

Até agora o que nós fizemos foi derivar relações entre o estado inicial e o estado final das partículas na colisão a partir das leis de conservação da energia e do momento. Porém, essas são somente relações cinemáticas entre as diversas quantidades envolvidas. Não tentamos prever o ângulo de espalhamento ou uma velocidade final. Note que, no referencial de laboratório, as leis de conservação fornecem somente três equações escalares nas quatro incógnitas (veja as três Equações (10.25) onde as incógnitas são v_f, V_f, ψ e ϕ). Para encontrar o resultado da colisão, é preciso resolver as equações do movimento para as partículas.

O problema fica mais claro no referencial do CM. Para determinar completamente o resultado da colisão, é preciso encontrar o ângulo θ e, para isso, precisamos conhecer a interação entre as partículas e determinar suas trajetórias. Nós já sabemos como resolver esse problema quando a força é central. Foi o tema da Aula 8. Lá mostramos que o problema de duas partículas interagindo pode ser reduzido ao problema de encontrar o movimento de uma única partícula de massa m (igual à massa reduzida do sistema) e vetor posição \vec{r} (igual ao vetor posição relativa), medido em relação a um centro de força fixo no centro de massa das partículas. Aqui vamos considerar somente forças centrais.

Como você já sabe, o movimento sob a ação de uma força central é plano e vamos chamar de r e ϕ as coordenadas polares da partícula, como fizemos na Aula 8. A equação da órbita $r(\phi)$ é dada pela Equação (8.25)

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{u^2 l^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (10.36)$$

onde $f(r) = -dV/dr$ e $l = mr^2\dot{\phi}$ é o momento angular.

Aqui, estamos interessados nas órbitas com energia total positiva, $E > 0$. No caso de um potencial $V(r)$ que varia com o inverso da distância, já vimos na Aula 8 que as órbitas são hiperbólicas. Nosso problema é resolver a Equação (10.36) quando a energia total e o momento angular da partícula são

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (10.37)$$

e

$$l = mvb \quad (10.38)$$

onde v é a velocidade da partícula a uma distância infinita do centro de força e b é o parâmetro de impacto. Uma vez encontrada a órbita, podemos achar a relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento $b(\theta)$. O ângulo de espalhamento é univocamente especificado pelo parâmetro de impacto se a lei de força for conhecida.

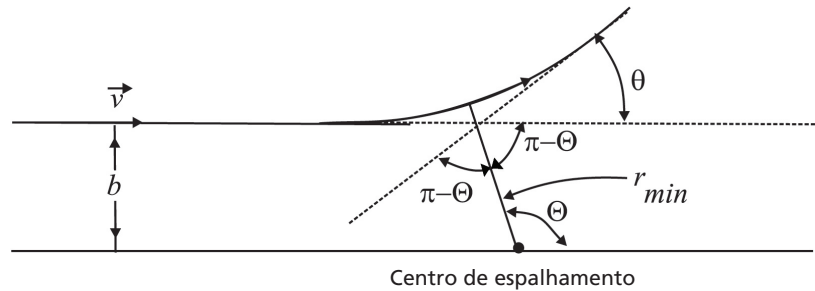


Figura 10.10: Espalhamento de uma partícula por um centro de força repulsiva. A partícula, a uma distância muito grande do centro de espalhamento, tem velocidade \vec{v} . O parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ estão indicados.

A SEÇÃO DE CHOQUE

Nas aplicações físicas, freqüentemente não tratamos com o desvio de uma partícula individual: no espalhamento de partículas atômicas ou nucleares, na verdade, nós nem sequer podemos escolher nem medir diretamente o parâmetro de impacto. Em tais situações, só podemos falar em termos da probabilidade de espalhamento nos vários ângulos θ .

Considere um feixe uniforme de partículas todas de mesma massa e mesma energia incidindo sobre um centro de força. A *intensidade* I do feixe incidente é definida como o número de partículas por unidade de tempo atravessando uma unidade de área normal ao feixe. O espalhamento é descrito por uma quantidade chamada *seção de choque diferencial de espalhamento*. A seção de choque diferencial, $\sigma(\theta)$, para espalhamento num dado ângulo sólido $d\Omega$ num ângulo particular θ , é definida por

$$\sigma(\theta) = \frac{\text{número de partículas espalhadas no ângulo sólido } d\Omega \text{ por unidade de tempo}}{\text{intensidade incidente}}$$

Se o espalhamento tiver simetria axial (como é o caso para forças centrais), podemos realizar a integração sobre o ângulo azimutal obtendo 2π , e então o elemento de ângulo sólido $d\Omega$ é dado por

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (10.39)$$

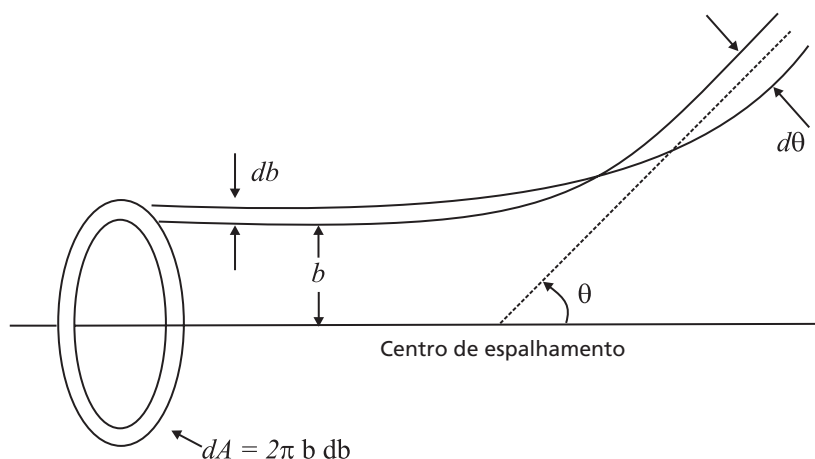


Figura 10.11: As partículas do feixe incidente que passam através do elemento de área entre b e $b + db$ são espalhadas no elemento de ângulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ na direção θ .

Figura 10.11 mostra que o número de partículas com parâmetros de impacto entre b e $b + db$ deve corresponder ao número de partículas espalhadas na faixa angular $d\theta$ no ângulo θ . Portanto,

$$I 2\pi b db = -I\sigma(\theta) 2\pi \sin\theta d\theta \quad (10.40)$$

onde $db/d\theta$ é negativo porque estamos supondo que a lei de força é tal que a quantidade de deflexão angular decresce monotonicamente com o aumento do parâmetro de impacto. Temos assim que

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (10.41)$$

Note que $\sigma(\theta)$ tem a dimensão de uma área, consistente com seu nome.

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD

Considere o espalhamento de partículas carregadas num campo de Coulomb. A energia potencial é

$$V(r) = \frac{k}{r} \quad (10.42)$$

onde $k = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$, sendo $k > 0$ (força repulsiva) se as cargas das partículas, q_1 e q_2 , forem de mesmo sinal, e $k < 0$ (força atrativa) se as cargas forem de sinais opostos. A Equação (10.36) então torna-se

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{mk}{l^2} \quad (10.43)$$

As condições iniciais são

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty \\ \frac{dr}{dt} &= -v \text{ quando } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (10.44)$$

A solução da Equação (10.43), você já sabe, pode ser escrita como

$$u = A \cos \phi + B \sin \phi - \frac{mk}{l^2} \quad (10.45)$$

Aplicando a primeira condição inicial,

$$u = \frac{1}{r} = 0 = A \cos 0 + B \sin 0 - \frac{mk}{l^2} \quad (10.46)$$

$$\Rightarrow A = \frac{mk}{l^2} \quad (10.47)$$

Para aplicar a segunda condição inicial, primeiro escrevemos

$$dr/dt = (dr/d\phi)(d\phi/dt) = (l/mr^2)(dr/d\phi) = -(l/m) du/d\phi \quad (10.48)$$

Assim,

$$\begin{aligned} -v &= -\frac{l}{m}(-A \sin 0 + B \cos 0) \\ \Rightarrow B &= \frac{mv}{l} = \frac{1}{b} \end{aligned} \quad (10.49)$$

Com esses resultados a equação da órbita fica

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{mv^2 b^2} (\cos \phi - 1) + \frac{1}{b} \sin \phi \quad (10.50)$$

Agora podemos usar a órbita para determinar o ângulo de espalhamento θ em função do parâmetro de impacto. A condição é

$$r \rightarrow \infty, \phi \rightarrow \pi - \theta \quad (10.51)$$

Aplicando esta condição à Equação (10.50), encontramos

$$\frac{k}{mv^2 b^2} (\cos(\pi - \theta) - 1) + \frac{1}{b} \sin(\pi - \theta) = 0 \quad (10.52)$$

ou,

$$\frac{k}{mv^2 b^2} (1 + \cos \theta) = \frac{1}{b} \sin \theta \quad (10.53)$$

Usando que $\cos \theta + 1 = 2 \cos^2(\theta/2)$ e $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$, temos finalmente

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{mv^2}{k} b \quad (10.54)$$

De posse da relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento, podemos agora calcular a seção de choque. Da Equação (10.54) tiramos que

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{k}{2mv^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (10.55)$$

Substituindo as Equações (10.54) e (10.55) na Equação (10.41), chegamos à famosa fórmula de Rutherford:

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{k}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (10.56)$$

Esta é a fórmula da seção de choque diferencial para espalhamento Coulomb deduzida em 1911, por Lord Rutherford e que foi verificada experimentalmente por Geiger e Marsden no espalhamento de partículas α por uma lâmina muito fina de ouro. Rutherford interpretou os resultados experimentais, inesperados pelas teorias da época, como sendo resultado do espalhamento das partículas α por núcleos onde estaria concentrada toda a carga positiva do átomo de ouro. Assim foi descoberto o núcleo atômico e teve início a física nuclear.

A fórmula de Rutherford não depende do sinal de k . Assim, a forma da distribuição de espalhamento vale tanto para a força atrativa quanto para a força repulsiva.

ESPALHAMENTO POR UMA ESFERA DURA

O cálculo da seção de choque é imediato uma vez que a relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento seja conhecida. Em geral, determinar esta relação é muito difícil, mas no problema que vamos tratar agora, ela pode ser deduzida a partir de considerações elementares.

Considere uma esfera dura de raio a com a qual um projétil colide elasticamente. A **Figura (10.12)** mostra um projétil com parâmetro de impacto $b < a$ e vemos que $b = a \sin \Theta$ e que $\theta = 2\Theta - \pi$. Consequentemente, achamos

$$b = a \cos \frac{1}{2} \theta \quad \text{para } b < a \quad (10.57)$$

e, claramente, $\theta = 0$ para $b > a$. Substituindo na Equação (10.41), obtemos

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} a^2 \quad (10.58)$$

A seção de choque diferencial (10.58) é independente do ângulo de espalhamento, ou seja, é isotrópica. Assim, partículas emergem uniformemente em todas as direções após serem espalhadas por uma esfera dura. Note que a seção de choque total para espalhamento por uma esfera dura é a área geométrica

$$\sigma_T = \int \sigma(\theta) d\Omega = \pi a^2 \quad (10.59)$$

porque todas as partículas incidentes naquela região são removidas do feixe incidente.

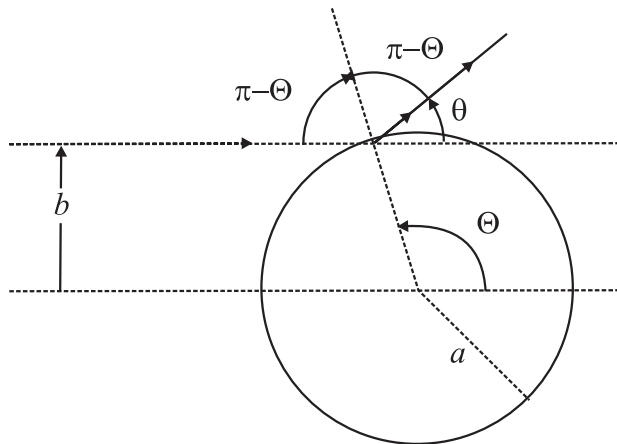


Figura 10.12: Espalhamento elástico por uma esfera dura.

COLISÕES INELÁSTICAS

Não vamos aqui tentar encontrar a seção de choque para um processo inelástico, pretendemos somente ilustrar com um exemplo as relações cinemáticas. O que caracteriza o processo inelástico é que pode haver um ganho ou perda resultante de energia cinética durante o processo. Assim, suponha uma colisão entre duas partículas de massas m_1 e m_2 que reagem para produzir partículas de massas m_3 e m_4 . Considerando a partícula m_2 inicialmente parada, e uma vez que a colisão é inelástica, a grandeza

$$Q = \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2 - \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 \quad (10.60)$$

é diferente de zero. Se $Q > 0$, parte da energia cinética inicial é perdida, convertendo-se em outra forma de energia, e o processo se diz *endoérgico*. Se $Q < 0$, há um ganho de energia cinética, e o processo é *exoérgico*.

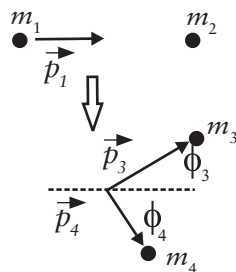


Figura 10.13: Colisão inelástica onde as partículas finais são diferentes das iniciais.

A conservação do momento, onde $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, é

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \quad (10.61)$$

Note que, confrontada com a situação da colisão elástica, temos agora uma incógnita adicional (Q), de modo que é preciso dar duas grandezas associadas à configuração final para que as leis de conservação do momento e da energia a definam. Suponha então que, numa experiência, a energia cinética da partícula de massa m_3 , K_3 , e o ângulo ϕ_3 são medidos. Da Equação (10.61),

$$p_4^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \phi_3 \quad (10.62)$$

Substituindo $p_i^2 = 2m_i K_i$ ($i = 1, 3, 4$) nesta equação, podemos escrever para a energia cinética da partícula 4:

$$K_4 = \frac{m_1}{m_4} K_1 + \frac{m_3}{m_4} K_3 - 2 \sqrt{\frac{m_1}{m_4} \frac{m_3}{m_4}} K_1 K_3 \cos \phi_3 \quad (10.63)$$

Substituindo este resultado na Equação (10.60), obtemos para o fator Q

$$Q = \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) K_3 - \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) K_1 - 2 \sqrt{\frac{m_1}{m_4} \frac{m_3}{m_4}} K_1 K_3 \cos \phi_3 \quad (10.64)$$

RESUMO

Uma colisão entre duas partículas é um processo em que uma é lançada contra a outra, podendo trocar energia e momento em consequência de sua interação. Quando as mesmas partículas emergem da região de interação, o processo é chamado de espalhamento. O espalhamento é elástico se a energia cinética final for igual à energia cinética inicial. No espalhamento elástico unidimensional, a configuração final é completamente determinada pela configuração inicial através das equações de conservação do momento e da energia cinética. No espalhamento bidimensional, a conservação do momento e da energia cinética fornecem somente três equações escalares (as Equações (10.25) nas quatro incógnitas, os módulos das velocidades finais e os ângulos que elas fazem com a direção

de incidência (v_f, V_f, ψ e ϕ nas Equações (10.25)). Assim, para determinar a configuração final numa colisão bidimensional, precisamos conhecer a interação entre as partículas e encontrar suas órbitas.

O parâmetro de impacto é a distância entre a linha de movimento inicial da partícula incidente e o alvo (ver **Figura 10.10**, por exemplo). Conhecendo-se a dependência do parâmetro de impacto no ângulo de espalhamento, podemos obter a seção de choque diferencial para o espalhamento elástico através da Equação (10.41). A seção de choque diferencial é uma área efetiva de choque e está relacionada com a probabilidade de que a partícula seja espalhada numa certa direção. A seção de choque diferencial de espalhamento elástico por uma esfera dura no referencial do CM é isotrópica. Para uma força que varia com o inverso do quadrado da distância, a distribuição angular de espalhamento é dada pela fórmula de Rutherford

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{k}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Quando as partículas que emergem da região de interação são diferentes das partículas incidentes, o processo é chamado de reação. Uma reação é necessariamente uma colisão inelástica. O fator Q da reação é igual à diferença entre a energia cinética final e a energia cinética inicial.

PROBLEMAS

P. 1. Numa colisão elástica frontal de duas partículas com massas m_1 e m_2 , as velocidades iniciais são v_{01} e $v_{02} = \lambda v_{01}$ ($\lambda > 0$). Se as energias cinéticas iniciais das duas partículas forem iguais no referencial de LAB, encontre as condições sobre v_{01} / v_{02} e m_1 / m_2 de modo que m_1 esteja em repouso após a colisão.

P. 2. Partículas de massa m_1 são espalhadas por partículas de massa m_2 em repouso. (a) Em que ângulo, no LAB, deve ser posicionado um espectrômetro magnético para detectar partículas que perdem um terço de seu momento? (b) Sobre que faixa de valores de m_1 / m_2 isto é possível? (c) Calcule o ângulo de espalhamento para $m_1 / m_2 = 1$.

P. 3. Um átomo de hidrogênio, movendo-se com velocidade v , colide elasticamente com uma molécula de hidrogênio em repouso, sofrendo uma deflexão de 45° . Calcule: (a) a magnitude da velocidade do átomo após a colisão; (b) a direção de movimento da molécula (com respeito à direção inicial de movimento do átomo) e a magnitude de sua velocidade.

P. 4. Qual é o ângulo máximo de espalhamento elástico de uma partícula alfa por um nêutron em repouso? (Massa da alfa aproximadamente igual a quatro vezes a massa do nêutron). Neste ângulo, que fração da energia cinética incidente vai para o nêutron de recuo, e qual é o ângulo entre a direção do recuo e a de incidência?

P. 5. Mostre que a relação entre o ângulo de espalhamento θ e o parâmetro de impacto b pode ser escrita como

$$\theta = |\pi - 2\Theta|$$

onde

$$\Theta = \int_0^{u_{\min}} \frac{du}{\sqrt{1 - V/E - b^2 u^2}}$$

Como na Aula 8, aqui $u = l/r$ e u_{\min} é o ponto de retorno clássico.

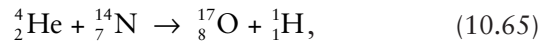
P. 6. A partir da relação geral entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento deduzida no problema anterior, encontre a seção de choque de espalhamento de Rutherford.

P. 7. Um feixe uniforme de partículas com energia E é espalhado por um potencial central repulsivo $V(r) = \gamma/r^2$. Mostre que a seção de choque diferencial elástica é dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{\gamma \pi^2}{E \sin \theta} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2}$$

P. 8. Considere uma reação de captura, na qual as partículas emergem "grudadas". Mostre que esse tipo de reação é sempre endoérgica.

P. 9. A reação



descoberta em 1919 por Rutherford, foi a primeira reação nuclear produzida artificialmente, que usou partículas α de 7,70 MeV de uma fonte radioativa. Os prótons (${}_1^1\text{H}$) emitidos a 90° com a direção das partículas α incidentes, têm energia cinética de 4,44 MeV. Determine o fator Q da reação.

SOLUÇÕES

P. 1. Como as energias cinéticas iniciais são iguais, nós temos

$$\frac{1}{2}m_1v_{01}^2 = \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}\lambda^2m_2v_{01}^2 \quad (10.66)$$

ou

$$\frac{m_1}{m_2} = \lambda^2 \quad (10.67)$$

Se m_1 está em repouso após a colisão, a conservação da energia requer que

$$\frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (10.68)$$

ou

$$m_1v_{01}^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (10.69)$$

onde v_2 é a velocidade final da partícula de massa m_2 após a colisão. A conservação do momento linear diz que

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + \lambda m_2)v_{01} = m_2v_2 \quad (10.70)$$

Substituindo v_2 da Equação (10.69) na Equação (10.68), obtemos

$$m_1v_{01}^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1 + \lambda m_2}{m_2}\right)^2v_{01}^2 \quad (10.71)$$

ou

$$m_1 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} + \lambda \right)^2 \quad (10.72)$$

Substituindo o valor de m_1/m_2 da Equação (10.67) nesta equação, temos

$$2\lambda^2 = (\lambda^2 + \lambda)^2 \quad (10.73)$$

A solução positiva desta equação é

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{2} - 1 = 0,414 \\ \lambda^2 &= 0,172 \end{aligned} \quad (10.74)$$

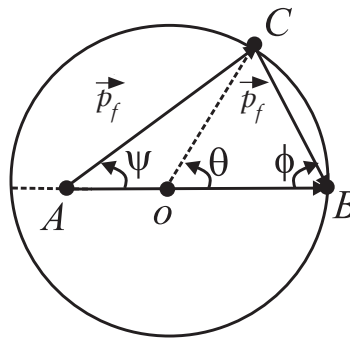
de modo que

$$\frac{m_1}{m_2} = 0,172 \text{ e } \frac{v_{02}}{v_{01}} = 0,414 \quad (10.75)$$

P. 2. Se uma partícula de massa m_1 e velocidade inicial v_{01} perde 1/3 de seu momento, então, sendo v_1 sua velocidade final,

$$m_1 v_1 = \frac{2}{3} m_1 v_{01} \Rightarrow v_1 = \frac{2}{3} v_{01} \quad (10.76)$$

(a) queremos encontrar o ângulo ψ onde saem, no laboratório, as partículas que perderam 1/3 do momento. Da **Figura 10.7**, reproduzida a seguir,



podemos escrever, lembrando que na notação usada no problema, $\vec{p}_f = m_1 \vec{v}_1$, $\overline{AO} = \frac{m_1}{m_2} \mu v_{01}$ e $\overline{OC} = \mu v_{01}$,

$$m_1^2 v_1^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \mu^2 v_{01}^2 + \mu^2 v_{01}^2 + 2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \mu^2 v_{01}^2 \cos \theta \quad (10.77)$$

onde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema. Desta equação tiramos que

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{v_{01}^2} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cos \theta \quad (10.78) \\ &= 1 - \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Usando o resultado da Equação (10.76) para v_1 / v_{01} , temos então que

$$\left(\frac{2}{3} \right)^2 = 1 - \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos \theta) \quad (10.79)$$

Esta equação pode ser resolvida para $\cos \theta$, dando

$$\cos \theta = 1 - \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1 m_2} = 1 - \eta \quad (10.80)$$

onde

$$\eta = \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1 m_2} \quad (10.81)$$

Mas nós queremos ψ , que pode ser obtido da Equação (10.32)

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1 / m_2} = \frac{\sqrt{2\eta - \eta^2}}{1 - \eta + m_1 / m_2} \quad (10.82)$$

(b) como $\tan \psi$ deve ser um número real, somente os valores de m_1 / m_2 tais que $2 - \eta \geq 0$ são possíveis. Portanto,

$$2 - \frac{5m_1 m_2}{18(m_1 + m_2)^2} \geq 0 \quad (10.83)$$

que pode ser reduzida a

$$-5 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 26 \left(\frac{m_1}{m_2} \right) - 5 \geq 0 \quad (10.84)$$

As soluções, quando essa equação é igual a zero, são $m_1 / m_2 = 1/5, 5$.

Logo

$$\frac{1}{5} \leq \frac{m_1}{m_2} \leq 5 \quad (10.85)$$

(c) quando $m_1/m_2 = 1$, a Equação (10.81) dá

$$\eta = \frac{5 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)^2}{18 \frac{m_1}{m_2}} = \frac{10}{9} \quad (10.86)$$

Substituindo na Equação (10.82), obtemos $\psi = 48^\circ$.

P. 3. (a) Referindo-se à **Figura 10.6**, o enunciado diz que $\psi = 45^\circ$ e temos que $M = 2m$, onde m é a massa do átomo de hidrogênio e M a massa da molécula do mesmo elemento. Da conservação do momento e da energia, podemos escrever

$$mv = mv_f \cos 45^\circ + 2mV_f \cos \phi \quad (10.87)$$

$$mv_f \sin 45^\circ = 2mV_f \sin \phi \quad (10.88)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}2mV_f^2 \quad (10.89)$$

Das duas primeiras equações tiramos que

$$\begin{aligned} (v - v_f \sqrt{2}/2)^2 + (v_f \sqrt{2}/2)^2 &= 4V_f^2 \\ \Rightarrow 4V_f^2 &= v^2 - \sqrt{2}vv_f + v_f^2 \end{aligned} \quad (10.90)$$

Da terceira equação, segue que

$$2V_f^2 = v^2 - v_f^2 \quad (10.91)$$

Juntando os dois últimos resultados, obtemos a seguinte equação para v_f :

$$3v_f^2 - \sqrt{2}vv_f - v^2 = 0 \quad (10.92)$$

Resolvendo esta equação, encontramos para v_f :

$$v_f = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{6} \right) v = 0,859v \quad (10.93)$$

(Nós descartamos a solução negativa porque v_f é o módulo da velocidade.)

(b) Para calcular V_f , nós substituímos o resultado (10.93) na Equação (10.91) e obtemos

$$V_f^2 = \frac{1}{2}(1 - (0,859)^2)v^2 \Rightarrow V_f = 0,362v \quad (10.94)$$

Para encontrar o ângulo ϕ , usamos a Equação (10.88) e achamos

$$\text{sen}\phi = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{v_f}{V_f} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{0,859}{0,362} = 0,839 \Rightarrow \phi = 57,1^\circ \quad (10.95)$$

P. 4. A **Figura 10.14** mostra que existe um ângulo máximo. Dela também é fácil obter que

$$\text{sen}\psi_{\text{máx}} = \frac{m_n}{m_\alpha} = \frac{1}{4} \quad (10.96)$$

onde m_n é a massa do nêutron e m_α a massa da partícula alfa. Então, $\psi_{\text{máx}} = 14,4^\circ$.

Chamemos de v a velocidade da partícula incidente e de v_n e v_α as velocidades finais do nêutron e da partícula alfa, respectivamente. Novamente, da **Figura 10.14** tiramos que

$$2\mu v \cos\phi = m_n v_n \quad (10.97)$$

e

$$2\phi + \psi_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = 38^\circ \quad (10.98)$$

Da Equação (10.97), podemos escrever para a energia cinética do nêutron

$$K_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \left[\frac{4m_n m_\alpha}{(m_n + m_\alpha)^2} \cos^2 \phi \right] \cdot \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \quad (10.99)$$

Substituindo o valor de ϕ e a relação $m_\alpha = 4m_n$, encontramos finalmente

$$\frac{K_n}{\frac{1}{2} m_\alpha v^2} = 0,4 \quad (10.100)$$

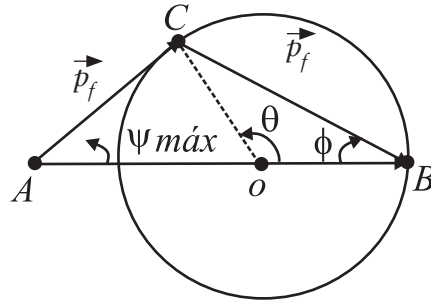


Figura 10.14: Ângulo máximo numa colisão em que a massa da partícula incidente é maior que a do alvo.

P. 5. Vamos supor que a força central seja repulsiva. O caso de uma força atrativa pode ser tratado de forma semelhante. Nas Figuras 10.15 e 10.16 mostramos as órbitas correspondentes. Seja $V(r)$ a energia potencial. Como você já sabe, o movimento é plano sob a ação de uma força central, e vamos chamar de r e ϕ as coordenadas polares da partícula. A sua energia total é

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) \quad (10.101)$$

onde

$$l = mr^2\dot{\phi}$$

é o momento angular, que é conservado. Resolvendo a Equação (10.101) para \dot{r} , temos

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V) - \frac{l^2}{m^2r^2}} \quad (10.102)$$

de onde

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V) - \frac{l^2}{m^2r^2}}} \quad (10.103)$$

Em seguida, escrevendo a relação $\dot{\phi} = l/mr^2$ na forma

$$d\phi = \frac{l}{mr^2} dt$$

e substituindo dt pela expressão da Equação (10.103) e integrando, obtemos

$$\phi(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} + \text{const.} \quad (10.104)$$

A trajetória da partícula num campo central é simétrica em relação à reta passando pelo ponto de maior aproximação do centro de força. Da Figura 10.15, temos então que

$$\theta = \pi - 2\Theta \quad (10.105)$$

com

$$\Theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \quad (10.106)$$

A partícula tem velocidade v em $r = \infty$. Assim, o momento angular pode ser escrito em termos do parâmetro de impacto como

$$l = mvb \quad (10.107)$$

e introduzindo a variável $u = 1/r$,

$$dr = -\frac{1}{u^2} du \quad (10.108)$$

A energia total da partícula é $E = (1/2)mv^2$ e escrevemos

$$\frac{l^2}{2m} = Eb^2 \quad (10.109)$$

Substituindo as Equações (10.107), (10.108) e (10.109) na Equação (10.106) ficamos então com

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \\ &= -b \int_{u_{\min}}^0 \frac{mvd u}{\sqrt{2mE\left(1 - \frac{V}{E} - b^2 u^2\right)}} \\ &= b \int_0^{u_{\min}} \frac{du}{\sqrt{\left(1 - \frac{V}{E} - b^2 u^2\right)}} \end{aligned} \quad (10.110)$$

É desse modo que a relação entre o ângulo de espalhamento e o parâmetro de impacto é calculada em muitos textos de mecânica. Nos problemas seguintes, vamos aplicá-la ao potencial de Coulomb e também para encontrar a seção de choque de espalhamento para um potencial que varia com o inverso do quadrado da distância.

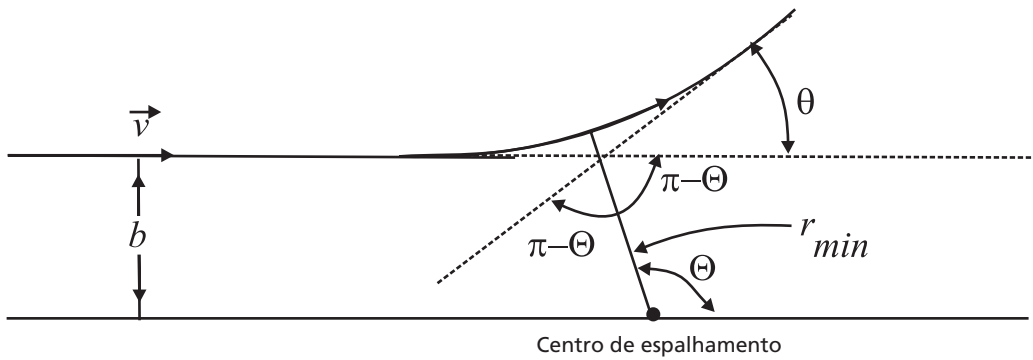


Figura 10.15: Espalhamento por um centro de força repulsiva.

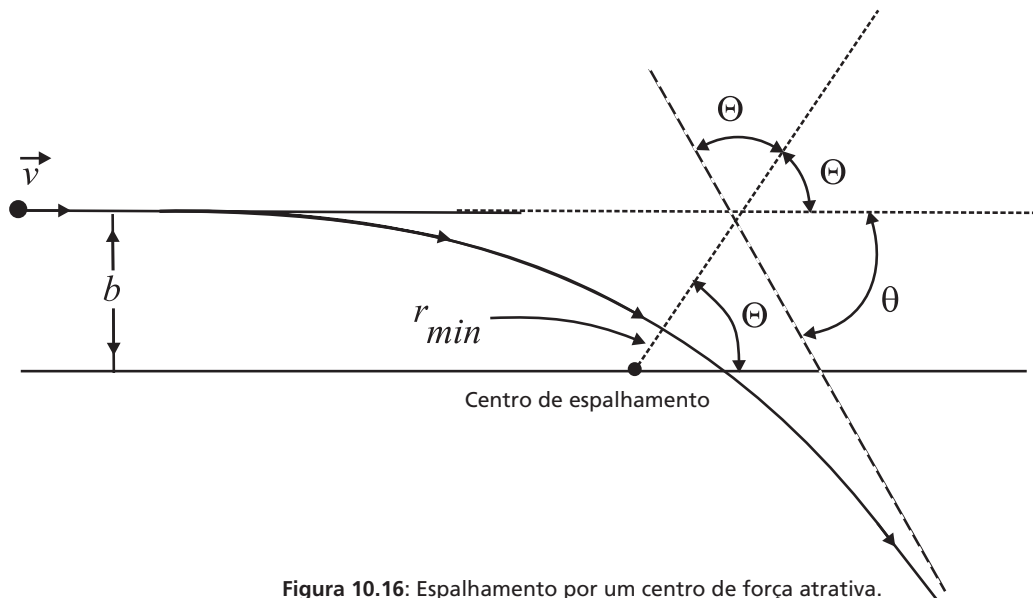


Figura 10.16: Espalhamento por um centro de força atrativa.

P. 6. Fazendo $V(r) = k/r$, ($k > 0$), na expressão (10.110), o ângulo Θ fica dado por

$$\Theta = b \int_0^{u_{\min}} \frac{du}{\sqrt{\left(1 - \frac{ku}{E} - b^2 u^2\right)}} \quad (10.111)$$

O ponto de retorno satisfaz a condição

$$1 - \frac{k u_{\min}}{E} - b^2 u_{\min}^2 = 0 \quad (10.112)$$

Consultando uma tabela de integrais, encontramos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsen\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + \text{const.},$$

$$\begin{cases} c < 0 \\ \Delta = 4ac - b^2 < 0 \end{cases} \quad (10.113)$$

Aplicando este resultado, achamos para o ângulo de espalhamento

$$\begin{aligned} \theta &= \pi - 2b \left(\frac{-1}{\sqrt{b^2}} \right) \left(\arcsen \left(\frac{-2b^2 u - \frac{k}{E}}{\sqrt{4b^2 + \frac{k^2}{E^2}}} \right) \right) \Bigg|_0^{u_{\min}} \\ &= \pi + 2 \left(\arcsen \left(\frac{-2b^2 u_{\min} - \frac{k}{E}}{\sqrt{4b^2 + \frac{k^2}{E^2}}} \right) - \arcsen \left(\frac{-\frac{k}{E}}{\sqrt{4b^2 + \frac{k^2}{E^2}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (10.114)$$

Resolvendo a Equação (10.112) e lembrando que $u_{\min} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} u_{\min} &= \frac{1}{2b^2} \left(-\frac{k}{E} + \sqrt{4b^2 + \frac{k^2}{E^2}} \right) \\ \Rightarrow 2b^2 u_{\min} + \frac{k}{E} &= \sqrt{4b^2 + \frac{k^2}{E^2}} \end{aligned} \quad (10.115)$$

Com este resultado, voltando à Equação (10.113) vemos que

$$\theta = \pi + 2 \left(\arcsen(-1) + \arcsen \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{k^2}}} \right) \right) \quad (10.116)$$

Lembrando que $\arcsen(-1) = -\pi/2$, o π na equação acima é cancelado e ficamos com

$$\theta = 2\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2b^2}{k^2}}}\right) \quad (10.117)$$

de onde tiramos que

$$\sen\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2b^2}{k^2}}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{2Eb}{k}}{\sqrt{1+\frac{4E^2b^2}{k^2}}} \quad (10.118)$$

Segue, portanto, que

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{2Eb}{k} \quad (10.119)$$

Este resultado foi obtido no texto da aula através da equação da órbita. Como obter a seção de choque a partir daí, já está feito no texto. Quando o potencial é atrativo, isto é, quando $k < 0$, a análise é a mesma mas com $\theta = 2\Theta - \pi$.

P. 7. Vamos calcular a relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento usando as Equações (10.105) e (10.110). Substituindo a expressão do potencial na Equação (10.110), o ângulo de espalhamento fica dado por

$$\theta = \pi - 2b \int_0^{u_{\min}} \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{E} + b^2\right)u^2}} \quad (10.120)$$

A integral que precisamos resolver é muito simples:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsen\sqrt{ax} + \text{const.} \quad (10.121)$$

Temos que

$$a = \left(\frac{\gamma}{E} + b^2\right), \quad u_{\min} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (10.122)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta &= \pi - 2b \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{E} + b^2}} \arcsen(1) \\ &= \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{b^2 E}}} \end{aligned} \quad (10.123)$$

Invertendo esta relação, obtemos

$$b(\theta) = \sqrt{\frac{\gamma(\pi - \theta)^2}{E(\pi^2 - (\pi - \theta)^2)}} \quad (10.124)$$

Então, a seção de choque diferencial é

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \\ &= \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{\gamma}{2bE} \left\{ \frac{-2(\pi - \theta)}{\pi^2 - (\pi - \theta)^2} - \frac{2(\pi - \theta)^3}{(\pi^2 - (\pi - \theta)^2)^2} \right\} \right| \\ &= \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{\gamma}{2bE} \frac{-2(\pi - \theta)}{(\pi^2 - (\pi - \theta)^2)^2} \{ \pi^2 - (\pi - \theta)^2 + (\pi - \theta)^2 \} \right| \end{aligned} \quad (10.125)$$

ou seja,

$$\sigma(\theta) = \frac{\gamma \pi^2}{E \sin\theta} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta^2)^2} \quad (10.126)$$

P. 8. Seja v a velocidade da partícula incidente de massa m . Vamos supor que a partícula alvo, de massa M , está em repouso. Antes de calcular o fator Q , vamos escrever a energia cinética no referencial do CM. A velocidade do CM é

$$u = \frac{mv}{m + M} \quad (10.127)$$

Logo, a velocidade de cada partícula no referencial do CM é

$$\begin{aligned} v'_{0m} &= v - u = \frac{Mv}{m + M} \\ v'_{0M} &= -u = \frac{-mv}{m + M} \end{aligned} \quad (10.128)$$

A energia cinética no referencial do CM é então

$$K_{CM} = \frac{1}{2} m v_{01}^2 + \frac{1}{2} M v_{02}^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} v^2 \quad (10.129)$$

A energia cinética inicial no referencial do laboratório é

$$K_{in} = \frac{1}{2} (m + M) u^2 + K_{CM} = \frac{1}{2} (m + M) u^2 + \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} v^2 \quad (10.130)$$

Agora, usando a conservação do momento, encontramos a velocidade com que as partículas grudadas saem juntas

$$mv = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mv}{m + M} = u \quad (10.131)$$

A energia cinética final é portanto,

$$K_{fin} = \frac{1}{2}(M + m)u^2 \quad (10.132)$$

O fator Q pode agora ser calculado:

$$Q = K_{fin} - K_{in} = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} v^2 \quad (10.133)$$

Note que a energia disponível para ser dissipada numa colisão inelástica é a energia do sistema no referencial do CM. No problema em questão, a Equação (10.133) nos diz que toda essa energia é perdida na reação de captura. A colisão é completamente inelástica.

P. 9. Desde que $\psi = 90^\circ$, a equação para o fator Q , Equação (10.64), fica

$$Q = \left(1 + \frac{m_{1H}}{m_{8O}} \right) K_{8O} - \left(1 - \frac{m_{2H}}{m_{8O}} \right) K_{2H} \quad (10.134)$$

Podemos tomar, com boa precisão,

$$\begin{aligned} \frac{m_{1H}}{m_{8O}} &\approx \frac{1}{17} \\ \frac{m_{2H}}{m_{8O}} &\approx \frac{4}{17} \end{aligned} \quad (10.135)$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q &= K_{8O}(1 + 1/17) - K_{2H}(1 - 4/17) \\ &= 1,06K_{8O} - 0,765K_{2H} \\ &= 1,06 \times 4,44 \text{ MeV} - 0,765 \times 7,70 = -1,18 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (10.136)$$

ISBN 978-85-7648-464-6



9 788576 484646



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

