

Marco Moriconi
Luca Moriconi

Eletromagnetismo e Ótica





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Eletromagnetismo e Ótica

Volume 1 - Módulo 1

Marco Moriconi

Luca Moriconi



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação



Apoio:



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente
Masako Oya Masuda

Vice-presidente
Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Física
Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Marco Moriconi
Luca Moriconi

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

SUPERVISÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristiane Brasileiro

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Juliana Silva Bezerra
Marcelo Alves da Silva

AValiação DO MATERIAL DIDÁTICO

Thaís de Siervi

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Katy Araújo

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Equipe CEDERJ

CAPA

Sami Souza

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz
Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

M854e

Moriconi, Marco.

Eletromagnetismo e ótica. v.1 / Marco Moriconi, Luca Moriconi. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
130p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-645-9

1. Eletromagnetismo. 2. Cálculo vetorial. 3. Lei de Gauss.
4. Energia eletrostática. 5. Lei de Biot-Savart. I. Moriconi, Luca. II. Título.

CDD: 621.3

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralses

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 1 – Introdução ao Eletromagnetismo _____	7
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 2 – Cálculo Vetorial _____	15
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 3 – O campo elétrico _____	41
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 4 – A lei de Gauss _____	59
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 5 – Energia eletrostática e o potencial elétrico _____	77
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 6 – Esta aula está em fase de elaboração	
Aula 7 – O Campo Magnético _____	99
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	
Aula 8 – A Lei de Biot-Savart _____	115
<i>Marco Moriconi e Luca Moriconi</i>	

Aula 1 – Introdução ao Eletromagnetismo

Metas da Aula

- apresentar uma breve história do Eletromagnetismo;
- apresentar a organização deste curso e o sistema de unidades a ser utilizado.

Objetivos

Depois de estudar esta aula, você deverá saber:

- como o curso está organizado;
- uma breve história do Eletromagnetismo;
- o sistema de unidades utilizado.

Eletromagnetismo: Por que é tão importante?

Numa noite de chuva, os raios e relâmpagos impressionam. Quando o clima é muito seco, freqüentemente ocorrem pequenos choques elétricos quando se toca um metal. Estamos circundados por aparelhos elétricos e eletrônicos. Lâmpadas, geladeiras, celulares, aparelhos de som. As geladeiras são decoradas com pequenos ímãs. Dois ímãs caseiros, quando postos próximos um do outro, exercem uma força palpável, mas invisível. Há campos elétricos e magnéticos por toda parte. Agora, neste exato momento, você está envolto em um tráfico enorme desses campos, ondas de TV, rádio, radares, luz. Tudo que enxergamos é propagado até nossos olhos pela luz. O que todos esses fenômenos têm em comum é a sua descrição clássica, de forma unificada em uma única teoria. A teoria é o Eletromagnetismo, e as equações são as equações de Maxwell.

O Eletromagnetismo clássico é fruto do trabalho de um grande número de pessoas que observaram, mediram e ponderaram sobre o que esses fenômenos significavam. Se por um lado é impossível identificar exatamente quem foram esses bravos empreendedores ao longo da História, por outro é fácil identificar quem elaborou uma teoria matematicamente consistente e completa do Eletromagnetismo clássico: James Clerk Maxwell.

O Eletromagnetismo que estudaremos neste curso é a visão unificada de Maxwell, que se baseou em estudos de Ampère, Coulomb e especialmente Faraday.

Um aspecto que é pouco ressaltado na análise da contribuição de Maxwell ao Eletromagnetismo, e mais geralmente à Física, é o fato de que houve uma mudança de paradigma, substituindo a visão microscópica, mecanicista, que foi herdada de Newton, por uma visão campista, na qual as quantidades físicas são descritas por campos que existem em cada ponto do espaço. Note que isso é uma grande mudança da visão newtoniana, na qual a dinâmica das partículas é sempre analisada usando um agente (força) que atua em um ponto. A visão de Newton foi extremamente bem-sucedida na descrição de fenômenos que vão do movimento de um projétil ao movimento de planetas, mas não conseguiu descrever os fenômenos eletromagnéticos. Essa mudança de ponto de vista foi uma contribuição notável de Maxwell, inspirado nas idéias intuitivas de Faraday.

O Eletromagnetismo tem um aspecto fascinante, por ser, ao mesmo tempo, tão aplicado e tão profundo cientificamente. Veja por exemplo a carga elétrica. Existem três propriedades bem conhecidas, mas que escondem um grande mistério, ainda por ser resolvido:

- *Cargas positivas e negativas.* Sabemos que existem dois tipos de cargas elétricas, denotadas positivas e negativas. Definir qual é positiva e/ou negativa é uma questão de convenção; o fato de elas se separarem em duas classes distintas, não. Se a carga q_1 atrai q_2 e q_3 , então q_2 e q_3 se repelem. Assim, dizemos que q_1 tem um sinal, positivo, por exemplo, e que q_2 e q_3 têm o sinal oposto a q_1 .
- *Cargas se conservam.* Isso significa que não é possível criar carga elétrica. A carga total do universo é constante. Essa conservação de carga total é chamada *conservação global*. Isso apenas não impediria, por exemplo, que uma carga desaparecesse em um ponto e aparecesse daí a um ano-luz de distância do ponto original, pois a carga total ainda seria constante. Na verdade, as cargas elétricas se conservam de uma forma mais forte ainda, de uma forma local: uma carga tem de ir de um ponto a outro, ela não pode simplesmente desaparecer.
- *Cargas são quantizadas.* Toda carga elétrica observada no universo é um múltiplo inteiro, positivo ou negativo, da carga do elétron. Esse é um grande mistério, que até hoje não foi compreendido. O físico

inglês Paul A. M. Dirac (1902-1984) mostrou que a existência de cargas magnéticas, na verdade de apenas uma carga magnética, explicaria a quantização da carga elétrica. Essas cargas magnéticas, chamadas monopólos magnéticos, foram razão de uma grande busca experimental, que, infelizmente, não deu em nada.

Além dessas propriedades, como a carga do elétron é muito pequena, e como em um meio material temos um número enorme de elétrons, em um grande número de aplicações podemos considerar que a carga total de um sistema é dada por uma função contínua.

Breve comentário histórico

O Eletromagnetismo tem uma longa história, e é um trabalho árduo dar o crédito correto a cada um de seus participantes, além de colocar suas contribuições no contexto correto. Aqui nos limitaremos a apresentar alguns dos momentos principais e as pessoas associadas a eles.

Começemos esse breve relato a partir de um estágio mais recente, com as observações de Benjamin Franklin (1706-1790), que propôs que a carga total é conservada, e de Charles Augustin Coulomb (1746-1806), que propôs a lei que leva seu nome e nos permite calcular a força entre duas cargas. Além disso, como o campo elétrico satisfaz o princípio da superposição, a força de um sistema de cargas é dada pela soma das forças individuais.

Por volta de 1820, Hans Oersted (1777-1851) notou que correntes podiam defletir ímãs, estabelecendo assim que correntes geram campo magnético. Assim que André Marie Ampère (1775-1836) soube dos resultados de Oersted, começou a elaborar uma teoria, e rapidamente, em menos de uma semana, possuía uma descrição quantitativa do campo magnético. Seus resultados foram publicados em um tratado em 1827. Ampère descobriu que correntes paralelas se atraem e que correntes antiparalelas (que fluem em direções opostas) se repelem. Além disso, ele postulou, com base em seus experimentos, que, em seu exterior, um corpo magnetizado é totalmente equivalente a uma corrente solenoidal (bobina); que cada molécula possui uma pequena corrente, gerando um pequeno campo magnético; e que um material magnético é feito de um alinhamento destas moléculas.

Jean-Baptiste Biot (1744-1862) e Félix Savart (1791- 1841) descobriram a lei análoga à de Coulomb para o campo magnético, a lei de Biot-Savart, que permite calcular o campo magnético de uma corrente arbitrária.

A grande revolução na compreensão do Eletromagnetismo ocorreu com Michael Faraday (1791-1876), filho de um encadernador e que gostava muito de ciência. Ele assistiu a uma palestra do grande químico Sir Humphrey Davy, do qual tomou nota cuidadosamente e enviou a Davy com a intenção de trabalhar em seu laboratório. Davy percebeu o talento de Faraday e o aceitou como assistente. Rapidamente Faraday se tornou uma figura proeminente no mundo científico, realizando descobertas em várias áreas da Física, especialmente eletricidade e magnetismo.

A visão do Eletromagnetismo de Faraday consistia em linhas de campo, o que simplificou tremendamente a matemática da teoria. Esse conceito de campo foi a peça fundamental usada por Maxwell posteriormente.

Faraday estava convencido de que havia uma conexão profunda entre fenômenos elétricos e magnéticos. Já era sabido que uma corrente elétrica pode criar um campo magnético. Faraday buscou a relação recíproca: gerar correntes a partir de um campo magnético. Ele percebeu que um campo magnético variável no tempo pode criar uma corrente. Essa é a lei de Faraday.

Finalmente, James Clerk Maxwell (1831-1879), certamente o maior físico teórico do século XIX, e em pé de igualdade com Isaac Newton e Albert Einstein na história da Ciência, baseando-se nos resultados acumulados previamente, elaborou o Eletromagnetismo clássico como conhecemos hoje. Essa não foi apenas uma organização de idéias anteriores, houve também uma percepção genial de Maxwell ao introduzir a chamada corrente de deslocamento. Se já era sabido que um campo magnético ao variar no tempo gera campo elétrico, então seria natural, por razões de simetria, que um campo elétrico, ao variar no tempo, gerasse um campo magnético. Esse termo tornou possível conectar a óptica ao Eletromagnetismo e tornou a teoria matematicamente consistente.

Vale mencionar que Maxwell era dono de uma personalidade extremamente agradável, sempre muito solícito em ajudar estudantes e colegas, e considerado muito brincalhão. Além de suas contribuições fundamentais ao Eletromagnetismo, Maxwell, com base na teoria da estabilidade, mostrou que os anéis de Saturno não podiam ser nem fluidos nem sólidos, mas sim constituídos de pequenas partículas de poeira, gelo e material rochoso, o que lhe concedeu o prêmio Adams, por ter realizado um feito notável de Física-Matemática. Desde a proposta do prêmio, em 1856, passaram-se quatro anos sem nenhuma submissão de solução, até que Maxwell o resolveu.

Maxwell também contribuiu de forma fundamental para a Termodinâmica e para a criação da Mecânica Estatística, com a introdução da distribuição que leva seu nome, e descreve a probabilidade de encontrarmos partículas com uma certa energia cinética, dado que o gás está a uma temperatura T . Uma de suas experiências de pensamento, o chamado “demônio de Maxwell”, foi crucial no entendimento da teoria moderna da informação. Além disso, o Eletromagnetismo é, certamente, a peça principal para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade restrita, de Albert Einstein. Apesar de Maxwell ter morrido bastante jovem, aos 48 anos, suas contribuições foram de valor inestimável para o progresso da Física.

O “demônio de Maxwell” é uma pequena criatura imaginária possuidora de uma inteligência notável, inventada por Maxwell, para analisar a segunda lei da termodinâmica. Esse pequeno ser se encontra no interior de uma caixa com gás e controla uma portinhola em uma partição deixando moléculas passarem para um lado ou para o outro. Dessa forma, ele consegue, por exemplo, passar as moléculas mais velozes para um lado da caixa, e as mais lentas para o outro. Assim, sem realizar trabalho algum ele reduz a entropia do sistema, violando a segunda lei da termodinâmica. A solução desse paradoxo foi dada apenas nos anos 1980, com o trabalho em teoria da informação de Charles Bennett e Rolf Landauer.

O Curso

Iniciaremos a nossa viagem eletromagnética pelos casos estáticos: eletrostática e magnetostática. A eletrostática é essencialmente a lei de Coulomb e suas conseqüências, como o estudo de condutores perfeitos, dielétricos e energia elétrica. Apesar de ser algo simples, já revela a beleza e aplicabilidade do Eletromagnetismo no uso, por exemplo, de blindagem elétrica. Após a discussão do campo elétrico, da lei de Gauss e do potencial elétrico, apresentaremos um tratamento simples de campos elétricos na presença de matéria. Em seguida, partiremos para a magnetostática.

Você sabe que uma corrente elétrica significa que cargas estão em movimento. Então, o que há de estático na magnetostática? Veremos que quando as correntes não variam com o tempo, o mesmo acontece com os campos

magnéticos, o que justifica a denominação de magnetostática. Na magnetostática, a lei equivalente à lei de Coulomb é a de Biot-Savart. Estudaremos as suas conseqüências e aplicações, incluindo um tratamento elementar de meios materiais magnéticos. Neste ponto, seremos capazes de formular as equações de Maxwell no caso em que as quantidades físicas, distribuições de cargas e correntes não variam com o tempo. Uma boa parte de nossa tarefa já terá sido realizada, mas o Eletromagnetismo, em toda sua glória, emerge ao estudarmos os fenômenos dependentes do tempo. O primeiro passo nesta direção é a lei de Faraday.

A lei de Faraday, que trata do aparecimento de campos elétricos quando os campos magnéticos variam, é o princípio físico por trás do funcionamento de motores. A partir da lei de Faraday, Maxwell teve uma percepção fabulosa e introduziu um novo termo, a chamada corrente de deslocamento, que deu maior simetria matemática às equações do Eletromagnetismo e trouxe à tona uma conseqüência inesperada: a óptica como um subproduto do Eletromagnetismo. Esse foi um dos grandes momentos da história da Física.

Uma vez de posse do sistema de equações que descreve o campo eletromagnético, Maxwell estudou as soluções dessas equações e percebeu que existiam soluções matemáticas do tipo ondulatórias, que se propagavam sem a necessidade de cargas ou correntes. Ele calculou a velocidade destas ondas e pôde expressá-la em termos de duas quantidades da eletrostática e da magnetostática: a permissividade do vácuo ϵ_0 e a permeabilidade do vácuo μ_0 , de uma forma muito simples: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Para sua surpresa, esta velocidade era muito próxima da velocidade da luz, que já havia sido medida com certa precisão por Fizeau. Isso levou Maxwell a identificar estas ondas eletromagnéticas com a luz e permitiu estudar a óptica de um outro ponto de vista, explicando várias de suas propriedades, como reflexão e refração, a partir das propriedades dos campos elétricos e magnéticos.

Uma vez de posse das equações de Maxwell completas, você estudará algumas aplicações simples, como o estudo de ondas planas, a energia e o momento de ondas eletromagnéticas, e a Teoria da Relatividade especial. A última aula será em estilo de divulgação, na qual mencionaremos alguns dos desenvolvimentos posteriores do Eletromagnetismo, especialmente na sua junção com a teoria quântica, formando a eletrodinâmica quântica.

Sistema de Unidades

Como você sabe, existem vários sistemas de unidades. Na mecânica newtoniana isso não é um problema sério, porque as equações têm a mesma forma em qualquer sistema de unidades. Por exemplo, $\vec{F} = m\vec{a}$ tem essa forma, independentemente de você usar o sistema SI (Système International) ou se você preferir usar libras para massa, polegadas para distância e minutos para tempo. No Eletromagnetismo isso não é tão simples, porque as equações mudam de forma. Neste curso utilizaremos o SI, no qual as unidades são metro, quilograma e segundo (MKS) e a carga é medida em Coulombs. Há um outro sistema de unidades, chamado Gaussiano, no qual as unidades são centímetros, gramas, segundos (CGS) e a carga elétrica é medida em unidades eletrostáticas (statc). Para obtermos as unidades no Sistema Gaussiano relacionadas à carga, adiciona-se o prefixo “stat” às unidades do sistema MKS. Por exemplo, ao Coulomb C escrevemos “statc”, à unidade de resistência “Ohm” temos “statohm”, e assim por diante.

Pode parecer que não é nada de mais, mas como as equações mudam de forma de acordo com o sistema de unidades, devemos ser cuidadosos, deixando claro qual sistema de unidades estamos usando. Por exemplo, a força entre duas cargas elétricas é descrita pela lei de Coulomb, que no SI se escreve

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (1.1)$$

ao passo que no Sistema Gaussiano, ela é escrita assim:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}. \quad (1.2)$$

A partir da Equação (1.2), vemos que $\text{statc}^2 = \text{dina} \times \text{cm}^2$, ou seja, $\text{statc} = \text{dina}^{1/2} \times \text{cm}$.

Como o SI é o sistema mais familiar, e no qual temos as unidades do dia-a-dia, como Volt, Watt e Ohm, neste curso usaremos sempre o SI. Mas atenção, se você consultar outros livros, certifique-se de qual sistema de unidades foi utilizado! Há casos de livros que usam os dois sistemas em capítulos diferentes... Portanto, todo cuidado é pouco!

Aula 2 – Cálculo Vetorial

Metas da aula

- rever o conceito de vetores no espaço tridimensional, e as noções de produto escalar e vetorial;
- definir as principais operações do cálculo vetorial: gradiente, divergência e rotacional;
- estabelecer os teoremas de Gauss e Stokes;
- discutir os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Objetivos

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

- utilizar o produto escalar para decidir se dois vetores são perpendiculares;
- usar o produto vetorial para construir um vetor ortogonal a dois vetores dados;
- calcular o gradiente de uma função escalar e a divergência e o rotacional de um campo vetorial;
- saber estimar qualitativamente o gradiente, divergência e rotacional;
- usar os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Introdução

Na descrição da Natureza, usamos grandezas matemáticas para especificar as características do problema que estamos tratando. Algumas dessas grandezas têm apenas magnitude, como por exemplo a massa de uma partícula ou a temperatura em um ponto no espaço. Essas grandezas são chamadas *grandezas escalares*, porque os seus valores não dependem de como nos orientamos no espaço: a massa de uma partícula é a mesma independentemente de você estar em pé, de lado ou de cabeça para baixo. Isso não é verdade para outras grandezas, como por exemplo a velocidade de um objeto

ou a força que atua em uma partícula. No caso de velocidade, por exemplo, se você vê um carro passando da esquerda para a direita, uma pessoa que está ao seu lado plantando bananeira dirá que, segundo ela, o carro passou da direita para a esquerda! O fenômeno físico descrito pelos dois – um carro que passa – é o mesmo, porém, as descrições dos dois observadores parecem ser conflitantes. Isso se deve ao fato de a velocidade ser uma *grandeza vetorial*, ou seja, para descrevermos completamente a velocidade, devemos saber qual é a sua magnitude, direção e sentido.

No estudo do Eletromagnetismo, as quantidades físicas fundamentais são grandezas vetoriais: o campo elétrico e o campo magnético. Ao contrário do caso de velocidade e força, porém, os campos elétrico e magnético devem ser definidos em todos os pontos do espaço, e não apenas no ponto de contato entre uma força e um corpo material. No caso de uma bolinha que tem uma certa velocidade, usamos o vetor velocidade para descrever o movimento desta bolinha, e, de certa maneira, este vetor só está definido no ponto em que a bolinha se encontra. Mas, como veremos nas aulas seguintes, uma das idéias mais importantes na teoria eletromagnética é a idéia de *campo*: em cada ponto do espaço, teremos o vetor campo elétrico e o vetor campo magnético. Estas grandezas variam de um ponto a outro no espaço, e portanto deveremos utilizar os métodos do cálculo vetorial. Nesse sentido, antes de iniciarmos nosso estudo, faremos uma pequena revisão de vetores e cálculo vetorial. Esta aula será um pouco mais extensa do que as outras, porque queremos fazer um sumário de todas as idéias matemáticas que serão utilizadas posteriormente. Assim, sinta-se à vontade em retornar a esta aula de referência sempre que achar necessário.

Vetores

Como você viu no exemplo anterior do carro que passa por dois observadores, um mesmo fenômeno físico parece ter duas descrições conflitantes, mas isto é apenas a aparência. Na verdade, podemos “traduzir” as observações de um para o outro com facilidade, precisamente porque estamos tratando de uma grandeza vetorial. Neste caso, por exemplo, um observador diz que o carro se move para a direita, enquanto o outro diz que ele se move para a esquerda. As duas observações estão relacionadas entre si por uma *transformação linear*, que neste caso é uma *rotação*.

Freqüentemente representaremos um vetor pelas suas componentes em alguma base. Por exemplo, se dissermos algo como “considere o vetor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ”, isto significa que, em uma certa base, o vetor \vec{a} tem a componente x igual a a_x , a y igual a a_y e a z igual a a_z . Deve ficar claro para você que em outra base este mesmo vetor pode ter outras componentes.

Produto escalar

Ao estudarmos o efeito de uma força, freqüentemente temos de calcular o trabalho realizado por ela. Você já estudou no curso de Física I como se calcula o trabalho realizado por uma força arbitrária \vec{F} ao longo de um percurso, também arbitrário, \mathcal{C} , em termos de quantidades infinitesimais. Denotando o trabalho realizado pela força \vec{F} ao longo do trecho $d\vec{x}$ por dW , temos

$$dW = |\vec{F}||d\vec{x}| \cos \theta \quad (2.1)$$

A quantidade do lado direito desta equação é um escalar, pois o trabalho realizado *não* pode depender da orientação do sistema de coordenadas. Além disso, gostaríamos de poder calcular este escalar de uma forma prática, diretamente a partir das componentes dos vetores em questão, neste caso \vec{F} e $d\vec{x}$. No caso de vetores arbitrários \vec{a} e \vec{b} , queremos calcular $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ a partir das componentes destes vetores.

Para isso vamos usar a famosa “lei dos co-senos”: em um triângulo de lados a , b e c , e ângulo θ entre os lados a e b , temos

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 \quad (2.2)$$

Usando a Equação (2.2) podemos expressar $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ em termos dos comprimentos de três vetores

$$|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2} \quad (2.3)$$

Desta forma, o que estamos buscando é uma expressão para o lado direito da Equação (2.3) em termos das componentes dos vetores \vec{a} e \vec{b} . Mas como sabemos que as componentes de \vec{a} são (a_1, a_2, a_3) , as de \vec{b} são (b_1, b_2, b_3) e as de $\vec{b} - \vec{a}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, e como já vimos como calcular o

quadrado da norma de um vetor (teorema de Pitágoras!), podemos reescrever o lado direito da Equação (2.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2} &= \frac{\sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i^2 - \sum_{i=1}^3 (b_i - a_i)^2}{2} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esta é a expressão que estávamos buscando! Ela é tão importante que vamos introduzir uma notação para ela: chamaremos de *produto escalar* de dois vetores \vec{a} e \vec{b} a quantidade

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2.5)$$

Nesta expressão o “pontinho” indica o produto escalar, e θ é o ângulo entre os dois vetores. Como o produto escalar é proporcional ao co-seno do ângulo entre os dois vetores, uma maneira simples de saber se dois vetores são perpendiculares é calcular o produto escalar entre eles e verificar que é igual a zero.

Produto vetorial

Uma outra operação fundamental no cálculo vetorial é o *produto vetorial*, que resolve o seguinte problema: encontrar um vetor perpendicular ao plano gerado por dois vetores dados. Em Física 1, você já se deparou com o produto vetorial no estudo do momento angular. Assim, estamos buscando um vetor que depende *linearmente* de dois vetores dados, e que é *perpendicular* a eles, ou seja, dados \vec{a} e \vec{b} , queremos \vec{c} perpendicular a \vec{a} e \vec{b} . Mas já sabemos como impor a condição de ortogonalidade! Basta utilizar o produto escalar. Como \vec{c} depende linearmente dos dois vetores, suas componentes podem ser escritas assim:

$$c_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 M_{ijk} a_j b_k \quad (2.6)$$

onde M_{ijk} é uma coleção de números que ainda não determinamos. Impondo que o vetor \vec{c} é perpendicular a \vec{a} , temos

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \sum_{i=1}^3 a_i c_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i M_{ijk} a_j b_k \quad (2.7)$$

Olhe para esta equação com atenção. Como o vetor \vec{a} é arbitrário, temos de impor a seguinte condição em M_{ijk} :

$$M_{ijk} = -M_{jik} \quad (2.8)$$

Você pode verificar que a Equação (2.7) é automaticamente satisfeita. Aplicando o mesmo argumento para o vetor \vec{b} , obtemos

$$M_{ijk} = -M_{ikj} \quad (2.9)$$

As Equações (2.8),(2.9) mostram que M_{ijk} se anula se dois índices forem iguais, o que quer dizer que os únicos elementos não-nulos são

$$M_{123} = M_{312} = M_{231} = -M_{132} = -M_{213} = -M_{321} \quad (2.10)$$

Se denominarmos $M_{123} = \kappa$, então podemos escrever as componentes do vetor \vec{c} facilmente

$$c_1 = \kappa(a_2b_3 - a_3b_2) \quad c_2 = -\kappa(a_1b_3 - a_3b_1) \quad c_3 = \kappa(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (2.11)$$

Podemos escolher $\kappa = 1$, e assim obtemos a definição do produto vetorial

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2.12)$$

e as componentes de \vec{c} são $(a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$.

Atividade

Verifique que, de fato, o vetor \vec{c} é perpendicular aos vetores \vec{a} e \vec{b} .

Resposta Comentada

Para provarmos que \vec{c} é perpendicular ao vetor \vec{a} , por exemplo, basta calcularmos o produto escalar dos dois vetores e verificar que é igual a zero. Calculando o produto escalar, temos

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(-a_1b_3 + a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

e, portanto, \vec{c} é perpendicular a \vec{a} .

Campos vetoriais

Agora que você já fez uma rápida revisão sobre o conceito de vetores, vamos introduzir o conceito de um campo vetorial. Iniciemos com um exemplo simples que o ajudará a ter uma intuição sobre eles. O exemplo que trataremos é o de *campo de velocidades* de um fluido.

Imagine um fluido qualquer, água, por exemplo, que se move em um duto que pode ser um cano ou mesmo um rio. Há duas maneiras diferentes de analisarmos este fluido. Na primeira, que é talvez considerada a mais natural, você escolhe um pequeno elemento de fluido e o acompanha em seu movimento, como uma pequena folha que se desloca na superfície do fluido. Esta é a chamada *descrição de Lagrange* da dinâmica de fluidos. Uma outra maneira, que na verdade é em geral mais útil, e que você estudou em seu curso de Física 2, é a chamada *descrição de Euler*: você se fixa em um ponto no espaço e analisa a velocidade naquele ponto como uma função do ponto e do tempo. Desta forma, para cada ponto do espaço você define um vetor velocidade. Este conjunto total de vetores é chamado *campo vetorial*. Como veremos no decorrer do curso, essa analogia com fluidos é muito útil, e freqüentemente recorreremos a ela. Você verá que até mesmo muitos dos termos utilizados na descrição dos campos elétrico e magnético são inspirados nessa analogia, como a noção de fluxo e circulação. Vamos agora estudar algumas das propriedades matemáticas dos campos vetoriais.

Derivada e gradiente

A derivada de uma função de uma variável dá uma informação muito valiosa sobre o comportamento desta função. Ela diz, basicamente, o quanto o valor da função muda quando variamos o seu argumento de uma quantidade infinitesimal. Se a derivada é positiva, significa que, ao aumentarmos o valor do argumento, a função aumenta de valor. Se for negativa, acontece o contrário: ao aumentarmos o valor do argumento, a função diminui de valor. E, finalmente, se a derivada é zero, significa que a função não muda de valor, indicando que estamos em um extremo da função. Podemos escrever isso em equações, usando as noções de cálculo diferencial de uma variável, para uma função $f(x)$ qualquer:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x \quad (2.14)$$

Qual é o equivalente no caso de uma função escalar, ou seja, como podemos estudar o comportamento de uma função escalar que depende de mais de uma variável? Consideremos, então, a função $f(x, y, z)$. Um deslocamento infinitesimal qualquer do ponto (x, y, z) pode ser escrito como $(x, y, z) + \epsilon \hat{u}$, onde \hat{u} é um vetor unitário arbitrário, cujas componentes são $\hat{t} = (a, b, c)$, e

ϵ é uma quantidade infinitesimal. Portanto, usando o análogo da expressão (2.14) para cada variável, temos

$$f(x + \epsilon a, y + \epsilon b, z + \epsilon c) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \epsilon a + \frac{\partial f}{\partial y} \epsilon b + \frac{\partial f}{\partial z} \epsilon c \quad (2.15)$$

Introduzindo o *gradiente* de uma função $f(x, y, z)$, definido por

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.16)$$

O símbolo ∇ se lê “nabla”.

podemos reescrever a Equação (2.15) da seguinte forma:

$$f(x + \epsilon a, y + \epsilon b, z + \epsilon c) = f(x, y, z) + \epsilon \nabla f \cdot \hat{t} \quad (2.17)$$

Assim, vemos que o termo $\epsilon \nabla f \cdot \hat{t}$ tem o mesmo papel que o termo $df/dx \Delta x$ no caso de uma variável. A diferença, porém, é que, quando temos apenas uma variável, não há escolha na direção que tomamos, pois só existe uma! No caso de mais de uma variável existe um número infinito de direções que podemos tomar, e é por isso que a variação da função depende da direção do vetor \hat{t} , como mostra a Equação (2.15). Desta equação podemos extrair uma informação importante. Como o vetor \hat{t} é unitário, o termo $\nabla f \cdot \hat{t}$ representa a projeção do vetor ∇f sobre o vetor \hat{t} . Com esta visão geométrica, percebemos que *o valor máximo que $\nabla f \cdot \hat{t}$ pode ter é alcançado quando \hat{t} é paralelo a ∇f* , ou seja, o gradiente de uma função aponta para a direção de crescimento máximo desta função!

Atividade

Calcule o gradiente da função $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, e interprete o resultado.

Resposta Comentada

Usando a definição de gradiente (2.16), obtemos

$$\nabla f = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \hat{x} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \hat{y} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \hat{z} \quad (2.18)$$

Como é um vetor proporcional a $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, vemos que ele é normal à superfície da esfera de raio $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, e, de fato, a direção na qual a função dada no exemplo cresce mais rapidamente é a direção radial.

Fluxo e divergência

Consideremos agora um campo vetorial genérico, descrito matematicamente por $\vec{v}(x, y, z, t)$. Por simplicidade de notação, denotaremos este campo simplesmente por \vec{v} , mas você deve ter em mente que, dentro do contexto em que estivermos discutindo, sempre estará implícito o ponto no espaço e no tempo.

A primeira quantidade que definiremos é o *fluxo* de um campo vetorial por uma superfície. Considere uma superfície qualquer \mathcal{S} , fixa no espaço, como mostra a **Figura 2.1**, e um pequeno elemento de área dA .

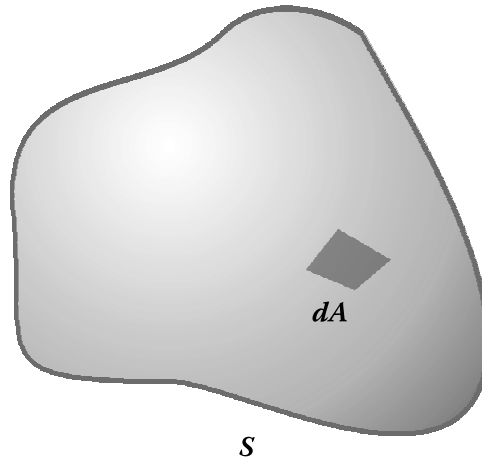


Figura 2.1: Uma superfície qualquer, e um pequeno elemento de área dA .

O vetor unitário a este elemento é denotado por \hat{n} . Note que, mais uma vez, estamos poupando a notação e escrevendo apenas \hat{n} e não $\hat{n}(x, y, z)$. Além disso, devemos definir para onde o vetor unitário aponta, uma vez que ele poderia apontar “para dentro” ou “para fora”. Uma vez que tomamos uma decisão em um pequeno elemento de área, devemos escolher o vetor unitário em outros elementos de área de tal forma que, se você deslizar um deles continuamente pela superfície até o outro, ambos estarão apontando para o mesmo lado. O fluxo do campo vetorial por este elemento de área é denotado $d\Phi$ e é dado por

$$d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n} dA, \quad (2.19)$$

e o fluxo por toda a superfície \mathcal{S} é dado por

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} dA \quad (2.20)$$

Esta é a *definição* de fluxo de um campo vetorial por uma superfície \mathcal{S} . É o análogo do fluxo de um fluido por uma certa abertura, definida pela superfície \mathcal{S} .

No caso em que a superfície é fechada, como uma esfera, por exemplo, escrevemos

$$\Phi = \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.21)$$

No momento, não se preocupe com os símbolos \int e \oint . Eles significam simplesmente a soma dos termos do tipo 2.19 sobre todos os elementos de área dA que formam a superfície \mathcal{S} . Você pode estar se perguntando qual é o equivalente do teorema fundamental do cálculo neste contexto. Isso é o que veremos agora.

Considere uma superfície fechada \mathcal{S} , como mostra a da **Figura 2.1**. O fluxo Φ de um campo vetorial \vec{v} pode ser calculado usando a receita 2.21. Podemos reparti-la em dois pedaços, \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , e “completar” cada uma delas com uma “tampa”, como mostra a **Figura 2.2**.

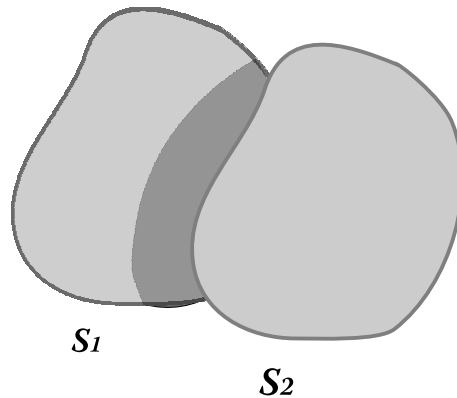


Figura 2.2: Subdivisão de uma superfície \mathcal{S} em duas partes.

Calculemos o fluxo por essas duas superfícies fechadas. As partes que formam \mathcal{S} dão o mesmo resultado que antes. Agora veja o que acontece com cada “tampa”. Como o vetor unitário em um certo elemento de área dA em uma das tampas é \hat{n} , ele tem uma contrapartida na outra tampa, e que aponta exatamente na direção oposta. Assim, a soma dos fluxos se cancela, e concluímos que *a soma dos fluxos de um campo vetorial pelas superfícies fechadas \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 é igual ao fluxo deste campo vetorial pela superfície \mathcal{S}* . Isto é algo muito importante, porque podemos continuar o processo de subdivisão da superfície original \mathcal{S} até chegarmos a um pequeno elemento ΔV , como mostra a **Figura 2.3**.

A unidade do fluxo depende do tipo de campo vetorial que estivermos considerando. Para um campo de velocidades, por exemplo, o fluxo tem unidade de m^3/s , que é a vazão, ou volume por unidade de tempo.

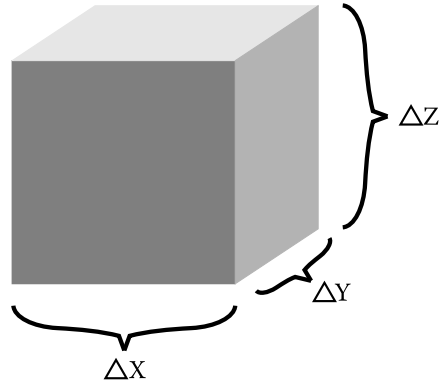


Figura 2.3: Elemento infinitesimal de volume pelo qual calcularemos o fluxo.

Calculemos agora o fluxo do campo vetorial por esse elemento de volume. Esse elemento de volume é tão pequeno, que não precisamos nos preocupar com o ponto exato em que estamos calculando o campo vetorial em cada uma de suas faces. Vamos denominar as faces do elemento de volume por $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} d\Phi = & (\vec{v}(x + \Delta x, y, z) \cdot \hat{x} + \vec{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{x})) \Delta y \Delta z + \\ & (\vec{v}(x, y + \Delta y, z) \cdot \hat{y} + \vec{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{y})) \Delta x \Delta z + \\ & (\vec{v}(x, y, z + \Delta z) \cdot \hat{z} + \vec{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{z})) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.22)$$

Os dois primeiros termos do lado direito desta equação podem ser combinados de uma forma simples, utilizando a definição de componente de um campo vetorial e a definição de derivada. Lembre-se de que estamos tratando de um elemento de volume muito pequeno, e que no fim tomaremos um limite em que ele vai a zero. Para estes dois primeiros termos, temos:

$$\begin{aligned} & (\vec{v}(x + \Delta x, y, z) \cdot \hat{x} + \vec{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{x})) \Delta y \Delta z = \\ & = (v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z \\ & = \left(\frac{v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ & = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fazendo o mesmo para cada um dos outros elementos de (2.22), obtemos, finalmente,

$$d\Phi = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.24)$$

Veja o que conseguimos fazer: fomos capazes de expressar o fluxo pelas faces do pequeno elemento de volume ΔV como o produto deste volume por uma

quantidade escalar! Como estamos interessados no fluxo por toda a superfície \mathcal{S} , devemos somar sobre *todos os elementos de volume que formam o interior de \mathcal{S}* , o que é expresso da seguinte forma:

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \quad (2.25)$$

A quantidade $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ é tão importante que merece um nome e uma notação especial. Esta quantidade é chamada de *divergência de um campo vetorial*, e a notação que usaremos é:

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.26)$$

Muitos livros-texto usam, erroneamente, o termo *divergente* em vez de *divergência*.

Freqüentemente se encontra a expressão $\text{div} \vec{v}$ para a divergência de um campo vetorial. Podemos reescrever o resultado (2.25) de forma mais compacta:

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{v} dV} \quad (2.27)$$

Este resultado é o célebre *teorema de Gauss*.

Atividade

Considere o campo vetorial $\vec{v} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Calcule o fluxo deste campo pela superfície \mathcal{S} de uma esfera de raio R .

Resposta Comentada

Pelo teorema de Gauss, podemos calcular fluxo se soubermos a divergência deste campo vetorial. A divergência é dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (2.28)$$

Portanto,

$$\Phi = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_{\mathcal{V}} 3 dV = 4\pi R^3 \quad (2.29)$$

Note que, na solução deste exemplo, não importa a localização exata da esfera.

A partir da relação que estabelecemos entre o fluxo em um pequeno volume e a divergência do campo vetorial, podemos dar uma interpretação simples para a divergência de um campo vetorial. Como vimos que o fluxo pela superfície deste pequeno volume é igual à divergência do campo vetorial no centro deste elemento, multiplicado pelo seu volume, fica claro que a divergência é uma *medida local da presença de fontes ou sumidouros*. Por

exemplo, no caso do campo de velocidades de um fluido incompressível, a divergência deste campo é igual a zero em todos os pontos fora das “fontes” e “ralos”. Em um ponto genérico do campo de velocidades deste fluido, a sua divergência é zero.

Antes de passarmos para a próxima seção, devemos mencionar uma operação importante que envolve a divergência e o gradiente: como veremos, acontecerá de termos de considerar a *divergência do gradiente* de uma função escalar, que no caso do Eletromagnetismo será o potencial elétrico. Em coordenadas cartesianas, temos:

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.30)$$

Esta operação é tão importante que merece um nome especial: é o *Laplaciano*, e se escreve de forma mais compacta assim:

$$\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot \nabla f \quad (2.31)$$

Circulação e rotacional

A próxima quantidade a ser estudada é a circulação de um campo vetorial. Novamente, considere um campo vetorial qualquer \vec{v} . Você se lembra de que no curso de Física 1 uma das quantidades calculadas muito úteis é o trabalho de uma força ao longo de um caminho qualquer? Neste caso, o que devemos fazer é somar os trabalhos infinitesimais ao longo de trechos de um percurso qualquer. Se denominarmos o percurso que vai de a a b por $\mathcal{C}_{a \rightarrow b}$, então o trabalho total é dado por:

$$W = \int_{\mathcal{C}_{a \rightarrow b}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.32)$$

No caso de um percurso fechado, escrevemos:

$$W = \oint_{\mathcal{C}_{a \rightarrow a}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.33)$$

Note que o ponto final é o mesmo que o ponto inicial, uma vez que o circuito é fechado. A partir da Expressão (2.33), podemos definir a circulação de um campo vetorial \vec{v} :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}_{a \rightarrow a}} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (2.34)$$

Da mesma forma que encontramos um operador diferencial relacionado ao fluxo na seção anterior, podemos aplicar o mesmo “truque” de subdividir o

circuito. Inicialmente, completemos o circuito com uma *superfície arbitrária* \mathcal{S} , que tem o circuito \mathcal{C} como borda, assim como mostra a **Figura 2.4**:

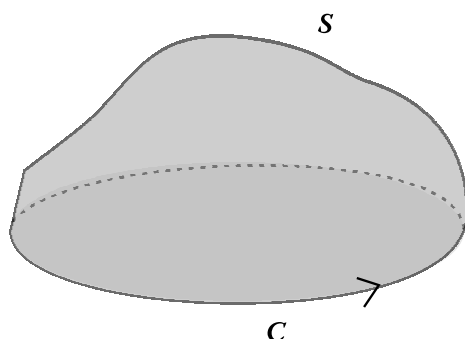


Figura 2.4: Uma superfície arbitrária \mathcal{S} apoiada em uma borda \mathcal{C} .

Se separarmos a superfície \mathcal{S} em duas superfícies \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , completando cada uma delas com um caminho, como mostra a **Figura 2.5**, vemos o seguinte: o trecho comum, \mathcal{C}' , às duas superfícies não contribui na soma de Γ_1 e Γ_2 , pois no cálculo de uma delas ele contribui com um sinal, e no outro, com o sinal oposto.

Podemos então prosseguir na subdivisão da superfície \mathcal{S} em superfícies cada vez menores, até chegarmos a um “elemento de superfície”. Calculemos a circulação neste pequeno elemento.

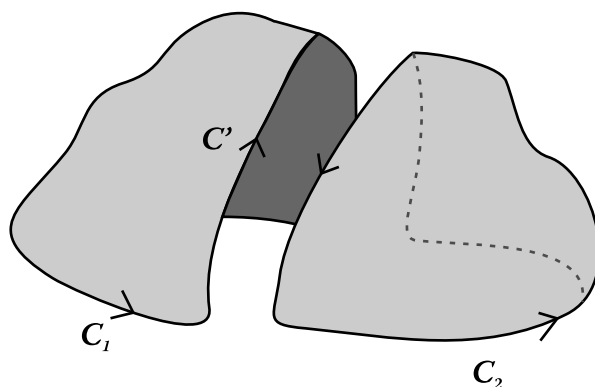


Figura 2.5: Subdivisão da superfície \mathcal{S} e seu novo circuito de borda.

As passagens que se seguem são um pouco “pesadas”, e talvez você já tenha estudado o rotacional em seu curso de Cálculo 3. Se quiser, pode pular diretamente para a Equação (2.39):

Consideremos o elemento de superfície como mostra a **Figura 2.6**. Este elemento é definido pelos vetores $\Delta\vec{a} = \Delta a\hat{u}$ e $\Delta\vec{b} = \Delta b\hat{v}$, onde Δa

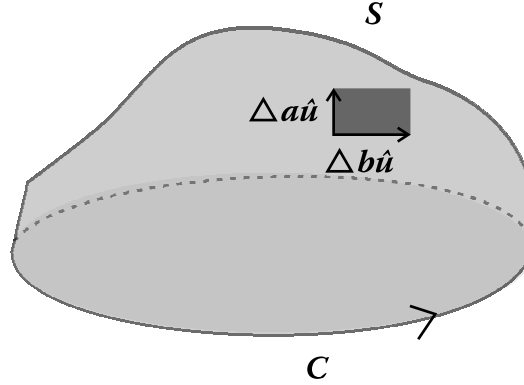


Figura 2.6: Elemento de superfície em uma superfície qualquer.

e Δb são escalares, e \hat{u} e \hat{v} são vetores unitários. A seguir utilizaremos a seguinte notação simplificada: o campo vetorial \vec{v} no ponto $P_0 = (x, y, z)$ será denotado $\vec{v}(P_0)$, e $\vec{v}(P_0 + \vec{s})$ representa o vetor $\vec{v}(x + s_x, y + s_y, z + s_z)$.

A circulação infinitesimal $d\Gamma$ do circuito $d\mathcal{C}$ da **Equação (2.6)** é dada por:

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \vec{v}(P_0 - \frac{\Delta a}{2}\hat{u}) \cdot (\Delta b\hat{t}) + \vec{v}(P_0 + \frac{\Delta a}{2}\hat{u}) \cdot (-\Delta b\hat{t}) \\ & \vec{v}(P_0 + \frac{\Delta b}{2}\hat{t}) \cdot (\Delta a\hat{u}) + \vec{v}(P_0 - \frac{\Delta b}{2}\hat{t}) \cdot (-\Delta a\hat{u}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como você viu no estudo do gradiente, podemos escrever a seguinte equação para cada componente do campo vetorial

$$v_\alpha(P_0 \pm \frac{\Delta a}{2}\hat{u}) = v_\alpha(P_0) \pm \frac{\Delta a}{2} \nabla v_\alpha \cdot \hat{u} \quad (2.36)$$

onde α representa cada um dos possíveis índices, x , y ou z . Substituindo esta expressão em (2.35), e depois de alguns simplificações, obtemos

$$d\Gamma = ((\nabla(\vec{v} \cdot \hat{t})) \cdot \hat{u} - (\nabla(\vec{v} \cdot \hat{u})) \cdot \hat{t}) \Delta a \Delta b \quad (2.37)$$

Nossa tarefa agora é simplificar o termo entre parênteses. Em vez de descrevermos os cálculos passo a passo, vamos simplesmente escrever o resultado final da simplificação. Mas note bem que não há truque algum a ser

feito, estamos apenas sendo breves para poupar a sua paciência... O resultado que você pode verificar é que a Expressão (2.37) é o mesmo que

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) (u_y t_z - t_z u_y) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) (u_x t_z - t_z u_x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (u_x t_y - t_y u_x) \quad (2.38)$$

Os termos envolvendo as componentes de \hat{u} e \hat{t} são simplesmente as componentes do vetor $\hat{u} \times \hat{t}$. Se introduzirmos o rotacional do campo vetorial \vec{v} por

$$\nabla \times \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{z} \quad (2.39)$$

então $d\Gamma$ é simplesmente

$$d\Gamma = \nabla \vec{v} \cdot (\hat{u} \times \hat{t}) \Delta a \Delta b \quad (2.40)$$

Espere! Ainda há mais uma simplificação a fazer! O vetor $\hat{u} \times \hat{t}$ é perpendicular ao elemento de superfície que estamos considerando, e uma vez que \hat{u} e \hat{t} são perpendiculares entre si, o vetor $\hat{u} \times \hat{t}$ tem norma 1, ou seja, é o vetor unitário normal à superfície no centro do elemento de superfície. Além disso, $\Delta a \Delta b = dA$, onde dA é a área deste elemento. Assim, temos, finalmente,

$$d\Gamma = \nabla \times \vec{v} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.41)$$

Como estamos interessados na soma dessas circulações por todos os elementos que formam a superfície \mathcal{S} , obtemos a seguinte expressão para a circulação:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{v} \cdot \hat{n} dA} \quad (2.42)$$

Este é o célebre *teorema de Stokes*.

Há uma aplicação muito importante do teorema de Stokes. Suponha que o rotacional de um certo campo vetorial é nulo. O que isso significa? Da condição $\nabla \times \vec{v} = 0$, concluímos que o lado direito do teorema de Stokes, como escrevemos acima, se anula, e, portanto, a circulação do campo vetorial \vec{v} é zero para qualquer circuito \mathcal{C} . Considere agora dois pontos quaisquer a e b , e um caminho \mathcal{C}_1 que vai de a a b , e um caminho \mathcal{C}_2 que vai de b a a . Se fizermos um caminho de a para a , composto por \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , teremos um caminho fechado \mathcal{C} , para o qual

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (2.43)$$

e, portanto,

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (2.44)$$

onde denotamos o caminho de volta de b para a por $-C_2$. Esta equação mostra que a integral $\int \vec{v} \cdot d\vec{r}$ *não depende do caminho!* Ou seja, no caso de uma força, isso é um teste para saber se uma força é conservativa ou não.

Sistemas de coordenadas

Todas as nossas considerações até agora foram feitas em coordenadas cartesianas. O sistema de coordenadas cartesianas é muito útil em um grande número de problemas, mas existem situações em que é mais conveniente utilizar outros sistemas de coordenadas. Por exemplo, no estudo de problemas com simetria esférica, as equações podem ficar desnecessariamente complicadas, ocultando o significado físico delas. É, portanto, importante conhecermos outros sistemas de coordenadas mais comuns. Nesta seção, descreveremos o sistema de coordenadas cilíndricas e de coordenadas esféricas.

Sistema de coordenadas cilíndricas

Suponha que você quer resolver um problema tratando de um fio muito longo ou de um tubo. Há uma simetria evidente neste sistema: se você girar ao redor do eixo do cilindro, nada muda. Dizemos que o sistema tem *simetria axial*.

Um ponto no espaço tem coordenadas cartesianas (x, y, z) . Em coordenadas cilíndricas descrevemos este mesmo ponto de outra maneira: continuamos usando a coordenada z , mas em vez de x e y , utilizamos a distância deste ponto ao eixo z , que chamamos de ρ , e o ângulo θ que esta linha faz com o eixo x , assim como mostra a **Figura 2.7**:

A letra grega ρ se lê “rô”. Ela é usada em geral para se descrever uma distância ou densidade, mas, dado o contexto, não deve existir nenhuma ambigüidade.

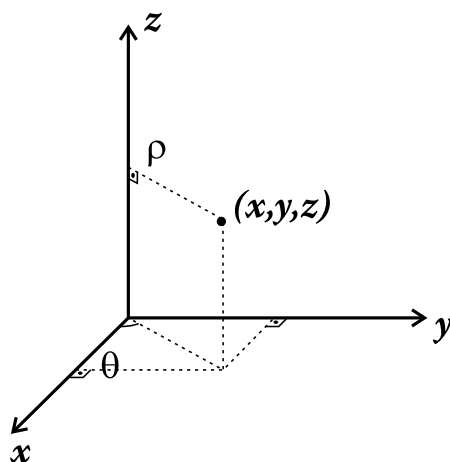


Figura 2.7: Coordenadas cilíndricas.

Da figura, vemos qual é a relação entre as coordenadas cartesianas de um ponto, e suas coordenadas cilíndricas: se um ponto possui coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z') , então temos

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z' \quad (2.45)$$

Estas equações podem ser facilmente invertidas, se quisermos partir das coordenadas cartesianas e chegar nas coordenadas cilíndricas

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad z' = z \quad (2.46)$$

Os vetores unitários são denotados por $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{z} .

Sistema de coordenadas esféricas

Outra simetria freqüente no tratamento de problemas físicos é a simetria esférica. Da mesma maneira que tratamos as coordenadas cilíndricas, se um ponto possui coordenadas cartesianas (x, y, z) , suas coordenadas esféricas são dadas por (r, θ, ϕ) , onde r é a distância de P até a origem, θ é o ângulo que o vetor \vec{P} faz com o eixo z e ϕ é o ângulo que a linha que vai do ponto P ao eixo z faz com o eixo x . Esta descrição fica mais clara na **Figura 2.8**:

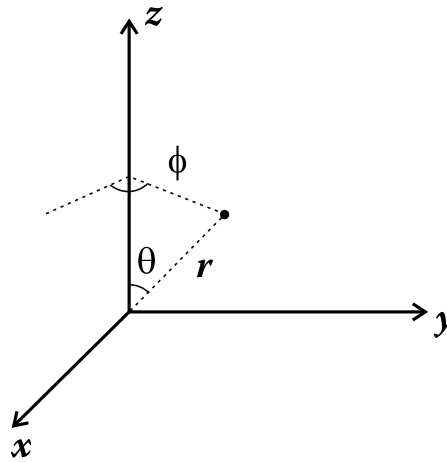


Figura 2.8: Coordenadas esféricas.

A relação entre as coordenadas cartesianas e esféricas de um ponto pode ser deduzida a partir da geometria da **Figura 2.8**

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (2.47)$$

Estas relações podem ser invertidas, se quisermos calcular as coordenadas esféricas a partir das coordenadas cilíndricas

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \theta = \arctan\left(\frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\right) \quad (2.48)$$

Atividade

Escreva a equação de uma esfera de raio R em coordenadas cilíndricas e cartesianas.

Resposta Comentada

Em coordenadas cartesianas devemos encontrar a equação satisfeita pelos pontos que se encontram a distância R da origem. Pelo teorema de Pitágoras temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2.49)$$

que é uma equação quadrática nas coordenadas, e envolve as três coordenadas cartesianas. Já em coordenadas esféricas, a equação é

$$r = R \quad (2.50)$$

Muito mais simples!

Os vetores unitários são denotados por \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$

Note que existem outros sistemas de coordenadas mais complicados, como as coordenadas parabólicas e coordenadas elipsoidais, mas que não faremos uso delas neste curso.

Gradiente, divergência e rotacional em coordenadas cilíndricas e esféricas

O último tópico de que trataremos nesta aula é a expressão do gradiente, divergência e rotacional nos sistemas de coordenadas cilíndrico e esférico. Vamos mostrar como se obter o gradiente em coordenadas cilíndricas, e apenas tabelar os outros resultados, de forma a evitar que essa aula fique “carregada” demais.

Como você viu, o gradiente de uma função escalar em coordenadas cartesianas é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.51)$$

Devemos expressar o gradiente em termos de ρ , θ , e z . Para isso podemos usar a regra da cadeia para reescrever as derivadas parciais. Além disso, devemos escrever os vetores unitários \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , em termos de $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$.

Para as derivadas parciais é um exercício de Cálculo 3, e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Note que há um abuso de notação aqui. Do lado esquerdo f é uma função escrita em termos de coordenadas cartesianas. Já do lado direito f deve ser considerada como uma função das coordenadas cilíndricas.

Resta agora escrever os vetores unitários \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} em função de $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$. Vamos expressar um deles, e os outros ficam como parte de uma atividade.

Podemos escrever o vetor \hat{x} como uma combinação linear dos vetores unitários do sistema de coordenadas cilíndricas

$$\hat{x} = a\hat{\rho} + b\hat{\theta} + c\hat{z} \quad (2.53)$$

Calculando o produto escalar desta equação com os vetores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{z} , obtemos

$$\hat{x} \cdot \hat{\rho} = a \quad \hat{x} \cdot \hat{\theta} = b \quad \hat{x} \cdot \hat{z} = c \quad (2.54)$$

Mas, como sabemos que $\hat{x} \cdot \hat{\rho} = \cos \theta$, $\hat{x} \cdot \hat{\theta} = -\sin \theta$ e $\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$, temos

$$\hat{x} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (2.55)$$

Realizando o mesmo tipo de consideração para os outros vetores unitários, obtemos

$$\hat{y} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta} \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (2.56)$$

Substituindo as expressões dos vetores unitários 2.55 e 2.56 e das derivadas parciais (2.52) em (2.51), obtemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.57)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para cada uma das outras operações. Vamos apenas listar os resultados, porém.

Divergência e rotacional em coordenadas cilíndricas

Se denotarmos o campo vetorial por \vec{v} , temos de, primeiro, reescrevê-lo em coordenadas cilíndricas, ou seja, se em coordenadas cartesianas ele é dado por

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad (2.58)$$

em coordenadas cilíndricas ele será dado por

$$\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\theta \hat{\theta} + v_z \hat{z} \quad (2.59)$$

A relação entre v_ρ , v_θ e v_z e as componentes cartesianas de \vec{v} podem ser obtidas da mesma forma que fizemos para expressar \hat{x} em termos dos vetores unitários das coordenadas cilíndricas. Uma vez feita esta “tradução”, temos

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.60)$$

e para o rotacional

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\theta) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{z} \quad (2.61)$$

O gradiente em coordenadas esféricas de uma função escalar é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (2.62)$$

Em coordenadas esféricas o campo vetorial \vec{v} se expressa assim:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi} \quad (2.63)$$

A divergência de \vec{v} é dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (2.64)$$

O rotacional em coordenadas esféricas é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Estas expressões são complicadas mesmo, mas você não deve se deixar intimidar por elas. Retorne a esta aula sempre que achar necessário, e não se preocupe em memorizar estas fórmulas. Na verdade, quase ninguém sabe essas fórmulas de cor! Sempre que é necessário, consulta-se uma tabela, como a que fizemos aqui...

Atividades Finais

1. Considere dois vetores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ e $\vec{b} = (4, 5, x)$. Encontre x de tal forma que \vec{b} seja perpendicular a \vec{a} .
2. Considere um vetor \vec{u} qualquer. Por qual fator devemos multiplicá-lo para que sua norma seja igual a 1?
3. Considere o vetor $\vec{a} = (1, 1, 1)$. Encontre todos os vetores perpendiculares a ele. Qual é este lugar geométrico?
4. *Produto Triplo.* Considere três vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Mostre que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.66)$$

Qual é a interpretação geométrica do produto triplo?

5. Mostre que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
6. Mostre que uma força central arbitrária $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ é conservativa. [sugestão: use a expressão para o rotacional em coordenadas esféricas].
7. Considere uma função qualquer $f(x, y, z)$. Mostre que $\nabla \times \nabla f = 0$. Este resultado mostra que o gradiente sempre tem rotacional nulo. Você saberia como mostrar isso sem usar as expressões para o rotacional

e gradiente? [sugestão: como se pode argumentar que a integral de um gradiente por um circuito fechado é sempre zero? Depois aplique o teorema de Stokes!].

8. Considere um campo vetorial \vec{v} qualquer. Mostre que $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$ de duas maneiras diferentes:
 - (a) diretamente, a partir das definições de divergência e rotacional de um campo vetorial
 - (b) aplicando o teorema de Gauss e depois o de Stokes [sugestão: considere a integral $\oint_{\Delta V} \nabla \cdot \nabla \times \vec{v}$, onde ΔV é um pequeno volume qualquer].

Respostas Comentadas

1. Se \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares, então o produto escalar dos dois é zero, ou seja,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 1.4 + 5.2 + 3.x = 14 + 3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{14}{3} \quad (2.67)$$

2. Se o vetor \vec{u} é dado por (u_x, u_y, u_z) , então multiplicando por λ temos, para a norma de $\lambda\vec{u}$,

$$||\lambda\vec{u}|| = \lambda(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}}. \quad (2.68)$$

Note que poderíamos escolher $-\lambda$, que a norma do novo vetor continuaria sendo 1, porém neste caso estaríamos mudando o sentido do vetor.

3. O lugar geométrico dos pontos perpendiculares ao vetor \vec{a} é dado por

$$\vec{v} = (x, y, z) \quad \text{tal que} \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow x + y + z = 0. \quad (2.69)$$

Esta é a equação de um plano.

4. Usando as definições de produto vetorial e produto escalar, e sabendo que $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, e que $\vec{b} \times \vec{c} = (b_y c_z - b_z c_y, c_z b_x - c_x b_z, c_x b_y - c_y b_x)$, temos

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y c_z b_x - a_y c_x b_z + a_z c_x b_y - a_z c_y b_x \quad (2.70)$$

Vemos que é o mesmo resultado que $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$. Fica mais fácil entender por que isso é verdade se soubermos interpretar o produto triplo

geometricamente. O produto vetorial de \vec{b} e \vec{c} tem módulo igual à área do paralelogramo de lados \vec{b} e \vec{c} , e é perpendicular a este plano. Ao tomarmos o produto escalar com o vetor \vec{a} estaremos projetando este vetor na direção de $\vec{b} \times \vec{c}$, ou seja, obteremos o volume do paralelepípedo de lados \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .

5. Escrevendo o lado esquerdo e direito explicitamente, temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_y b_x c_y - a_y b_y c_x + a_z b_x c_z - a_z b_z c_x) \hat{x} \\ &\quad - (a_x b_x c_y - a_x b_y c_x + a_z b_y c_z - a_z b_z c_y) \hat{y} \\ &\quad - (a_x b_x c_z - a_x b_z c_x + a_y b_y c_z - a_y b_z c_y) \hat{z} \quad (2.71)\end{aligned}$$

e para o lado direito,

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} &= ((a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x) \hat{x} \\ &\quad + ((a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_y) \hat{y} \\ &\quad + ((a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_z - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_z) \hat{z} \quad (2.72)\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, vemos que são idênticas.

6. Devemos verificar que o rotacional de $\vec{F}(\vec{r})$ é igual a zero. O campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ possui apenas a componente radial $F_r = f(r)$ diferente de zero, e as outras duas F_θ e F_ϕ se anulam. Se você der uma olhada na expressão do rotacional em coordenadas esféricas, verá que há apenas dois termos envolvendo F_r , mas, como são de derivadas em relação a θ e ϕ , elas se anulam! Assim, vemos, que o rotacional de $\vec{F}(\vec{r})$ se anula, e a força é conservativa.

7. Calculemos a componente x do rotacional do gradiente (o cálculo com as outras é análogo). Lembrando que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.73)$$

Temos para a componente x do rotacional

$$(\nabla \times \nabla f)_x = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.74)$$

E, portanto, o rotacional do gradiente é sempre nulo. Podemos entender isso sem termos de fazer cálculo algum explícito: o rotacional é nulo somente se não houver circulação, ou seja, se a integral do campo vetorial em um circuito fechado qualquer for sempre zero. Mas no caso

de um campo vetorial gradiente podemos ver que a sua circulação é nula diretamente da definição: como o produto escalar do gradiente de uma função com o elemento de deslocamento dá o incremento da função ao longo desta direção, ao somarmos todos os incrementos de um circuito, teremos o incremento total. Mas, como em um circuito fechado, o ponto final é igual ao ponto inicial, o incremento total é zero e a circulação se anula. Ou seja, o rotacional é identicamente nulo, pelo teorema de Stokes.

8. Se o campo \vec{v} tem componentes (v_x, v_y, v_z) , temos:

(a) calculando em coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2.75)$$

(b) podemos mostrar o mesmo resultado aplicando os teoremas de Gauss e Stokes, sem termos de fazer referência a qualquer sistema de coordenadas. Pelo teorema de Gauss, temos

$$\oint_{\Delta V} \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \int_S \nabla \times \vec{v} \cdot \hat{n} dA \quad (2.76)$$

Mas, pelo teorema de Stokes, a última integral é zero, já que é por uma superfície fechada! Portanto, se a integral de $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v}$ é zero em qualquer volume, então o integrando tem de ser identicamente nulo.

Se você quiser se convencer de por que esta integral é nula, pense da seguinte maneira: uma superfície fechada pode ser pensada como duas superfícies apoiadas em um mesmo circuito \mathcal{C} . Mas ao aplicarmos o teorema de Stokes em cada uma destas superfícies, percorremos em um caso o circuito em um sentido, e no outro em sentido oposto, obtendo zero no final.

Resumo

Os campos elétrico e magnético são descritos de forma natural por vetores, que são grandezas matemáticas que possuem direção e sentido.

O produto escalar de dois vetores nos dá a projeção de um vetor sobre o outro. Em particular, o produto escalar de dois vetores é zero se, e somente se, eles são perpendiculares entre si. O produto vetorial nos dá um vetor que é perpendicular ao plano gerado por dois vetores, e é nulo se, e somente se, os dois vetores são colineares.

O gradiente de uma função escalar nos diz o quanto a função muda quando nos deslocamos de uma quantidade infinitesimal ao longo de uma direção arbitrária. O gradiente aponta na direção em que a função cresce mais rapidamente.

As noções de fluxo e circulação, comuns no estudo de mecânica dos fluidos, levam à definição de operações diferenciais do cálculo vetorial: a divergência e o rotacional. A divergência de um campo vetorial nos diz se estamos em um ponto onde há uma fonte ($\nabla \cdot \vec{v} > 0$) ou sumidouro ($\nabla \cdot \vec{v} < 0$). Em um ponto onde $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ não há nem fonte nem sumidouro e, portanto, o fluxo por uma pequena superfície ao redor deste ponto é zero, como no caso do escoamento incompressível em mecânica dos fluidos. A circulação leva naturalmente ao conceito de rotacional, e da mesma maneira que no caso da divergência, sabendo $\nabla \times \vec{v}$ podemos saber se há circulação ou não na vizinhança de um ponto.

Além do sistema de coordenadas cartesianas existem outros sistemas de coordenadas muito úteis, como os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, que descrevem sistemas que possuem simetria axial ou esférica. É importante conhecer as fórmulas para o gradiente, divergência e rotacional nestes sistemas de coordenadas.

Aula 3 – O campo elétrico

Metas da aula

- formular a lei de Coulomb;
- enunciar o princípio da superposição;
- discutir a aproximação de dipolo elétrico para o campo elétrico produzido em regiões distantes;
- analisar os campos elétricos gerados por distribuições contínuas de carga.

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- determinar as forças de interação entre cargas elétricas, pelo uso da lei de Coulomb;
- calcular o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas;
- interpretar as linhas de campo elétrico geradas por um sistema de cargas;
- compreender a expansão do campo elétrico, até a ordem de dipolo.

A lei de Coulomb

O ponto de partida da nossa viagem pelo mundo dos fenômenos eletromagnéticos é a definição de carga elétrica e da maneira pela qual elas interagem entre si em situações simples. Existem dois tipos de cargas elétricas, representadas como quantidades “positivas” ou “negativas”. Duas propriedades fundamentais estão associadas às cargas elétricas:

- (a) a carga elétrica total de um sistema isolado é *conservada*;
- (b) a carga elétrica é *quantizada*.

É interessante comentarmos que a propriedade (a) de conservação da carga, descoberta por Benjamin Franklin por volta de 1750, está intimamente relacionada a princípios fundamentais de simetria que guiam a construção de

teorias modernas de partículas. Já o entendimento da propriedade (b), onde afirmamos que a carga de um sistema qualquer sempre será um múltiplo inteiro de uma unidade fundamental de carga, permanece sendo um problema aberto da Física atual. Considera-se, costumeiramente, a carga fundamental como sendo a carga e do elétron. Entretanto, para sermos mais exatos, os “quarks”, partículas que entram na composição de prótons e nêutrons, por exemplo, possuem cargas iguais a $\pm e/3$ ou $\pm 2e/3$. De qualquer maneira, a propriedade (b) continuaria sendo válida se considerássemos, alternativa-mente, a carga $e/3$ como sendo a unidade fundamental de carga.

Cargas de sinais opostos atraem-se mutuamente, enquanto cargas de sinais idênticos repelem-se. Quanto mais distantes estiverem as cargas umas das outras, tanto mais fraca será a força de interação entre elas. Inspirado na lei de Newton da atração gravitacional, Charles Augustin de Coulomb foi capaz de formular em 1785 uma lei matemática precisa que descreve a interação entre cargas elétricas estáticas. É uma lei muito simples. A força de interação entre cargas pontuais é proporcional às cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância de separação. Ademais, as forças satisfazem ao princípio da ação e reação e estão dirigidas paralelamente à linha que une as duas cargas.

Para refletir: o que significa, na prática, a palavra “pontual”?

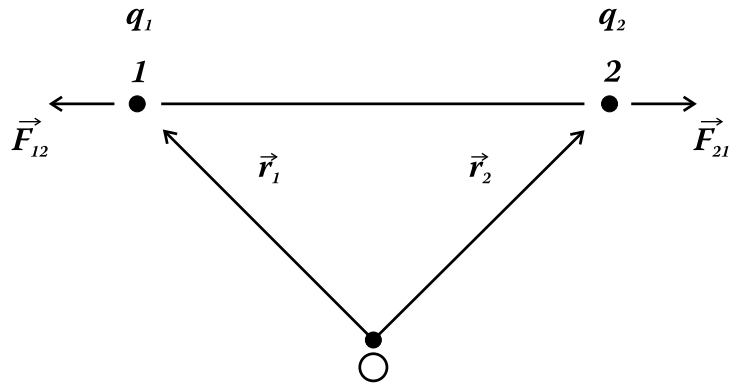


Figura 3.1: Interação eletrostática entre as cargas q_1 e q_2 .

A lei de Coulomb, ilustrada na **Figura 3.1**, estabelece que a força que a partícula 2, de carga q_2 , exerce sobre a partícula 1, de carga q_1 , é dada por

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (3.1)$$

onde $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ é a distância entre as cargas e $\hat{r} \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r$ é o versor que aponta da carga q_2 para a carga q_1 . Por outro lado, a força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2 é simplesmente $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, de acordo com o princípio da ação e reação. Nas unidades SI, a carga elétrica é medida em Coulombs(C) e

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \quad (3.2)$$

é a chamada “constante de permissividade do vácuo”. Na Equação 3.1), N indica a unidade de força (Newton) e m é a unidade de comprimento (metro). Observe que é com a lei de Coulomb que um sistema de unidades para a carga elétrica se torna viável (na realidade, unidades de medida estão sempre associadas a leis físicas. Até mesmo a definição de metro como unidade de comprimento fundamenta-se em uma lei: a de que translações ou rotações de uma barra escolhida como padrão não afetam o seu comprimento. Modernamente, define-se o metro como o comprimento percorrido pela luz em um segundo, fazendo-se apelo à lei da constância da velocidade da luz). A carga do elétron, negativa por convenção (Franklin supôs, erroneamente, que as cargas que transportam corrente elétrica em metais seriam positivas), possui o diminuto valor de $-e$, onde

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{C}. \quad (3.3)$$

O princípio da superposição

Queremos estender o exemplo anterior, envolvendo tão-somente duas cargas elétricas, para a situação mais geral de um sistema de N cargas elétricas estáticas pontuais q_1, q_2, \dots, q_N , ilustrado na **Figura 3.2**. Como determinar a força elétrica que atua sobre uma carga qualquer q_i do sistema? A resposta nos é dada pelo “princípio da superposição”: basta somar os vetores de força elétrica devidos às ações de todas as outras cargas do sistema. Em outras palavras, as cargas elétricas interagem aos pares e de maneira independente. Dessa forma, definindo \vec{F}_{ij} como sendo a força que a carga q_j

exerce sobre a carga q_i , podemos escrever que a força total sobre a carga q_i será dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} . \quad (3.4)$$

Observe que na soma acima o termo $j = i$ não é considerado, pois consistiria na força que a carga q_i exerce sobre si própria, supostamente nula. Se não fosse assim, cargas elétricas isoladas e inicialmente em repouso iriam movimentar-se espontaneamente, levando a um flagrante desacato ao princípio da inércia!

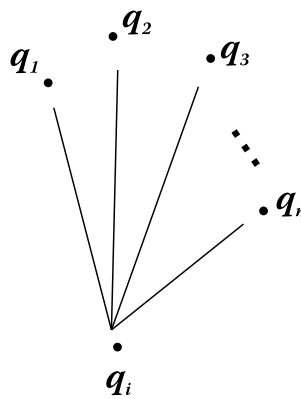


Figura 3.2: Configuração geral de N cargas pontuais.

O campo elétrico

Considere um certo sistema S de cargas elétricas q_1, q_2, \dots, q_N , fixadas em posições bem definidas do espaço $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$, respectivamente. Considere também uma carga especial fora de S , que chamaremos “carga de teste” q_0 , de posição \vec{r} . Veja a **Figura 3.3**.

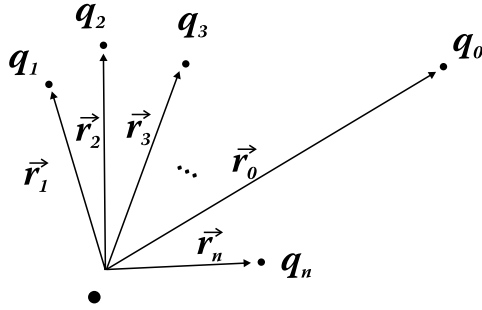


Figura 3.3: O sistema de cargas S (configuração geral de N cargas pontuais) e a carga de teste q_0 .

Vamos imaginar que a carga q_0 seja suficientemente pequena para que as forças exercidas por ela sobre as cargas q_1, q_2, \dots, q_N sejam desprezíveis e, portanto, não causem perturbações na configuração de S . O princípio da superposição nos diz que a força total que o sistema S exerce sobre a carga q_0 é

$$\vec{F}_0(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{0i}, \quad (3.5)$$

onde, pela lei de Coulomb,

$$\vec{F}_{0i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.6)$$

Como todos os termos da soma na Equação (3.5) são proporcionais a q_0 , segue-se que a força sobre q_0 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_0(\vec{r}) = q_0 \vec{E}(\vec{r}), \quad (3.7)$$

onde $\vec{E}(\vec{r})$, denotado de “campo elétrico”, é completamente independente de q_0 . Dizemos que a distribuição de cargas em S “gera” o “campo elétrico” \vec{E} no ponto \vec{r} e que a presença deste campo em \vec{r} é responsável pela força elétrica que age sobre uma carga ali posicionada. O problema central da eletrostática torna-se, portanto, determinar o campo elétrico em todo o espaço, tal como gerado por distribuições arbitrárias de carga.

A definição de campo elétrico é motivada pela idéia de que a força elétrica que age sobre uma carga qualquer tem uma origem *local*: queremos dizer com isso que é o campo elétrico \vec{E} na posição \vec{r} do espaço que “produz” a força $q\vec{E}$ que atua sobre a carga q . Poderia-se afirmar, entretanto, que a noção de campo elétrico é, de certa forma, artificial na eletrostática. Afinal, para que introduzir o conceito de campo elétrico se o que interessa mesmo são as forças coulombianas de ação a distância entre as cargas? Essa crítica é pertinente, na verdade. Para sermos absolutamente honestos, deve-se dizer que poderíamos resolver todos os problemas eletrostáticos, de fato, sem fazer qualquer menção ao campo elétrico \vec{E} (e isto não alteraria o grau de dificuldade das soluções!). O ponto crucial, entretanto, é que a lei de Coulomb refere-se a situações estáticas. A interação entre cargas elétricas não é instantânea como poderíamos crer pela lei de Coulomb; como ficará mais claro posteriormente neste curso, a interação eletromagnética propaga-se no vácuo com a velocidade da luz. Conseqüentemente, a descrição local das interações, formulada por meio de campos, é extremamente apropriada, pois fornece a base correta para o tratamento matemático dos fenômenos dinâmicos do eletromagnetismo.

Claramente, o princípio da superposição, válido para forças elétricas, também é válido para o campo elétrico. Podemos escrever, analogamente à Equação (3.5), que o campo elétrico gerado na posição \vec{r} por um sistema S de N cargas é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) , \quad (3.8)$$

onde

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.9)$$

é o campo elétrico gerado na posição \vec{r} pela carga q_i , cuja posição é \vec{r}_i .

É freqüentemente útil produzir uma representação pictórica do campo elétrico gerado por alguma distribuição de cargas, por meio de *linhas de campo*. O esboço das linhas de campo segue essencialmente duas regras elementares:

(a) o campo elétrico deve ser tangente às linhas de campo; o sentido das linhas de campo é dado pelo sentido do campo elétrico;

(b) a densidade de linhas no esboço deve ser maior onde a intensidade $|\vec{E}|$ do campo elétrico é maior. Mais rigorosamente, o perfil das linhas de campo no espaço tridimensional deve ser tal que o *fluxo de linhas* (isto é, o número de linhas por unidade de área que atravessam um determi-

nado elemento de superfície perpendicular às linhas) seja proporcional à $|\vec{E}|^2$. Esta prescrição, por enquanto um pouco obscura, irá se tornar clara em um capítulo posterior, quando discutiremos a lei de Gauss do eletromagnetismo.

Via de regra, como mostrado nos exemplos da **Figura 3.4**, linhas de campo saem de cargas positivas, enquanto terminam em cargas negativas. Nas regiões vizinhas às cargas pontuais, as linhas de campo são aproximadamente radiais. É bastante natural pensarmos em uma analogia com o escoamento de fluidos, considerando linhas de campo elétrico como “linhas de corrente” e cargas positivas e negativas como “fontes” e “sumidouros” de campo elétrico, respectivamente.

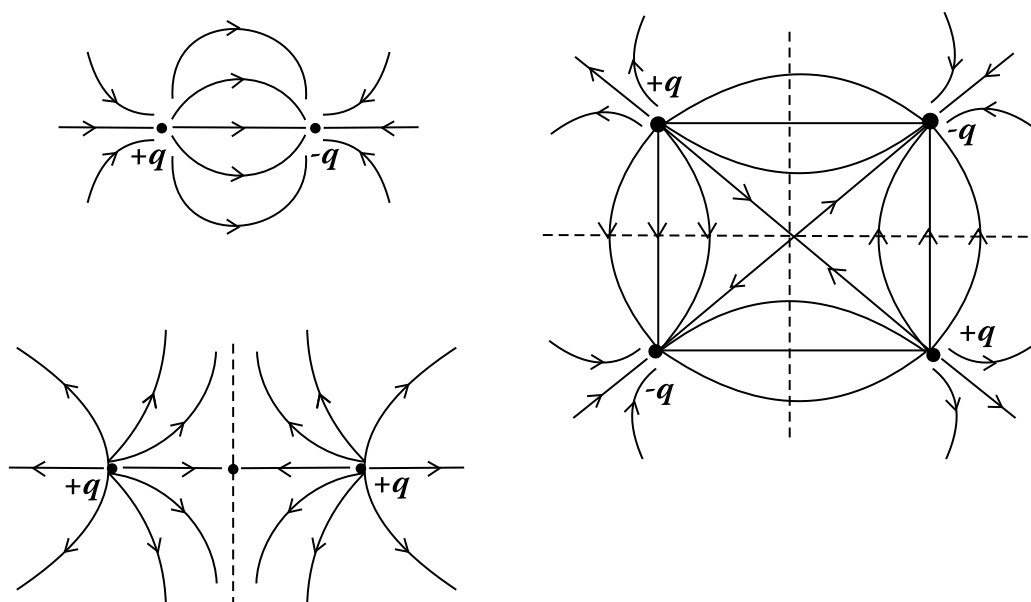


Figura 3.4: Linhas de campo associadas a configurações distintas de cargas.

O dipolo elétrico

Um dipolo elétrico é uma configuração de duas cargas elétricas pontuais q e $-q$, afastadas de uma certa distância fixa d . Sem perda de generalidade, coloquemos a carga $-q$ na origem do sistema de coordenadas, e a carga q ao longo do eixo z , em um ponto de coordenadas $(0, 0, d)$. A configuração está representada na **Figura 3.5**.

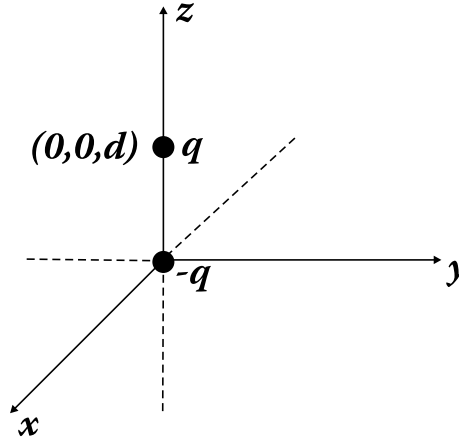


Figura 3.5: Dipolo elementar de cargas $-q$ e q .

Usando o princípio da superposição, podemos escrever o campo elétrico gerado pelo dipolo em uma posição qualquer do espaço, \vec{r} , da seguinte maneira:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_-(\vec{r}) + \vec{E}_+(\vec{r}) , \quad (3.10)$$

onde

$$E_-(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (3.11)$$

e

$$E_+(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} (\vec{r} - d\hat{z}) \quad (3.12)$$

são os campos elétricos gerados pelas cargas negativa e positiva do dipolo, respectivamente. É interessante obtermos expressões para o campo gerado pelo dipolo para regiões muito afastadas do espaço. Como o único parâmetro com dimensão de comprimento que é empregado na definição do dipolo é a distância d , regiões grandemente afastadas são, por definição, aquelas para as quais $r \gg d$.

A distância da carga q ao ponto \vec{r} , pode ser escrita como

$$|\vec{r} - d\hat{z}| = r \sqrt{1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{2zd}{r^2}} . \quad (3.13)$$

Assim, expandindo o fator $|\vec{r} - d\hat{z}|^{-3}$ [que aparece na definição de $E_+(\vec{r})$] em série de Taylor até a primeira ordem em d/r , obtemos

$$\frac{1}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} \simeq \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3zd}{r^2}\right) . \quad (3.14)$$

Substituindo esta aproximação na expressão para $\vec{E}_+(\vec{r})$ e mantendo, novamente, apenas os termos até a primeira ordem em d/r , encontramos

$$\vec{E}_+(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3zqd\hat{r}}{r^4} - \frac{qd\hat{z}}{r^3} \right). \quad (3.15)$$

Observe que aparecem, no lado direito da equação anterior, dois termos contendo o fator qd . Em um destes termos, encontramos a combinação $3zqd$ que pode ser escrita como $3\vec{r} \cdot (qd\hat{z})$. O outro termo contém o vetor $qd\hat{z}$. Este vetor tem, na realidade, uma grande importância no eletromagnetismo, valendo a pena denotá-lo com algum nome especial. Introduzimos, dessa forma, a definição do “momento de dipolo elétrico”,

$$\vec{p} \equiv qd\hat{z} \quad (3.16)$$

da configuração das cargas q e $-q$. Note que o vetor momento de dipolo está orientado da carga negativa para a carga positiva.

O campo $\vec{E}_+(\vec{r})$ pode ser escrito em termos do momento de dipolo \vec{p} como

$$\vec{E}_+(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}. \quad (3.17)$$

Usando agora, as relações (3.10), (3.11) e (3.17), obtemos, para o campo gerado pelo dipolo em regiões distantes do espaço,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}. \quad (3.18)$$

Podemos explorar o resultado assintótico em algumas situações simples, observando que:

(a) o campo elétrico gerado sobre o eixo z é paralelo ao vetor momento de dipolo. De fato, para calculá-lo fazemos $r = z$ e $\hat{r} = \hat{z}$ em (3.18), obtendo

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{z^3}, \quad (3.19)$$

(b) o campo elétrico gerado em direções perpendiculares ao eixo z é antiparalelo ao vetor momento de dipolo \vec{p} . Agora, fazemos $\hat{r} \cdot \vec{p} = 0$ em (3.18), o que leva a

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (3.20)$$

É importante observarmos que a intensidade do campo gerado pelo dipolo não decai com a distância como $1/r^2$ e sim como $1/r^3$. Essa é a “marca registrada” do campo gerado por um dipolo, indicando que a carga total da

configuração é nula (se a carga não fosse nula, o comportamento do campo para regiões muito afastadas seria efetivamente coulombiano, decaindo como $1/r^2$, como discutiremos mais adiante).

Podemos definir o vetor momento de dipolo elétrico não apenas para a configuração estudada, que consiste em duas cargas q e $-q$, mas também para um sistema arbitrário S , de cargas q_1, q_2, \dots, q_N . Definimos o momento de dipolo elétrico da distribuição de cargas S , como

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i, \quad (3.21)$$

onde \vec{r}_i denota a posição da carga q_i . Note que a definição de \vec{p} depende da escolha da origem do sistema de coordenadas, exceto no caso em que a carga total do sistema é nula (veja o Exercício 5 ao final da aula).

A importância da definição (3.21) de \vec{p} é que ela desempenha um papel inteiramente equivalente àquele estudado aqui para o caso do dipolo elétrico elementar de cargas q e $-q$. Para entender o que queremos dizer com isso, retomemos as relações (3.8) e (3.9). A condição de afastamento significa, agora, que $r \gg r_i$. Portanto, podemos implementar uma expansão em série de Taylor para a expressão do campo elétrico, análoga àquela que consideramos no caso do dipolo elementar:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3\hat{r} \cdot \vec{r}_i}{r} \right). \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.8) e (3.9), somos conduzidos à seguinte expressão assintótica:

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}, \quad (3.23)$$

onde

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.24)$$

é a carga total do sistema, e \vec{p} é dado por (3.21). A relação (3.23) nos diz que uma distribuição qualquer de cargas, se observada de posições distantes, comporta-se, em primeira ordem, como uma carga pontual Q . O termo subdominante é precisamente a contribuição de dipolo elétrico. Outras contribuições, em ordem decrescente de importância em regiões afastadas, podem ser agregadas à expansão assintótica (3.23), obtendo-se, então, a chamada “expansão em multipolos” do campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas.

Campos gerados por distribuições contínuas de carga

Em vários problemas concretos – na verdade, a grande maioria das situações realistas relacionadas ao eletromagnetismo clássico – o número de cargas elétricas envolvidas na produção de campos elétricos é enorme. Este fato sugere que lancemos mão de um tratamento contínuo, mais conveniente de um ponto de vista matemático, das distribuições de carga. Modelaremos, portanto, tais sistemas como meios contínuos, caracterizados por densidades volumétricas de carga elétrica $\rho(\vec{r})$.

Suponhamos que um determinado material isolante S (um pedaço de borracha, por exemplo) tenha sido eletrizado, apresentando em seu volume V uma densidade estática de carga $\rho(\vec{r})$, medida, no SI, em unidades de C/m^3 . Nossa tarefa, agora, é calcular o campo gerado por esta distribuição de cargas, em um ponto \vec{r} qualquer do espaço. A **Figura 3.6** ilustra o sistema S e as construções matemáticas associadas.

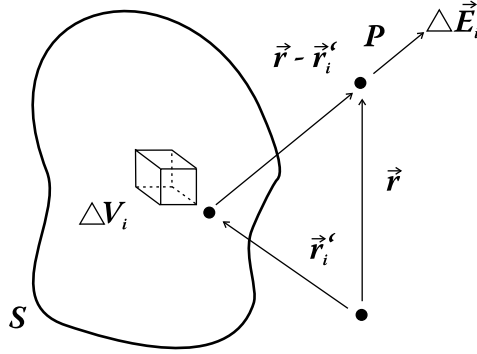


Figura 3.6: Distribuição contínua de cargas S .

O ponto O é a origem do sistema de coordenadas. Pontos sobre o sistema contínuo S possuem posições dadas por \vec{r}' . Queremos determinar o campo elétrico gerado por S em um ponto P , de posição \vec{r} . A estratégia essencial de cálculo é definir uma partição do volume de S em pequenos elementos de volume ΔV_i , como indicado na **Figura 3.6**. O campo elétrico gerado em P , devido apenas às cargas elétricas contidas no interior do elemento de volume ΔV_i , é, pela lei de Coulomb,

$$\Delta \vec{E}_i(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}'_i)\Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_i), \quad (3.25)$$

pois a carga elétrica contida em ΔV_i é, aproximadamente, $\delta q_i = \rho(\vec{r}'_i)\Delta V_i$.

Usando, agora, o princípio da superposição, podemos escrever o campo total em \vec{r} ,

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho(\vec{r}_i) \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (3.26)$$

No limite em que $\Delta V_i \rightarrow 0$, a soma anterior transforma-se em uma integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_V d^3\vec{r}' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') . \quad (3.27)$$

Em muitas circunstâncias, algumas das dimensões espaciais de objetos carregados podem ser desprezadas, como nos casos de fios e chapas delgadas, por exemplo. Introduzem-se nessas situações, como uma simplificação, as densidades linear λ e superficial σ de carga. As expressões para os campos elétricos gerados por essas distribuições são semelhantes àquela definida em (5.8). Podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\vec{r} - \vec{r}'(s)}{|\vec{r} - \vec{r}'(s)|^3} \lambda(\vec{r}'(s)) \quad (3.28)$$

e

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int ds dt \frac{\vec{r} - \vec{r}'(s, t)}{|\vec{r} - \vec{r}'(s, t)|^3} \sigma(\vec{r}'(s, t)) , \quad (3.29)$$

para os casos de distribuições lineares e superficiais de carga, respectivamente. Nas duas expressões anteriores, s e t fornecem parametrizações das curvas ou superfícies carregadas. Mais precisamente, s e t definem, localmente, em termos dos deslocamentos infinitesimais ds e dt , um sistema cartesiano de coordenadas.

Como um comentário final, enfatizamos que a expansão em multipolos, acenada anteriormente, pode ser desenvolvida para o caso de distribuições contínuas de carga. As contribuições para o campo elétrico são formalmente idênticas às expressões obtidas para distribuições discretas de carga. Não há nenhuma diferença conceitual importante entre os casos discreto e contínuo. Em particular, a expressão (3.23) continua válida, onde, agora, a carga total é dada por

$$Q = \int \int \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \quad (3.30)$$

e o vetor momento de dipolo elétrico \vec{p} é também diretamente generalizado para o caso de uma distribuição contínua de cargas (veja o Exercício 7 ao final da aula).

Atividade

Determine o campo elétrico gerado sobre o eixo z , devido a uma distribuição uniforme e linear de carga λ , definida em um anel de raio R , situado no plano xy e centrado na origem do sistema de coordenadas.

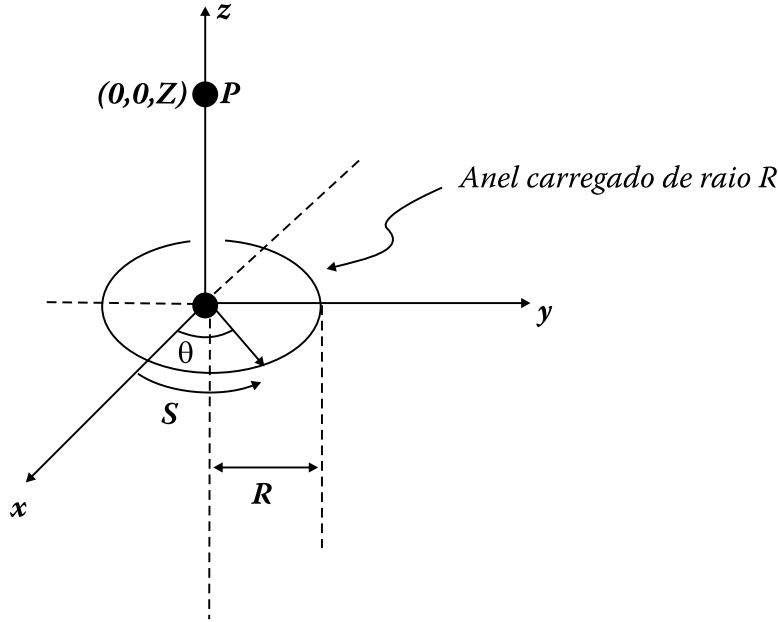


Figura 3.7: Anel carregado com densidade linear de carga λ .

Resposta Comentada

Como mostrado na **Figura 3.7**, o anel pode ser parametrizado por meio do comprimento de arco s . O anel é, então, representado parametricamente como

$$\vec{r}' = R \cos(s/R) \hat{x} + R \sin(s/R) \hat{y} . \quad (3.31)$$

Queremos obter o campo elétrico em um ponto de posição $\vec{r} = z \hat{z}$. A quantidade de carga contida no arco de comprimento ds é $dq = \lambda ds$. Dessa forma, escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} ds \frac{\lambda(z\hat{z} - R \cos(s/R)\hat{x} - R \sin(s/R)\hat{y})}{|z\hat{z} - R \cos(s/R)\hat{x} - R \sin(s/R)\hat{y}|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} ds \frac{\lambda(z\hat{z} - R \cos(s/R)\hat{x} - R \sin(s/R)\hat{y})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

As integrais envolvendo $\cos(s/R)$ e $\sin(s/R)$ anulam-se. Obtemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} . \quad (3.33)$$

O exemplo anterior é instrutivo, porque apresenta uma situação em que conseguimos determinar exatamente o campo elétrico gerado pela distribuição de cargas. Entretanto, nem sempre é possível levar a cabo um cálculo exato, principalmente em aplicações concretas de precisão (por exemplo, o perfil de campo elétrico gerado por um pára-raios ou em componentes eletrônicos), devendo-se recorrer a outros métodos, como a expansão multipolar ou até mesmo a integração numérica em computador. Note que mesmo no caso do anel, não seria possível obter o campo elétrico exatamente em pontos fora do eixo de simetria.

Atividades Finais

1. O cobre no estado sólido possui um elétron livre de condução por átomo. Determine o número de elétrons livres de cobre em um volume de 1 cm^3 . Dados: densidade do cobre: $8.9 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$; massa atômica do cobre: 63.5.
2. Imagine, agora, dois cubos de cobre eletrizados, ambos de 1 cm^3 e separados por um metro de distância. Suponha que em ambos $10^{-5}\%$ das cargas livres tenham sido removidas. Determine a força de repulsão entre os cubos.
3. Determine a força elétrica que atua sobre cada uma das cargas da **Figura 3.8**.

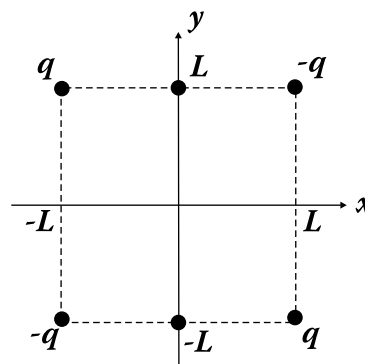


Figura 3.8: Sistema de cargas para os Exercícios 3 e 4.

4. Determine o vetor momento de dipolo elétrico para a mesma configuração de cargas do exercício anterior.
5. Mostre que o vetor momento de dipolo elétrico não depende da origem do sistema de coordenadas para uma configuração de carga total nula.
6. Determine o campo elétrico, em regiões afastadas sobre o eixo x , para a configuração de cargas mostrada a seguir.

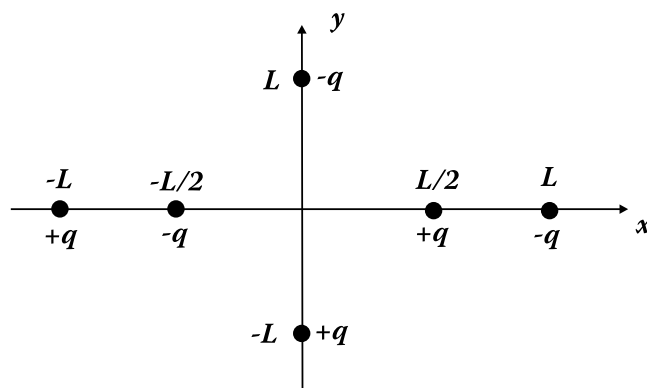


Figura 3.9: Sistema de cargas para o Exercício 6.

7. Generalize a definição geral do vetor momento de dipolo elétrico, Equação (3.21), para um sistema contínuo de cargas.
8. A partir da Equação (5.32), desenvolva a expressão assintótica para o campo elétrico gerado pelo anel, para regiões muito afastadas sobre o eixo z ($z \gg R$). Interprete o resultado obtido. Haveria contribuição de dipolo na expansão assintótica?

Respostas Comentadas

1. Um volume de 1 cm^3 de cobre tem a massa de 89 gramas, correspondendo a $89/63.5 = 1.4$ moles. Como cada mol possui 6.02×10^{23} átomos, o número de elétrons livres no cobre será $1.4 \times 6.02 \times 10^{23} = 8.44 \times 10^{23}$.
2. Usando o resultado do exercício anterior, obtemos que a carga elétrica contida no bloco será de $10^{-5}\%$ de $8.44 \times 10^{23} \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = 1.35 \times 10^{-2} \text{ C}$. Pela lei de Coulomb, achamos a força de repulsão entre os blocos: $(1.35 \times 10^{-2})^2 / (4\pi\epsilon_0) = 1.64 \times 10^6 \text{ N}$. Essa força equivaleria

ao peso de 164 toneladas!. Esse exercício mostra como a condição de neutralidade elétrica é satisfeita com grande precisão nos objetos que nos cercam cotidianamente.

3. Força sobre a carga do canto superior esquerdo:

$$\vec{F}_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8L^2} \left[\hat{x} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right) + \hat{y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \right] ;$$

Força sobre a carga do canto superior direito:

$$\vec{F}_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8L^2} \left[\hat{x} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) + \hat{y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \right] ;$$

Força sobre a carga do canto inferior esquerdo:

$$\vec{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8L^2} \left[\hat{x} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right) - \hat{y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right) \right] ;$$

Força sobre a carga do canto inferior direito:

$$\vec{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8L^2} \left[\hat{x} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) + \hat{y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \right] .$$

4. $\vec{p} = 0$.

5. O vetor momento de dipolo elétrico é definido como

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i .$$

Transladar a origem de coordenadas significa fazer $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{r}_0$. Substituindo essa expressão na definição anterior, obtemos:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \vec{r}_0 \sum_i q_i = \vec{p} ,$$

pois estamos supondo que $\sum_i q_i = 0$.

6. A carga total do sistema é nula. O vetor momento de dipolo elétrico é $\vec{p} = -qL\hat{x} - 2qL\hat{y}$. Para calcular o campo em regiões afastadas sobre o eixo x , usamos a Expressão (3.23), com $\hat{r} = \hat{x}$, obtendo

$$\vec{E}(x) = \frac{-3qL\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 x^3} .$$

7. $\vec{p} = \int \int \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r}$.

8. O campo elétrico assintótico é dado por

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z} ,$$

onde $Q = 2\pi R\lambda$ é a carga total do anel. Não há momento de dipolo elétrico em relação à origem (centro do anel).

Resumo

Cargas elétricas interagem entre si, em regimes estáticos, de acordo com a lei de Coulomb. Podemos considerar a eletrostática dos sistemas discretos/contínuos de cargas como um problema completamente resolvido, idealmente, por meio do uso do princípio da superposição e dos conceitos auxiliares de campo elétrico e linhas de campo elétrico. Em particular, é possível desenvolver uma série sistemática de aproximações assintóticas para os campos elétricos gerados por distribuições discretas/contínuas de carga, para regiões distantes do espaço. Em primeira ordem, as expansões fornecem campos coulombianos; a próxima ordem de aproximação, levando a correções do perfil coulombiano, baseia-se na definição do vetor de momento de dipolo elétrico, uma quantidade vetorial de grande importância no eletromagnetismo.

Aula 4 – A lei de Gauss

Metas da aula

- introduzir a lei de Gauss para o campo eletrostático;
- utilizar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico de configurações com algum tipo de simetria.

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- calcular a densidade de carga em uma região do espaço a partir do conhecimento do campo elétrico;
- calcular o fluxo do campo elétrico para algumas configurações de carga com simetria.

Pré-requisito

- Para melhor compreensão desta aula, você deve rever as duas aulas anteriores.

Introdução

Como você viu na aula sobre o campo elétrico, a força eletrostática entre duas cargas é dada pela lei de Coulomb. A partir da lei de força entre as duas cargas e do princípio de superposição, definimos o campo elétrico, que nos permite calcular a força em uma carga de teste colocada em uma posição arbitrária.

Nesta aula, vamos ver como podemos escrever a lei de Coulomb de uma forma mais geral, o que nos permitirá calcular o campo elétrico de distribuições de carga com algum tipo de simetria, como a simetria axial ou esférica.

O fluxo do campo elétrico

Como vimos na Aula 2, dado um campo vetorial qualquer, podemos calcular o fluxo deste campo por uma superfície arbitrária \mathcal{S} . Agora calcularemos o fluxo do campo elétrico por uma superfície qualquer. Para isso, utilizaremos o teorema de Gauss.

Inicialmente consideremos apenas uma carga q localizada na origem de nosso sistema de coordenadas. Podemos fazer isso sem perda de generalidade, pois uma vez que o fluxo é um escalar, ele não depende de como estamos nos orientando nem de como estamos estabelecendo o nosso sistema de coordenadas. Sabemos que o campo elétrico é dado pela lei de Coulomb,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (4.1)$$

Calculemos a divergência deste campo em um ponto qualquer *diferente da origem*. Da expressão para o campo elétrico (4.1), vemos imediatamente que ele possui apenas a componente radial. Podemos, então, usar a expressão da divergência em coordenadas esféricas que estudamos na Aula 2

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \quad (4.2)$$

junto com o fato de que as componentes angulares do campo elétrico se anulam, $E_\theta = E_\phi = 0$, obtendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} \quad (4.3)$$

Agora ficou fácil calcular a divergência! Utilizando a forma do campo elétrico (4.1), obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2})}{\partial r} = 0 \quad (4.4)$$

ou seja, a divergência do campo elétrico é identicamente nula em todos os pontos fora da origem!

Devemos deixar claro que é fora da origem, porque se você olhar com cuidado a expressão do cálculo da divergência, verá que, na origem, temos uma expressão mal definida, do tipo $\frac{0}{0}$. Há uma maneira matemática de tratar esse tipo de operação, chamada *teoria das distribuições*.

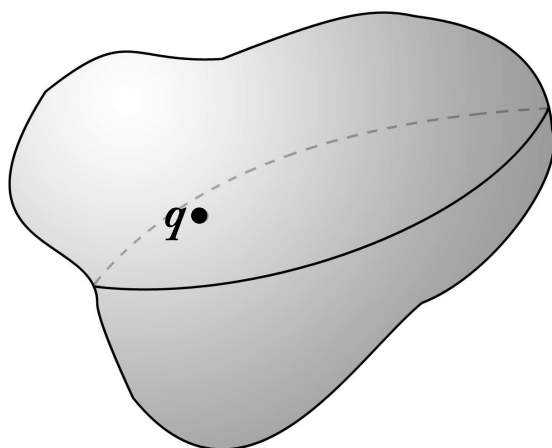


Figura 4.1: Superfície arbitrária, pela qual queremos calcular o fluxo de uma carga em seu interior.

Como podemos usar o teorema de Gauss para calcular o fluxo por uma superfície qualquer? Suponha que queiramos calcular o fluxo pela superfície da **Figura 4.1**. Façamos o seguinte: consideremos uma superfície esférica muito grande, com centro na carga, e que envolva completamente a superfície S , como mostra a **Figura 4.2**.

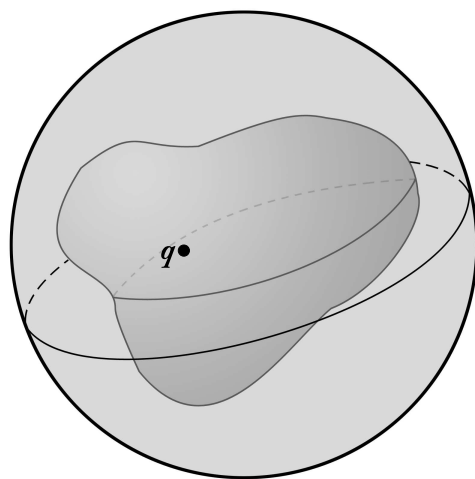


Figura 4.2: Superfície esférica S_0 que contém a superfície S .

As duas superfícies \mathcal{S} e \mathcal{S}_0 definem um volume, no qual podemos usar o teorema de Gauss. Note que, ao calcularmos o fluxo por essa superfície, temos de inverter o sentido do vetor normal na superfície \mathcal{S} , uma vez que o vetor normal à superfície aponta para fora do volume, por definição. Pelo teorema de Gauss, temos que

$$\oint_{\mathcal{S}_t} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (4.5)$$

O lado direito desta equação é fácil de ser calculado: como sabemos que a divergência do campo elétrico é zero, o lado direito é igual a zero! O lado esquerdo é constituído de duas partes: uma é igual a **menos** o fluxo do campo elétrico pela superfície \mathcal{S} que queremos calcular, e o outro é o fluxo pela superfície esférica que introduzimos. O fluxo pela superfície \mathcal{S} é difícil de encontrar, mas o fluxo pela superfície esférica é direto. Como sabemos que a soma dos dois se anula, podemos encontrar o fluxo pela superfície \mathcal{S} calculando o fluxo pela superfície \mathcal{S}_0 . O fluxo pela superfície \mathcal{S}_0 é dado por

$$\oint_{\mathcal{S}_0} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_{\mathcal{S}_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.6)$$

Concluimos, portanto, que o fluxo pela superfície arbitrária \mathcal{S}_0 é dado por

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

O que aconteceria se a carga *não* estivesse no interior da superfície \mathcal{S} ?

Até agora, sabemos que o fluxo do campo elétrico por uma superfície qualquer que contém uma carga q é igual a q/ϵ_0 . Suponha agora que a carga q se encontra fora do interior da superfície \mathcal{S} . Procedendo como antes, podemos envolver esta carga e a superfície por uma grande superfície esférica. Sabemos duas coisas: 1) o fluxo pela grande superfície esférica é igual a q/ϵ_0 e 2) o fluxo definido pelas duas superfícies, a esférica e a inicial, tem de ser igual a q/ϵ_0 , porque, como mostramos, o fluxo por uma superfície é igual à carga que está em seu interior dividida por ϵ_0 . Concluimos, então, que o fluxo pela superfície \mathcal{S} tem de ser zero! Assim temos a seguinte regra:

$$\Phi = \begin{cases} q/\epsilon_0, & \text{se a carga está no interior de } \mathcal{S}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Podemos, agora, lançar mão do princípio da superposição para calcular o fluxo de uma distribuição arbitrária de cargas por uma superfície qualquer. Se a distribuição de carga for definida por uma densidade de carga

Lembre que o sinal negativo aqui é devido ao fato de termos invertido o sentido do vetor normal à superfície \mathcal{S} .

volumétrica $\rho(\vec{r})$, então, no interior de um pequeno volume $\Delta\mathcal{V}$ temos uma carga igual a $\rho(\vec{r})\Delta\mathcal{V}$. Como, pelo princípio da superposição, o campo elétrico em um ponto é a soma dos campos elétricos de cada elemento de carga, o fluxo pela superfície \mathcal{S} é a soma dos fluxos. Portanto, o fluxo total é dado pela carga total que se encontra no interior de uma superfície, dividida por ϵ_0

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.9)$$

Você pode estar se perguntando: “A Equação (4.9) é a mesma coisa que escrevemos antes? Só mudaram o q pelo Q !” É verdade, elas parecem a mesma coisa. Mas há uma grande diferença: a primeira equação foi escrita para uma carga pontual q e a segunda para uma distribuição de carga volumétrica qualquer.

Consideremos agora uma distribuição de carga volumétrica qualquer $\rho(\vec{r})$ e um pequeno volume $\Delta\mathcal{V}$ ao redor do ponto \vec{r} . Aplicando a nossa regra, sabemos que o fluxo do campo elétrico pela superfície do pequeno volume $\Delta\mathcal{V}$ é dado por $\rho(\vec{r})\Delta\mathcal{V}/\epsilon_0$, já que a carga no interior de $\Delta\mathcal{V}$ é $\rho(\vec{r})\Delta\mathcal{V}$. Mas, pelo teorema de Gauss, sabemos que este fluxo é dado por

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{\Delta\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \approx \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Delta\mathcal{V} \quad (4.10)$$

onde usamos, na última passagem, o fato de que o volume é muito pequeno. Concluimos então que, no limite de um volume muito pequeno, temos

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \Delta\mathcal{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Delta\mathcal{V} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4.11)$$

Esta última equação merece destaque especial, e é uma das equações de Maxwell. É a chamada *lei de Gauss*

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}} \quad (4.12)$$

Esta é uma das 4 equações fundamentais do eletromagnetismo. A seguir, exploraremos algumas de suas conseqüências.

Aplicações da Lei de Gauss

Uma vez que temos formulações diferencial e integral da lei de Gauss, podemos usá-las para calcular o campo elétrico em distribuições de carga com algum tipo de simetria. O que queremos dizer por “algum tipo de simetria” ficará mais claro no decorrer desta aula. A seguir, veremos como usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico de uma distribuição de carga com simetria esférica, axial ou plana.

Distribuição esférica

Inicialmente consideraremos uma casca esférica de raio a , com uma distribuição de carga uniforme, de densidade σ . Isto significa que a carga total na superfície da esfera é dada por $Q = 4\pi a^2 \sigma$. Queremos calcular o campo elétrico em todo o espaço, fora e dentro da casca. Como proceder?

Aqui vamos usar a lei de Gauss e a simetria do problema, ou seja, antes de aplicarmos a lei de Gauss, analisaremos a simetria do problema para simplificar a expressão do campo elétrico.

Como o problema tem simetria esférica, o campo elétrico *só pode ter uma componente radial, e que depende de r apenas*. Pois suponha inicialmente que o campo elétrico possui uma componente não radial. Isso significa que uma certa direção foi escolhida. Mas como o problema tem simetria esférica, se você girar a esfera ao redor de um eixo qualquer, essa componente “não radial” do campo elétrico gira, mas a situação final é, fisicamente, idêntica à inicial. A conclusão é que o campo elétrico só pode ter componente radial. Suponha agora que o valor da componente radial dependa da direção que você escolher. Mais uma vez, se você girar a esfera ao redor de seu eixo, o valor do campo elétrico naquele ponto específico do espaço muda, mas a distribuição de carga continua a mesma. Podemos concluir, portanto, que o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} \quad (4.13)$$

onde $r = ||\vec{r}||$, e $f(r)$ é uma função desconhecida. Podemos agora usar a lei de Gauss em sua forma integral para uma superfície esférica \mathcal{S} de raio $R > a$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{r} dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow f(R)4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow f(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} Q \quad (4.14)$$

Encontramos a forma da função $f(R)$ fora da casca esférica. No interior da casca esférica, há uma pequena mudança: quando calcularmos o fluxo, veremos que a carga que se encontra no interior desta superfície de integração é zero, ou seja, para $R < a$ temos

$$f(R)4\pi R^2 = 0 \Rightarrow f(R) = 0. \quad (4.15)$$

Destas duas expressões, concluímos que o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} Q \hat{r} & \text{se } R > a \\ 0 & \text{se } R < a \end{cases} \quad (4.16)$$

Da expressão do campo elétrico, concluímos que o campo fora da casca esférica é exatamente o mesmo de uma carga Q localizada no centro da casca: não há como dizer se o campo é gerado por uma casca ou por uma carga pontual. Já no interior da casca esférica o campo é identicamente nulo. Este é um resultado que você já deve conhecer do estudo do campo gravitacional, onde se mostra que o campo gravitacional no interior de uma casca esférica é nulo. O resultado vale tanto para o campo gravitacional quanto para o campo elétrico devido ao fato de ambas as leis de força, lei de Newton para o campo gravitacional e de Coulomb para o campo elétrico, possuírem a mesma dependência matemática com a distância. Ambas são leis de inverso do quadrado da distância.

Na dedução que acabamos de apresentar, utilizamos a lei de Gauss em sua formulação integral. É instrutivo ver como proceder utilizando a lei de Gauss em sua forma diferencial. Neste caso, teríamos de resolver a seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (4.17)$$

para $r > 0$ e $r < 0$. Devemos ter um cuidado especial ao considerar o ponto *exatamente* sobre a superfície da casca esférica, que é quando $r = a$. Além disso, devemos utilizar a simetria esférica em nossa solução, ou seja, $\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$. Esta equação é uma forma de dizer que o campo elétrico depende apenas do módulo do vetor \vec{r} .

Usando a expressão da divergência de um campo vetorial em coordenadas esféricas, obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 f(r)}{\partial r} = 0 \quad (4.18)$$

ou seja, tanto para fora da casca quanto para dentro, temos

$$r^2 f(r) = C_{\pm} \Rightarrow f(r) = \frac{C_{\pm}}{r^2} \quad (4.19)$$

onde C_{\pm} é uma constante de integração a ser determinada. O subscrito \pm indica que temos uma constante de integração C_+ fora da casca e C_- dentro.

A questão agora é como calcular estas constantes. Podemos estabelecer a constante no interior da casca diretamente: como o campo no centro da casca tem de ser nulo, a constante $C_- = 0$. Aliás, por que o campo é nulo no centro da casca? Reflita e convença-se disso. Resta calcular a constante C_+ , o que pode ser feito usando a lei de Gauss em sua forma integral, por exemplo. Mas isso seria um “uso disfarçado” do método anterior... Vamos, portanto, evitar esta rota e calcular C_+ de outra maneira.

Considere uma distribuição qualquer de cargas localizadas em uma região finita do espaço, por exemplo no interior de uma esfera de raio a . Se esta distribuição tem carga total Q , então no limite em que $r \gg a$, o campo elétrico desta distribuição é dado por $\vec{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) + \dots$, onde “...” representam correções ao primeiro termo. No caso da casca esférica, sabemos que a fórmula do campo elétrico é *exatamente* $\vec{E} = C_+/r^2$ para qualquer valor de r , o que nos permite concluir que $C_+ = 1/(4\pi\epsilon_0)$, e que os termos “...”, portanto, devem ser identicamente nulos.

Atividade

Considere uma distribuição de carga esfericamente simétrica dada por $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, para $0 < r < R$, e nula para $r > R$. Calcule o campo elétrico em todo espaço.

Resposta Comentada

Da simetria do problema sabemos que o campo elétrico deve ser da forma $\vec{E}(\vec{r}) = e(r)\hat{r}$, onde $e(r)$ é uma função que queremos determinar. Note que a carga total é $Q_0 = \rho_0 4\pi R^3/3$. Seguindo o mesmo método que acabamos de apresentar para o caso de uma casca esférica, temos que, para $r > R$ a lei de Gauss fornece

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{r} dA = e(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \implies e(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.20)$$

onde \mathcal{S} é uma superfície esférica de raio r . Assim, para $r > R$, o campo elétrico é o mesmo de uma carga Q_0 no centro da esfera.

Para $r < R$ devemos levar em consideração que uma superfície gaussiana esférica de raio r , \mathcal{S}_r , não contém toda a carga da distribuição, mas apenas $Q(r) = \rho_0 4\pi r^3/3 = Q_0 r^3/R^3$. Aplicando a lei de Gauss, obtemos

$$\oint_{\mathcal{S}_r} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{r} dA = e(r) 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \implies e(r) = \frac{Q_0 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (4.21)$$

Note que o campo elétrico no interior da distribuição de carga cresce linearmente, sendo 0 no centro, até o valor $Q_0/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ na superfície, e depois decai com o inverso do quadrado de r .

Fio infinito

Uma outra aplicação importante da lei de Gauss é no cálculo do campo elétrico de um fio infinito reto, com uma distribuição de carga uniforme. Neste caso, devemos usar a simetria *axial* do problema: Se nos colocarmos no eixo do fio e girarmos de um ângulo qualquer, nada muda. Além disso, se subirmos ou descermos pelo fio, o campo elétrico deve ser o mesmo, uma vez que o fio é infinito. Sem fazer cálculo algum, chegamos à conclusão de que o campo elétrico de um fio infinito deve ser da forma $\vec{E}(\vec{r}) = f(\rho)\hat{\rho}$, em coordenadas cilíndricas.

Utilizaremos, desta vez, apenas a lei de Gauss em sua forma integral. Como o fio está uniformemente carregado, isso significa que, se um pedaço do fio de comprimento L_0 tem carga Q_0 , então um pedaço de comprimento $2L_0$ tem carga $2Q_0$, e assim por diante. Existe uma relação de proporcionalidade entre o comprimento do fio e a quantidade de carga elétrica nele. Isso pode ser escrito em geral da seguinte forma: $Q(L) = \lambda L$, onde λ tem unidade de carga por unidade de comprimento. Em termos do exemplo que demos, $\lambda = Q_0/L_0$.

A superfície gaussiana que consideraremos é um cilindro de altura H e raio R , com eixo de simetria coincidindo com o fio, como mostra a **Figura 4.3**.

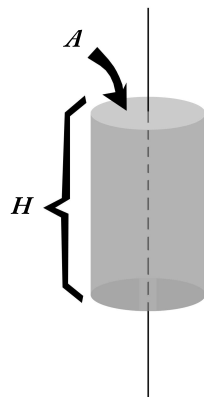


Figura 4.3: Superfície gaussiana para o fio infinito.

Calculemos o fluxo do campo elétrico por esta superfície. Pelas tampas superior e inferior, o fluxo é 0, simplesmente porque o campo elétrico é, por simetria, paralelo a essas superfícies, e portanto perpendicular ao vetor normal delas. Resta, então, o fluxo do campo pela superfície encurvada do cilindro. Matematicamente, queremos

$$\oint_{S_0} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{\rho} dA = \oint_{S_0} f(\rho) \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} dA = \oint_{S_0} f(\rho) dA = 2\pi RH f(R) \quad (4.22)$$

Como a lei de Gauss nos diz que este fluxo é igual à carga em seu interior dividida por ϵ_0 , e a carga no interior da superfície gaussiana é λH , temos finalmente

$$2\pi RH f(R) = \frac{\lambda}{\epsilon_0} H \implies f(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (4.23)$$

O campo elétrico é dado, então, por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad (4.24)$$

Note um aspecto interessante dessa fórmula. Apesar de o campo elétrico de uma carga pontual, ou mesmo de uma distribuição de cargas localizada em uma região finita do espaço “cair” com $1/r^2$, para um fio infinito o campo depende da coordenada ρ como $1/\rho$, que é mais lento do que $1/r^2$: se sua distância ao fio dobrar, o campo cai à metade, e não a um quarto.

O plano uniformemente carregado

Como última aplicação da lei de Gauss, consideraremos agora um plano com uma distribuição de carga uniforme. Isso significa que uma área A qualquer do plano tem uma quantidade de carga proporcional a esta área, ou matematicamente $Q = \sigma A$, onde σ é a densidade de carga superficial, e tem dimensão de carga por unidade de área. Escolhamos nossos eixos de tal forma que o plano seja perpendicular ao eixo z e passe pela origem das coordenadas.

Você já deve ter pensado em qual será o nosso primeiro passo: explorar a simetria do problema. Como temos um plano uniformemente carregado, se girarmos o plano, nada deve mudar. Isso significa que, de cada lado do plano, o campo elétrico *deve ser perpendicular ao plano* e, mais uma vez por simetria, ele deve apontar em direções opostas para lados opostos do plano. Matematicamente escrevemos, $\vec{E}(\vec{r}) = f(z)\hat{z}$, onde $f(z)$ é uma função ímpar. Tudo o que resta a fazer é encontrar a função $f(z)$. Convença-se de que o campo não tem componentes x ou y antes de prosseguir.

Para isso, consideremos a seguinte superfície gaussiana: uma superfície cilíndrica que intercepta o plano, de altura $2H$ e seção reta de área A , cortado simetricamente pelo plano, como mostra a **Figura 4.4**.

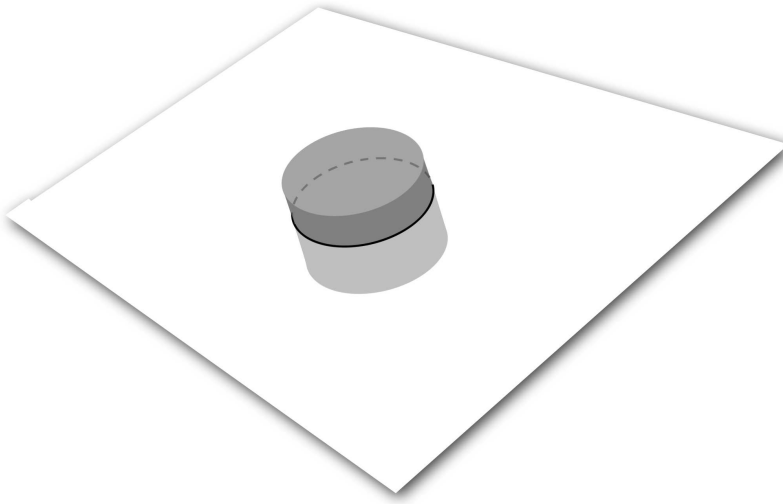


Figura 4.4: Superfície gaussiana para o plano uniformemente carregado.

A carga no interior do cilindro é a carga da “fatia” do plano que foi cortada, e é dada por $Q = \sigma A$. O fluxo pela lateral do cilindro se anula, e sobram apenas as contribuições das tampas: $2f(H)A$. Pela lei de Gauss temos $2f(H)A = \sigma A/\epsilon_0$, o que nos dá $f(H) = \sigma/(2\epsilon_0)$, e o campo é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma/(2\epsilon_0)\hat{z} & \text{para } z > 0 \\ -\sigma/(2\epsilon_0)\hat{z} & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

ou seja, o campo é constante e perpendicular ao plano. Que o campo era perpendicular ao plano já sabíamos, devido a considerações de simetria, mas é surpreendente que o campo seja constante; afinal de contas, o campo de cada carga varia com o inverso do quadrado da distância. O que acontece aqui é que, à medida que nos afastamos do plano, apesar de a contribuição das cargas elétricas distribuídas no plano ficar cada vez mais fraca, elas se “alinham” melhor com a perpendicular, e, no caso da distribuição uniforme, isso se dá de tal forma a compensar o efeito de enfraquecimento do campo com a distância.

Atividade

Considere dois planos uniformemente carregados, ambos com densidade superficial de carga σ . Os dois planos são paralelos e estão separados por uma distância d . Calcule o campo elétrico em todo o espaço.

Resposta Comentada

Neste caso, basta aplicar o princípio da superposição à solução que acabamos de encontrar. Entre os dois planos, o campo dos dois se cancelam, e o resultado é $\vec{E}_{dentro} = 0$. Do “lado de fora”, o campo se soma e temos $\vec{E}_{fora} = \sigma/\epsilon_0$, já que os campos se somam.

Na verdade, há um argumento mais simples ainda para entender por que o campo elétrico não depende da posição: análise dimensional. Parece muito simples, e é mesmo! Veja bem: o campo elétrico tem unidade de força por unidade de carga. No caso do plano, o campo elétrico no ponto de coordenada $(0, 0, z)$, que é o ponto mais geral que podemos considerar, só pode depender de σ , ϵ_0 e z , pois estes parâmetros determinam completamente o nosso problema. Portanto, devemos construir uma expressão que tenha unidade de campo elétrico a partir destes três parâmetros. Mas existe apenas uma expressão com essa propriedade! É σ/ϵ_0 . Assim, o campo elétrico tem de ser uma constante numérica (adimensional), que não se pode determinar a partir da análise dimensional multiplicada por σ/ϵ_0 , que é exatamente o que achamos, e explica por que o campo elétrico não depende da posição.

O que ocorre neste caso é que não há outra grandeza física com unidade de comprimento, ou seja, *não há outra escala* no problema. Uma outra situação na qual um argumento de análise dimensional funciona é no caso do fio infinito, como você verá nas atividades. No caso em que há uma outra escala no problema, o argumento de análise dimensional não é tão poderoso. Por exemplo, no caso da casca esférica temos como parâmetros σ , ϵ_0 , r (a distância do ponto em que queremos calcular o campo elétrico) e R (o raio da casca). Neste caso, por análise dimensional, podemos dizer que o campo deve ser dado por $f(r/R)\sigma/\epsilon_0$, e devemos resolver algumas equações para descobrir que $f(r/R) = R^2/r^2$. Verifique que essa é a função correta para o problema da casca esférica.

As três aplicações que acabamos de apresentar mostram algo que deve ser apreciado com atenção. Apesar de o campo elétrico de uma carga pontual cair com a distância como $1/r^2$, uma *distribuição de carga* pode ter um comportamento bem diferente. Acabamos de ver que, para uma casca esférica, o

campo fora dela é o mesmo de uma carga pontual em seu centro, e no interior é nulo. Para um fio infinito, o campo se comporta como $1/r$, e para um plano uniformemente carregado o campo é constante. Isso mostra que, dependendo da distribuição de carga, o campo elétrico total pode ter um comportamento bem diferente do comportamento de cada carga individual.

Vale ressaltar a importância da simetria nas aplicações da lei de Gauss. Nas três aplicações que acabamos de fazer, o uso das simetrias de cada problema foi crucial, e foi o que permitiu deduzir a forma matemática do campo, utilizando a lei de Gauss.

O Teorema de Earnshaw

Uma aplicação simples, porém poderosa, da lei de Gauss, consiste em estabelecer a possibilidade de configurações em equilíbrio de cargas elétricas. Será possível distribuir cargas elétricas positivas e negativas de tal forma que elas fiquem em equilíbrio? A resposta é dada pelo teorema de Earnshaw: não existem configurações estáticas de cargas elétricas em equilíbrio.

A demonstração do teorema de Earnshaw é por absurdo.

Em uma demonstração por absurdo, partimos do princípio de que a proposição que queremos demonstrar é falsa e chegamos a algum absurdo. Isso mostra que o nosso ponto de partida está errado, e que, portanto, a proposição original é verdadeira.

Suponha que exista uma configuração de cargas elétricas em equilíbrio estático. Isso significa que, se considerarmos uma carga específica q , que supomos ser maior que zero sem perda de generalidade, pois se for negativa basta inverter o sinal de todas as cargas do sistema, o campo elétrico de todas as *outras* cargas é tal que, se a carga q se mover em qualquer direção, ela sofrerá uma força restauradora, ou seja, o campo elétrico das outras cargas aponta para “dentro” de uma pequena esfera ao redor de q . Retirando esta carga de nossa configuração, isso significa que o fluxo do campo elétrico *das outras cargas* por esta pequena esfera é diferente de zero; pela lei de Gauss, isso significa que há uma carga no interior desta esfera! Chegamos a um absurdo, estabelecendo o teorema de Earnshaw.

Uma das aplicações importantes do teorema de Earnshaw está no entendimento da estrutura da matéria. Já era sabido, antes da mecânica quântica, que átomos eram constituídos de partículas positivas e negativas.

Pelo teorema de Earnshaw, estas cargas não poderiam estar em equilíbrio estático e, portanto, deveriam se mover ou então estar sujeitas a forças de outra natureza. No primeiro caso, surge um problema: se as cargas se movem, a radiação é emitida, o que implica o colapso dos átomos. Na tentativa de resolver este problema, inventaram-se outras forças de natureza não elétrica que pudessem explicar a estabilidade dos átomos. A explicação correta, porém, só veio mais tarde, no início do século XX, com a mecânica quântica.

A lei de Gauss é uma das equações de Maxwell em sua forma final. Isso significa que, mesmo quando passarmos para o estudo de cargas em movimento, ela continua valendo exatamente como no caso estático.

Atividades Finais

1. Uma carga q se encontra no centro de um cubo de lado L . Calcule o fluxo do campo elétrico por uma das faces do cubo.
2. Uma carga se encontra em um vértice de um cubo de lado L . Calcule o fluxo do campo elétrico por cada uma das faces do cubo.
3. Uma carga q se encontra em $(0, 0, d)$. Calcule o fluxo do campo elétrico pelo plano xy ($z = 0$).
4. Deduza a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss.
5. Se o universo tivesse duas dimensões espaciais, em vez de três, qual seria a dependência do campo elétrico com a distância?
6. Considere um fio infinito ao longo do eixo z , uniformemente carregado, com densidade de carga linear λ . Usando argumentos de simetria e análise dimensional, mostre que o campo elétrico do fio é dado por $\vec{E} = \alpha\lambda/(\epsilon_0 r)\hat{\rho}$, onde α é uma constante numérica.

Respostas Comentadas

1. Pela lei de Gauss sabemos que o fluxo pelas seis faces do cubo é igual a q/ϵ_0 , independentemente da posição exata da carga. Basta estar no interior do cubo. Se a carga está no centro, então, por simetria, o fluxo pelas seis faces é igual, e o fluxo por uma face é dado por $q/(6\epsilon_0)$.
2. O fluxo por cada uma das faces que se encontra no vértice em que está localizada a carga é zero, porque o campo elétrico tangencia cada uma

dessas faces, sendo portanto ortogonal ao vetor normal de cada uma delas. Por simetria, o fluxo por cada uma das outras faces é Φ_0 , que ainda devemos calcular. A maneira mais simples de efetuar este cálculo é “completando” um cubo maior de lado $2L$, com a carga no centro, como mostra a **Figura 4.5**. Como sabemos que o fluxo por cada face do cubo maior é $q/(6\epsilon_0)$, o fluxo por uma das faces opostas é dado por $q/(24\epsilon_0)$.

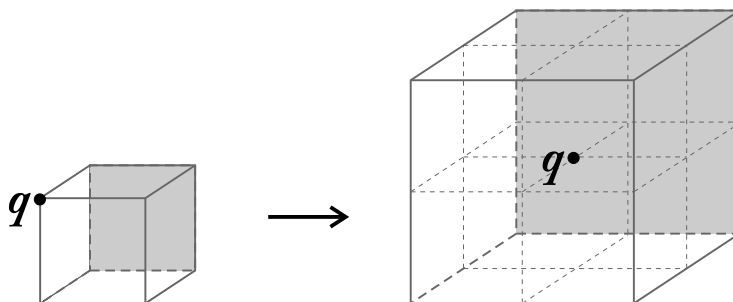


Figura 4.5: Completando o cubo.

3. Considere uma esfera de raio $d/2$ centrada em $(0, 0, d)$. O fluxo pelo hemisfério inferior é igual ao fluxo pelo plano $z = 0$ (por quê?) e, portanto, $\Phi = q/(2\epsilon_0)$.
4. A lei de Gauss diz que o fluxo do campo elétrico por uma superfície é igual a Q/ϵ_0 , onde Q é a carga no interior da superfície. Se considerarmos uma carga pontual, por simetria, o seu campo elétrico deve ser radial, $\vec{E}(\vec{r}) = e(r)\hat{r}$, onde $r = \|\vec{r}\|$ e $e(r)$ é uma função a ser determinada. Aplicando a lei de Gauss a uma superfície esférica de raio R com a carga no centro, obtemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{r} dA = e(R)4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies e(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (4.26)$$

5. Por simetria, o campo elétrico só depende da distância e é radial, $\vec{E}(\vec{r}) = e(r)\hat{r}$. Aplicando a lei de Gauss neste mundo bidimensional, considerando uma circunferência de raio R como nossa “superfície” gaussiana, obtemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{r} dA = e(R)2\pi R = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies e(R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (4.27)$$

Note a semelhança com o caso do fio infinito: a simetria axial implica o fato de o campo elétrico não depender da coordenada z , o que torna o problema efetivamente bidimensional.

6. As unidades de λ , r e ϵ_0 são, respectivamente, CL^{-1} , L e $M^{-1}L^{-3}T^{-2}C^{-2}$, onde M , L , T , C são as unidades de massa, comprimento, tempo e carga. A única combinação que tem unidade de campo elétrico, que é $MLT^{-2}C^{-1}$, é $\lambda/(\epsilon_0 r)$.

Resumo

A partir da lei de Coulomb podemos calcular o fluxo do campo elétrico de uma carga por uma superfície qualquer. Usando o princípio da superposição, o resultado para uma carga pode ser generalizado para uma distribuição contínua de cargas, descrita por uma densidade $\rho(\vec{r})$. O fluxo é *sempre* igual a Q/ϵ_0 , onde Q é a carga total no interior da superfície gaussiana. Esta é a formulação integral da lei de Gauss.

Considerando um volume infinitesimal, é possível escrever uma equação diferencial para o campo elétrico, relacionando a divergência do campo elétrico com a densidade carga total, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Esta é a formulação diferencial da lei de Gauss. As duas formulações são equivalentes mas, dependendo do problema que estamos tratando, uma ou outra pode ser mais conveniente.

No caso de distribuições de carga com algum tipo de simetria, podemos encontrar o campo elétrico em todo espaço aplicando a lei de Gauss em sua formulação integral. Exemplos típicos são distribuições com simetria esférica, axial, ou um plano uniformemente carregado.

Estes resultados mostram como o comportamento de uma distribuição de cargas pode ser diferente do comportamento de uma carga isolada.

Uma outra aplicação muito importante da lei de Gauss está no estudo de configurações de cargas em equilíbrio estático. O teorema de Earnshaw mostra que não existe uma configuração de cargas em equilíbrio estático na qual as únicas forças que atuam são forças elétricas. Este resultado, uma consequência simples da lei de Gauss, tem implicações profundas na estrutura da matéria, cuja estabilidade só pode ser compreendida sob a luz da mecânica quântica.

Aula 5 – Energia eletrostática e o potencial elétrico

Metas da aula

- definir o potencial eletrostático;
- discutir o potencial gerado por uma distribuição de cargas;
- estudar as relações entre o campo elétrico e o potencial elétrico.

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- calcular o potencial elétrico a partir de uma distribuição discreta ou contínua de cargas;
- determinar o campo elétrico a partir do potencial elétrico;
- esboçar corretamente linhas de campo elétrico na presença de condutores.

Introdução

Sabemos que para se elevar um livro de massa m de uma altura h é necessário trabalhar contra o campo gravitacional. O trabalho mecânico W que se deve realizar independe do caminho que se percorreu com o livro, durante o processo de elevação. De fato, teremos sempre $W = mgh$. Recordamos aqui que W nos dá precisamente a variação de energia potencial gravitacional do livro ao elevá-lo de uma altura h (observe que a energia que você, como “entidade biológica”, despenderia, nesta experiência, seria sempre maior ou igual a W . Por quê?).

Podemos estender a discussão acima para o contexto elétrico e definir, então, o que seria a *energia potencial eletrostática* de uma carga elétrica. Este é o ponto de partida de nossa aula.

Energia potencial eletrostática

Consideremos uma carga pontual q situada na posição \vec{r}_0 do espaço e sujeita à presença de um campo elétrico estático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Suponha que a carga seja transportada ao longo de um caminho Γ até uma nova posição \vec{r}_1 , como representado na **Figura 5.1**.

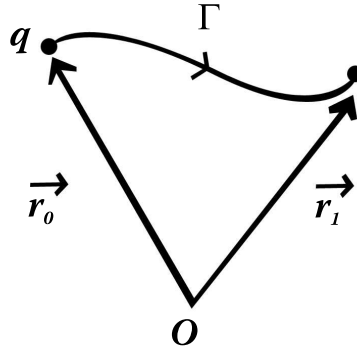


Figura 5.1: Caminho Γ percorrido pela carga q .

Definimos, então, a diferença de energia potencial eletrostática da carga q , $\Delta U \equiv U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_0)$, entre as posições \vec{r}_1 e \vec{r}_0 , como a integral de linha

$$\Delta U = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0, \Gamma}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}, \quad (5.1)$$

onde $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ é a força eletrostática que atua sobre a carga q . Estamos afirmando, com a Equação (5.1) que ΔU é igual ao trabalho realizado *contra* o campo elétrico ao longo do caminho Γ , em perfeita analogia com o que se faz no caso gravitacional. O problema que se coloca imediatamente é mostrar que a Equação (5.1) é, de fato, consistente no contexto eletrostático, uma vez que o lado esquerdo dessa equação depende apenas das variáveis de posição inicial e final, enquanto o lado direito poderia depender, adicionalmente, do caminho ao longo do qual a carga foi transportada. Em outras palavras, devemos verificar se o campo elétrico pertence à classe dos campos conservativos, para os quais a integral de linha não depende do caminho arbitrário Γ ; podendo-se definir uma energia potencial e, portanto, formular a lei de conservação da

energia mecânica. Será que isso é verdade? Discutiremos parte da prova. A conclusão da prova será a sua primeira atividade desta aula.

Se a integral em (5.1) não depende do caminho escolhido, isto significa que

$$\int_{\vec{r}_0, \Gamma_a}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\vec{r}_0, \Gamma_b}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} , \quad (5.2)$$

onde Γ_a e Γ_b são dois caminhos completamente arbitrários, ambos com o mesmo ponto de partida (posição \vec{r}_0) e mesmo ponto de chegada (posição \vec{r}_1). A construção está ilustrada na **Figura 5.2**.

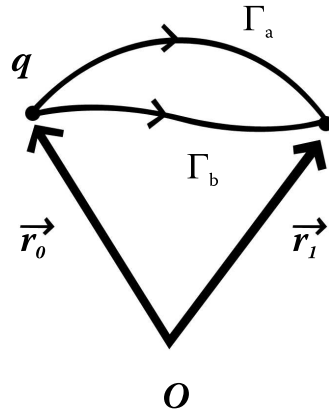


Figura 5.2: Caminhos Γ_a e Γ_b percorridos pela carga q .

Substituindo \vec{F} por $q\vec{E}$ na Equação (5.2) e agrupando as duas integrais em um mesmo lado da equação, obtemos

$$\int_{\vec{r}_0, \Gamma_a}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} - \int_{\vec{r}_0, \Gamma_b}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 . \quad (5.3)$$

Não é difícil notar, agora, que

$$- \int_{\vec{r}_0, \Gamma_b}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_{\vec{r}_1, \bar{\Gamma}_b}^{\vec{r}_0} d\vec{r} \cdot \vec{E} \quad (5.4)$$

onde $\bar{\Gamma}_b$ é o caminho Γ_b invertido, isto é, percorrido de trás para frente, como mostrado na **Figura 5.3**.

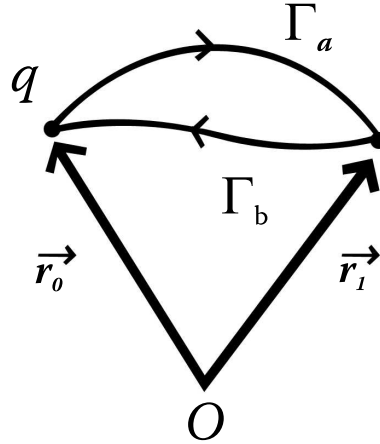


Figura 5.3: Caminhos Γ_a e $\bar{\Gamma}_b$ percorridos pela carga q .

O lado esquerdo de (5.3) pode ser escrito, conseqüentemente, como

$$\int_{\vec{r}_0, \Gamma_a}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \int_{\vec{r}_1, \bar{\Gamma}_b}^{\vec{r}_0} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \oint_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5.5)$$

onde Γ é o caminho fechado orientado, definido pela união dos caminhos Γ_a e $\bar{\Gamma}_b$. Isto é, concluímos que a circulação do campo elétrico estático é nula, qualquer que seja o contorno fechado Γ .

O teorema de Stokes (confira a Aula 2) nos permite escrever a Equação (5.5), equivalentemente, em termos do fluxo do rotacional de \vec{E} :

$$\int_{\mathcal{S}} d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (5.6)$$

onde \mathcal{S} é uma superfície qualquer limitada e orientada pelo caminho Γ e $d\vec{A} = \hat{n}dA$ é o vetor elemento de superfície. Uma vez que os caminhos fechados Γ são arbitrários, assim serão as superfícies \mathcal{S} . A única maneira de garantir que a integral, na Equação (5.6), se anule sempre é exigir que o integrando também seja nulo, isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (5.7)$$

A prova da consistência da definição de energia potencial estará finalizada ao mostrar que a Equação (5.7) é válida. Esta é a parte da discussão que será completada por você, na atividade a seguir. A idéia central da prova é a de que campos elétricos estáticos são gerados por distribuições estáticas

de carga, como foi discutido na Aula 3. Lançando mão da Equação (5.8), a expressão mais geral de um campo elétrico estático produzido por uma distribuição de cargas de densidade $\rho(\vec{r})$,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_V d^3\vec{r}' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') , \quad (5.8)$$

somos levados a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_V d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \rho(\vec{r}') . \quad (5.9)$$

Atividade

Mostre que

$$\vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 0 \quad (5.10)$$

e que, portanto, a Expressão (5.9) se anula.

Resposta Comentada

Devido à isotropia do espaço (não existem direções privilegiadas), basta considerarmos apenas uma das componentes do rotacional em (5.10). Temos, para a componente z ,

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right)_z &= \left(\vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{r}}{r^3} \right] \right)_z = \\ &= \partial_x \left(\frac{y}{r^3} \right) - \partial_y \left(\frac{x}{r^3} \right) = 3 \left(\frac{xy}{r^5} - \frac{xy}{r^5} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (5.11)$$

O potencial elétrico

Considerando ainda o caso de uma carga pontual, o campo de potencial elétrico, $\phi(\vec{r})$, é definido simplesmente como a energia potencial eletrostática por unidade de carga, $U(\vec{r})/q$. Dividindo a Equação (5.1) pela carga q , obtemos, portanto, a seguinte expressão para a diferença de potenciais:

$$\Delta\phi = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0, \Gamma}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} . \quad (5.12)$$

Nas unidades do SI, o potencial mede-se em volts. Um volt é o potencial de um Joule por Coulomb ($1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$). Uma unidade de energia muito útil na física da matéria condensada é o “elétron-volt” (eV). Um elétron-volt é o trabalho realizado pela força elétrica quando se leva um elétron até uma posição cujo potencial é um volt maior do que o potencial na posição original. Isto é, a relação entre elétron-volts e joules é dada por

$$1\text{eV} = 1.06 \times 10^{-19} \text{C} \times 1\text{V} = 1.06 \times 10^{-19} \text{J} . \quad (5.13)$$

Uma distribuição qualquer de cargas produz campo elétrico e, portanto, potencial em todo o espaço. De acordo com a expansão multipolar discutida na Aula 3, uma distribuição de cargas localizada, isto é, contida no interior de um volume finito, irá produzir, em regiões muito distantes do espaço, campos que caem tão ou mais rapidamente do que um campo de perfil coulombiano. Sob estas condições, é possível convencionar o “potencial no infinito” como sendo nulo, $\phi(\infty) = 0$. Para entender melhor esta prescrição, tomemos $\vec{r}_1 = \vec{r}$ e “ $\vec{r}_0 = \infty$ ”, isto é, estamos considerando \vec{r}_0 como uma posição qualquer, porém muito afastada da distribuição de cargas.

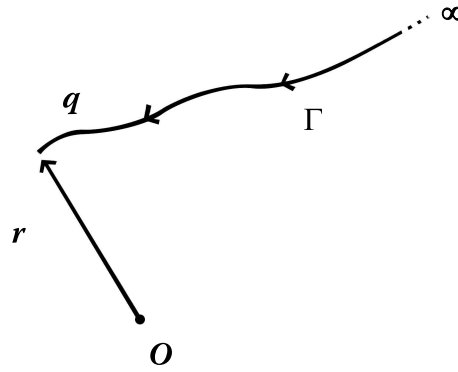


Figura 5.4: Caminho Γ percorrido desde o infinito até a posição \vec{r} .

Escrevemos, para o caso em discussão,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\infty) - \int_{\infty, \Gamma}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E} . \quad (5.14)$$

Como representado na **Figura 5.4**, o caminho Γ é o caminho ao longo do qual a carga q é trazida do infinito até a posição \vec{r} .

A vantagem do uso da convenção de potencial nulo no infinito é uma certa simplificação da definição de potencial elétrico, permitindo-nos escrever

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty, \Gamma}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E} . \quad (5.15)$$

Salvo em alguns casos específicos, discutidos mais adiante, usaremos permanentemente (isto é, implicitamente) a convenção de potencial nulo no infinito.

Uma vez conhecido o campo elétrico, pode-se determinar, a princípio, o potencial elétrico, pelo uso das Equações (5.12) ou (5.15). O procedimento inverso é possível também: a partir do potencial elétrico pode-se computar o campo elétrico, o que fornece um método extremamente útil para se estudar problemas eletrostáticos. Observe que tomando \vec{r}_0 e \vec{r}_1 como posições infinitesimalmente próximas, a Equação (5.12) nos dá

$$d\phi = -d\vec{r} \cdot \vec{E} , \quad (5.16)$$

onde $d\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$. A Equação (5.16) tem conteúdo físico. Sob outro ângulo, em termos puramente matemáticos, fazemos uso do gradiente do potencial para escrever

$$d\phi = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi . \quad (5.17)$$

Comparando as Equações (5.16) e (5.17), válidas para qualquer que seja o deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$, obtemos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi . \quad (5.18)$$

É o momento de fazermos duas observações importantes, partindo da Equação (5.18):

- (a) esta relação indica que as linhas de campo elétrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais (superfícies de nível do campo de potencial, definidas pela condição $\phi(\vec{r}) = \text{constante}$);
- (b) o sinal negativo em (5.18) implica que as linhas de campo elétrico definem percursos ao longo dos quais o potencial é decrescente. Os fatos (a) e (b) estão ambos relacionados às propriedades matemáticas bem conhecidas do operador gradiente e, também, podem ser entendidos diretamente a partir da Definição (5.12).

Tomando como exemplo uma carga pontual q situada na origem, cujas linhas de campo são radiais, as equipotenciais são, portanto, dadas por superfícies esféricas centradas na origem. Para cargas pontuais positivas (negativas), o potencial é menor (maior) para pontos mais afastados da carga. Mais precisamente, de acordo com a Equação (5.15), o potencial gerado por uma carga pontual q colocada na origem será

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty dr \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} , \quad (5.19)$$

onde, para se escrever (5.19), Γ foi escolhido como o caminho radial que “parte” do infinito e finda na posição \vec{r} . A **Figura 5.5** sintetiza o problema da carga pontual.

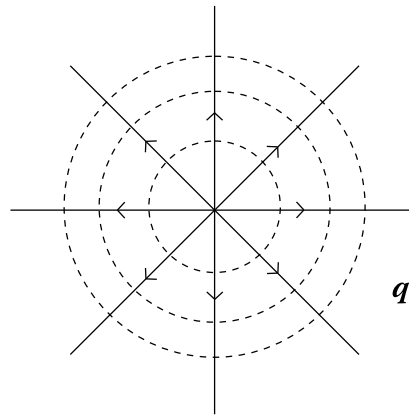


Figura 5.5: Linhas de campo (linhas sólidas) e equipotenciais (linhas tracejadas) associadas a uma carga pontual.

Potencial gerado por distribuições de carga

Vamos, agora, aplicar as idéias introduzidas no item anterior em um certo número de problemas eletrostáticos. Queremos determinar os potenciais produzidos por distribuições de carga e confirmar a grande praticidade da Fórmula (5.18) que relaciona o potencial elétrico ao campo elétrico, por meio do operador vetorial gradiente.

De acordo com o princípio da superposição, o campo elétrico produzido em um ponto \vec{r} do espaço por um sistema de N cargas pontuais é dado pela soma vetorial das contribuições devidas a cada uma das N cargas. É, portanto, consequência imediata da Definição (5.12) que o princípio da superposição também seja válido para o potencial elétrico. Isto é, evocando a Equação (5.19), pertinente ao caso de uma única carga, obtemos que o potencial elétrico gerado no ponto \vec{r} , devido a uma distribuição de cargas pontuais tal como aquela representada na **Figura 5.6**, é dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} . \quad (5.20)$$

A Expressão (5.20) será utilizada – e generalizada para o caso de distribuições contínuas de carga – nos exemplos a seguir.

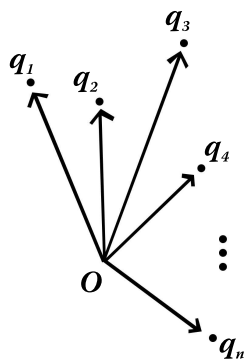


Figura 5.6: Sistema de N cargas q_i de posições respectivas \vec{r}_i .

Potencial produzido por um dipólo elétrico

Seguindo a **Figura 5.7**, considere um dipólo elétrico alinhado ao longo do eixo z , formado por cargas $-q$ e q situadas nas posições $(0, 0, -d/2)$ e $(0, 0, d/2)$ do espaço.

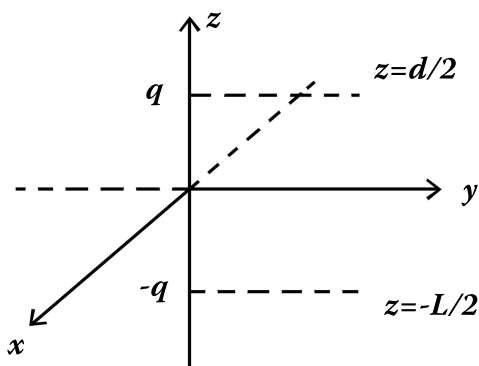


Figura 5.7: Dipólo elétrico sobre o eixo z .

É conveniente empregarmos as coordenadas esféricas usuais r e θ . As distâncias das cargas q e $-q$ ao ponto \vec{r} são dadas, respectivamente, por r_+ e r_- , com

$$\begin{aligned} r_+ &= \sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2 - dr \cos(\theta)} , \\ r_- &= \sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2 + dr \cos(\theta)} . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Usando, agora, a Expressão (5.20), obtemos, para o potencial em \vec{r} ,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} . \quad (5.22)$$

No caso de posições muito afastadas, isto é, $r \gg d$, podemos escrever, considerando expansões até a primeira ordem em d/r ,

$$\begin{aligned} r_+ &\simeq r - \frac{d \cos(\theta)}{2} , \\ r_- &\simeq r + \frac{d \cos(\theta)}{2} , \end{aligned} \quad (5.23)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} r_- - r_+ &\simeq d \cos(\theta) , \\ r_- r_+ &\simeq r^2 . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Substituindo as relações anteriores na Expressão (5.22) para o potencial, encontramos, assintoticamente,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos(\theta)}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} , \quad (5.25)$$

onde $p = |\vec{p}| = qd$ é o módulo do momento de dipólo elétrico, discutido anteriormente na Aula 3.

Atividade

Usando a Equação (5.18), obtenha, a partir de (5.25) a expressão para o campo elétrico produzido pelo dipólo em regiões distantes do espaço.

Resposta Comentada

Aplicando o gradiente em coordenadas esféricas, teremos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi - \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2p \cos(\theta) \hat{r} + p \sin(\theta) \hat{\theta}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{p}) \hat{r} - \vec{p}}{r^3} , \end{aligned} \quad (5.26)$$

em concordância precisa com a Equação (3.18).

Potencial produzido por distribuições contínuas

A generalização da Expressão (5.20) para o caso de uma distribuição contínua de densidade de carga $\rho = \rho(\vec{r})$ é imediata. Podemos escrever

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (5.27)$$

Analogamente às Expressões (3.38) e (3.29), o potencial produzido por linhas ou superfícies carregadas é dado, respectivamente, por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\lambda(s)}{|\vec{r} - \vec{r}(s)|} \quad (5.28)$$

e

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int ds dt \frac{\sigma(s, t)}{|\vec{r} - \vec{r}(s, t)|} . \quad (5.29)$$

onde s e t são variáveis de parametrização das linhas e superfícies que fornecem elementos de comprimento, ds , e superfície, $ds dt$, sobre as configurações de carga.

Potencial produzido por um anel carregado

Considere um anel delgado de raio R , sobre o plano xy e centrado na origem, carregado com densidade uniforme de carga λ . A configuração de cargas – uma distribuição contínua, neste caso – é a mesma que aquela discutida como uma atividade na Aula 3. Veja a **Figura 3.7**. Neste exemplo, o cálculo do potencial sobre o eixo z é bastante simples. Como todos os pontos sobre o anel distam igualmente de $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ de um ponto sobre o eixo z , de coordenadas $(0, 0, z)$, o potencial será

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} . \quad (5.30)$$

Fazendo uso de simetria de rotação ao redor do eixo z , vemos, claramente, que o campo elétrico sobre o eixo z deverá ser proporcional ao vetor \hat{z} , isto é, vale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\hat{z} \frac{\partial\phi}{\partial z} . \quad (5.31)$$

O Potencial (5.30) nos leva, assim, a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} , \quad (5.32)$$

novamente obtendo uma concordância exata, dessa vez com a Expressão (5.32).

Potencial produzido por um segmento de fio carregado

Imaginemos, agora, uma distribuição de cargas contínua de densidade de carga uniforme λ , definida em um segmento de comprimento L sobre o eixo z . As coordenadas dos extremos dos segmentos são dadas por $(0, 0, -L/2)$ e $(0, 0, L/2)$. A **Figura 5.8** ilustra este exemplo.

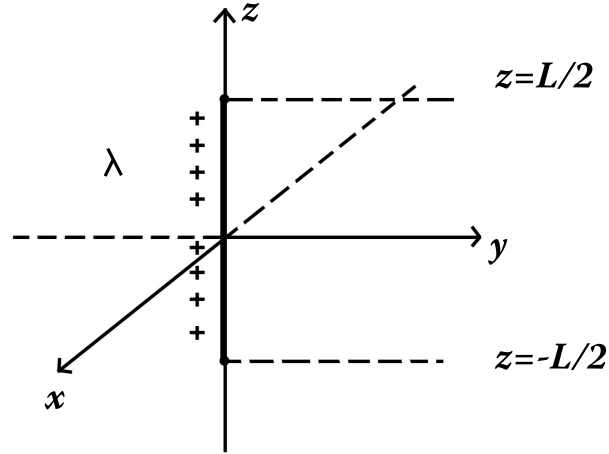


Figura 5.8: Segmento carregado sobre o eixo z .

Queremos determinar o potencial elétrico a distância r do segmento carregado, sobre o plano xy . Uma parametrização natural do segmento é dada pela própria coordenada z . Usando simetria de rotação ao redor do eixo z , podemos obter o potencial $\phi(r)$, sem perda de generalidade, calculando-o no ponto $(r, 0, 0)$. Temos:

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (5.33)$$

Esta integral é determinada por meio da substituição trigonométrica $z = r \tan(\theta)$, fornecendo

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{2r}{L}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2r}{L}} - 1} \right]. \quad (5.34)$$

Observe que, no caso de pontos distantes do fio, $r/L \gg 1$, a Equação (5.34) pode ser expandida em série de Taylor em potências de L/r , o que dá, em primeira ordem,

$$\phi(r) = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (5.35)$$

isto é, o resultado esperado para uma carga pontual $q = \lambda L$.

Por outro lado, se a extensão do fio é considerada infinita, a Fórmula (5.34) parece inconsistente, pois no limite $L/r \rightarrow \infty$ obtém-se um resultado divergente para o potencial. Esta dificuldade tem a ver com o fato de termos fixado, por convenção, o potencial nulo no infinito. Observe, entretanto, que a partir de (5.34), podemos escrever

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{2r}{L}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2r}{L}} - 1} \right] - \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{2r_0}{L}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2r_0}{L}} - 1} \right] \right\}, \quad (5.36)$$

onde r_0 é uma distância arbitrária de referência. A Expressão (5.36) permite obter um limite bem definido para a *diferença de potenciais* no caso do fio infinito:

$$\lim_{L/r \rightarrow \infty} [\phi(r) - \phi(r_0)] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (5.37)$$

Nesta situação, o campo elétrico será dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\vec{E}(r) = - \lim_{L/r \rightarrow \infty} \vec{\nabla} \phi(r) = \vec{\nabla} \lim_{L/r \rightarrow \infty} [\phi(r) - \phi(r_0)] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, \quad (5.38)$$

em acordo com o resultado encontrado na aula anterior, sobre a lei de Gauss.

Potencial produzido por um disco carregado

Estamos interessados, agora, no problema de um disco de densidade superficial de carga σ e raio R , centrado na origem e paralelo ao plano xy . Veja a **Figura 5.9**. Queremos determinar o potencial elétrico sobre o eixo de simetria, em um ponto de coordenadas $(0, 0, z)$.

Podemos escrever

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (5.39)$$

Coordenadas polares são mais convenientes aqui, fazendo com que a Equação (5.39) se torne

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{r \leq R} r dr d\theta \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (5.40)$$

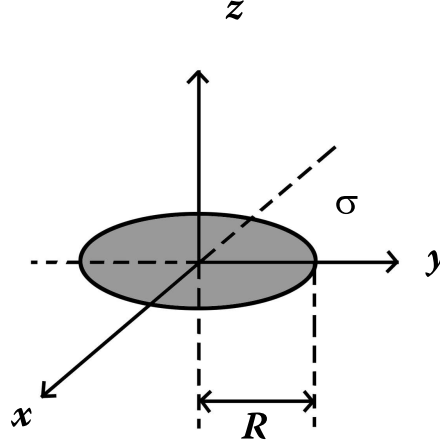


Figura 5.9: Disco carregado sobre o plano xy .

Integrando em θ e introduzindo a substituição de variáveis $u = r^2 + z^2$, obtemos

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} du \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{R^2+z^2} - z]. \quad (5.41)$$

Considerando o caso de pontos muito afastados do disco, a expansão da Equação (5.41) em série de potências em R/z nos dá, em primeira ordem,

$$\phi(z) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z}, \quad (5.42)$$

em acordo com as nossas expectativas: o perfil de potencial obtido é, de fato, aquele de uma carga pontual de carga $q = \pi R^2$.

O campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(z) = -\vec{\nabla}\phi(z) = -\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{R^2 + z^2} \right] \hat{z}. \quad (5.43)$$

Dessa forma, na situação limite em que o disco se transforma efetivamente em um plano, isto é, $R/z \rightarrow \infty$, a Equação (5.43) dá

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, \quad (5.44)$$

como já obtido por meio da lei de Gauss. Observe, por razões simples de simetria, que os campos elétricos nas regiões $z < 0$ e $z > 0$ estão dirigidos em sentidos opostos.

Potenciais em condutores

Na Aula 4, discutimos um dos resultados mais fortes da eletrostática: o campo elétrico no interior de condutores é nulo. Isto implica imediatamente, tomando a Definição (5.12), no fato de que as superfícies dos condutores, em regimes eletrostáticos, são equipotenciais (isso vale mesmo no caso de superfícies internas, ou seja, bordas de cavidades). Como equipotenciais são superfícies ao longo das quais o campo elétrico é normal, temos aqui informação valiosa para que esboços de linhas de campo sejam produzidos de forma correta para sistemas de cargas envolvendo condutores. A **Figura 5.10** ilustra o exemplo de dois condutores carregados. O condutor da esquerda está carregado positivamente, enquanto o outro está descarregado. Observe que as linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies dos condutores.

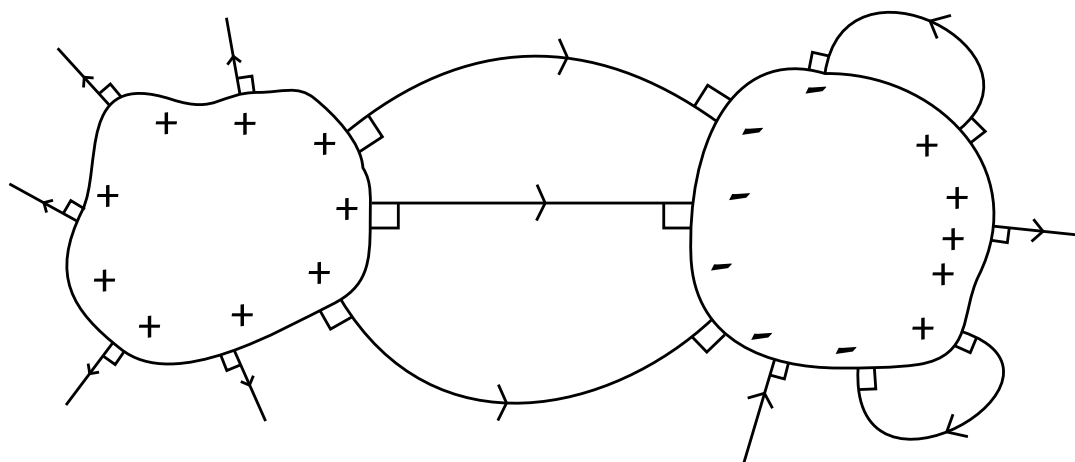


Figura 5.10: Linhas de campo elétrico entre condutores.

Uma aplicação interessante dessas idéias refere-se ao famoso “poder das pontas” dos condutores, isto é, à constatação de que o campo elétrico é, em geral, mais intenso nas regiões pontiagudas dos condutores. Esta é a razão pela qual os pára-raios são construídos no formato de hastes delgadas. Para entender de maneira não muito rigorosa a física do “poder das pontas”, é importante percebermos que “regiões pontiagudas” significam, concretamente, regiões superficiais caracterizadas por raios de curvatura menores. Assim, um modelo (um tanto grosseiro, porém satisfatório) de condutor com uma ponta é dado pela união de duas esferas condutoras por meio de um longo

fio, em que uma das esferas tem raio R_1 e a outra tem raio R_2 , com $R_1 \ll R_2$, como mostrado na **Figura 5.11**.

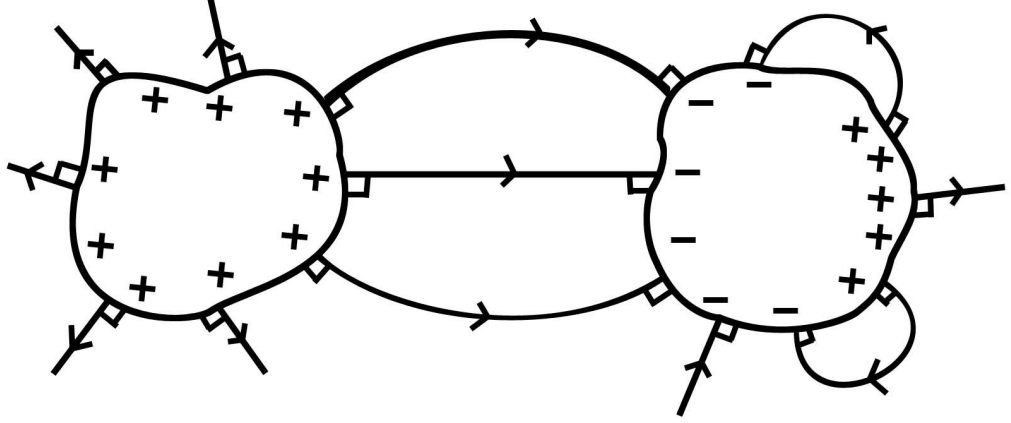


Figura 5.11: Modelo de condutor (esfera de raio R_2) com uma ponta (esfera de raio $R_1 \ll R_2$).

Suponha que as cargas sobre as esferas de raios R_1 e R_2 sejam, respectivamente, Q_1 e Q_2 . Como as esferas estão muito distantes, podemos afirmar, com boa aproximação, que os potenciais sobre elas serão $\phi_1 = Q_1/4\pi R_1$ e $\phi_2 = Q_2/4\pi R_2$. Entretanto, como o potencial sobre o sistema condutor total é constante, deveremos ter $\phi_1 = \phi_2$ e, portanto,

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} . \quad (5.45)$$

Por outro lado, as intensidades dos campos elétricos sobre as esferas serão dadas, aproximadamente, por $E_1 = Q_1/4\pi R_1^2$ e $Q_2/4\pi R_2^2$. Isto é, usando a Equação (5.45), obtemos

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} . \quad (5.46)$$

Como $R_2 \gg R_1$, segue-se, finalmente, que $E_1 \gg E_2$, mostrando que na ponta, de fato, o campo elétrico é mais intenso.

Energia eletrostática de um sistema de cargas

A energia potencial de um sistema de cargas, tal como aquele mostrado na **Figura 5.6**, pode ser calculada simplesmente, evocando o princípio da superposição e a propriedade conservativa do campo elétrico, como a soma das energias potenciais associadas aos pares de cargas elétricas. A energia fica dada, assim, por

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} . \quad (5.47)$$

Para entender o fator $1/2$ na Expressão (5.47), pense no caso de apenas duas cargas elétricas. Esta expressão pode ser generalizada sem dificuldades para o problema de distribuições contínuas de cargas. Teremos

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) . \quad (5.48)$$

De acordo com a lei de Gauss, $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Substituindo esta relação na Equação (5.48), obtemos

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \int \int d^3\vec{r} \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} . \quad (5.49)$$

Integrando por partes, e usando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, achamos

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \int \int d^3\vec{r} \vec{E}^2 . \quad (5.50)$$

A Equação (5.50) sugere que a energia potencial eletrostática esteja “armazenada” no campo elétrico \vec{E} , com densidade de energia

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 . \quad (5.51)$$

Conquanto possa parecer, por ora, artificial definir uma densidade de energia eletrostática distribuída pelo espaço, veremos mais à frente no curso, que, de fato, esta definição é relevante no contexto de campos eletromagnéticos dependentes do tempo. É importante enfatizarmos, de qualquer modo, que a Equação (5.50) é bastante útil na eletrostática, pois permite cálculos práticos da energia associada a distribuições gerais de carga, como mostra a atividade a seguir.

Atividade

Calcule a energia eletrostática de uma distribuição uniforme de carga total Q , sobre uma casca esférica de raio R .

Resposta Comentada

O campo elétrico gerado por esta distribuição é nulo no interior da esfera. No exterior da esfera, o campo é idêntico àquele que seria produzido por uma carga pontual Q colocada no centro da esfera. Dessa forma, usando a Equação (5.50), obtemos

$$U = \frac{\epsilon_0 Q^2}{2 \times 16\pi^2 \epsilon_0^2} \int \int \int_{r \geq R} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \frac{1}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (5.52)$$

A equação de Poisson

O potencial elétrico satisfaz a uma equação diferencial parcial simples que encerra em si, de certa forma, toda a eletrostática. Para derivá-la, observe que a lei de Gauss, na formulação diferencial, é escrita como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Usando, então a definição de campo elétrico, dada por $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, obtemos

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.53)$$

Esta é a famosa “equação de Poisson”, estabelecendo entre carga e potencial elétrico uma relação análoga àquela que existe entre massa e o campo gravitacional (massa como fonte da gravitação; carga como fonte do potencial elétrico). Conhecendo a distribuição de cargas e as condições de contorno particulares do sistema, pode-se resolver, a princípio, a equação de Poisson, para se determinar o potencial elétrico em todo o espaço. Assim, por exemplo, se considerássemos o problema de um condutor sólido delimitado por uma superfície Σ , o nosso trabalho consistiria em achar as soluções da equação de Poisson tendo como condição de contorno a constância do potencial sobre Σ , imaginando, além disso, que o campo ϕ cai a zero no infinito. Em alguns casos, onde há um certo grau de simetria, pode-se obter expansões sistemáticas para as soluções da equação de Poisson. De forma mais geral, entretanto, as soluções deverão ser encontradas numericamente, com o auxílio de um computador.

Atividades Finais

1. Sabendo que a energia para se ionizar um átomo de hidrogênio é da ordem de 10 eV, estime a distância do elétron ao núcleo atômico.
2. Um carrinho de brinquedo é alimentado por duas pilhas de 1.5 Volts. A corrente elétrica que circula no brinquedo é de 200mA ($1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). A massa do carrinho é de 200 gramas. Qual é a velocidade máxima que este carrinho poderia atingir um segundo após ter sido ligado?
3. Quatro cargas elétricas pontuais iguais a q ocupam os vértices de um quadrado de lado L no plano xy . A origem do sistema de coordenadas é o centro geométrico do quadrado. Determine o potencial elétrico e o campo elétrico (a partir do potencial) sobre o eixo z .
4. Uma carga positiva q está colocada a uma altura h sobre um plano condutor de dimensões muito grandes (efetivamente, um plano infinito). Esboce as linhas de campo elétrico.
5. Seis cargas iguais a q ocupam os vértices de um hexágono regular de lado a . Determine a energia eletrostática deste sistema de cargas.
6. Uma esfera não-condutora de raio R possui carga total Q distribuída uniformemente sobre o seu volume. Determine a energia eletrostática desse sistema.

Respostas Comentadas

1. A energia de um elétron no estado de mais baixa energia no átomo de hidrogênio pode ser estimada como

$$U \simeq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d},$$

onde d é o raio da órbita eletrônica. De acordo com os dados do problema, temos $U \simeq 10 \text{ eV}$, ou seja, $U = 10 \times e$ Joules, onde e é a carga do elétron em Coulombs. Obtemos, portanto,

$$d \simeq \frac{e}{40\pi\epsilon_0} = \frac{1.6 \times 10^{-7}}{40 \times \pi \times 8.85} \simeq 1.4 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

2. A carga total que circula pelo circuito durante 1 segundo é $Q = 200 \times 10^{-3} \text{ C}$. Como a diferença de potencial entre os pólos da fonte elétrica

do carrinho é de 3 Volts, a energia disponibilizada para o carrinho é $U = 3 \times 200 \times 10^{-3}$ Joules. Se toda essa energia fosse convertida em energia cinética, teríamos

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{200 \times 10^{-3} \times v^2}{2} = U = 3 \times 200 \times 10^{-3} ,$$

onde $m = 200 \times 10^{-3}$ Kg é a massa do carrinho e v é a sua velocidade máxima. Obtemos

$$v = \sqrt{6} \simeq 2.45 \text{ m/s} .$$

3. Considere um ponto P de coordenadas $(0, 0, z)$, com $z \geq 0$ (o caso $z < 0$ é obtido por uma reflexão simples no plano xy). Todas as 4 cargas distam $d = \sqrt{z^2 + L^2/2}$ de P . O potencial em P é, portanto,

$$\phi(z) = 4 \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + L^2/2}} .$$

O campo elétrico em P é

$$\vec{E}(z) = -\vec{\nabla}\phi = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\phi(z) = \frac{qz\hat{z}}{\pi\epsilon_0 [z^2 + L^2/2]^{3/2}} .$$

4. Para esboçar adequadamente as linhas de campo elétrico, levamos em conta que: (a) o campo é aproximadamente radial nas vizinhanças da carga; (b) as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor. O esboço está mostrado na **Figura 5.12**.

Note que a configuração de linhas de campo é idêntica àquela que seria produzida por um dipólo elétrico, como se houvesse uma carga $-q$ “espelhada” na parte interior do condutor (parte de baixo na **Figura 5.12**). Procure provar este resultado, com argumentos qualitativos baseados na unicidade das soluções da equação de Poisson.

5. Uma carga qualquer do hexágono dista a de suas cargas imediatamente vizinhas, $\sqrt{3}a$ de outras duas cargas e $2a$ da carga localizada no vértice oposto. A energia potencial de uma carga qualquer é, dessa forma,

$$U_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left[2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{15 + 4\sqrt{3}}{6} .$$

A energia total do sistema é, então, $U = 6 \times U/2$. Isto é,

$$U = (15 + 4\sqrt{3}) \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} .$$

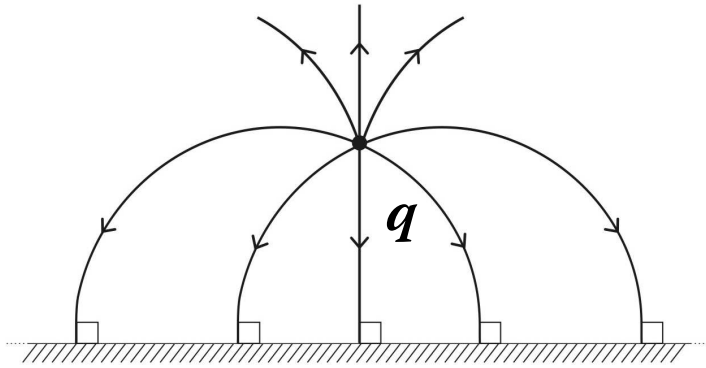


Figura 5.12: Linhas de campo elétrico do sistema carga-condutor.

6. Usando a lei de Gauss (confira a aula anterior) pode-se determinar o campo elétrico em todo o espaço, para a configuração de cargas deste problema. Para $r \geq R$ temos, em coordenadas esféricas,

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Para $r < R$, entretanto, o campo varia linearmente com a distância ao centro da esfera:

$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r}.$$

Usando, agora, a Expressão (5.50) para a energia eletrostática, obtém-se, por integração direta,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_0^\infty dr |\vec{E}(r)|^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_0^R dr \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_R^\infty dr \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Resumo

Um sistema de cargas elétricas, discreto ou contínuo, possui uma determinada energia potencial eletrostática U . Esta energia pode ser pensada como o trabalho que foi necessário realizar, contra o campo elétrico gerado pelas cargas, para trazê-las de posições remotas até a configuração específica do sistema. A definição de potencial elétrico está diretamente ligada à definição de energia potencial eletrostática. O potencial nada mais é do que a energia eletrostática por unidade de carga elétrica medida em alguma posição bem definida do espaço.

Nas situações em que a lei de Gauss não pode ser aplicada, o potencial elétrico ϕ fornece um método alternativo e mais simples para o cálculo do campo elétrico gerado por uma distribuição qualquer de cargas. O mapeamento entre o potencial e o campo elétrico é realizado por meio do operador diferencial gradiente. Como consequência das propriedades do operador gradiente, segue-se que as superfícies equipotenciais são perpendiculares às linhas de campo elétrico e que, ademais, as linhas de campo indicam o sentido decrescente do potencial. As superfícies dos condutores, em particular, são superfícies equipotenciais, nos regimes eletrostáticos.

A relação entre a densidade de carga ρ e o potencial elétrico ϕ pode ser escrita em termos de uma equação diferencial parcial; a equação de Poisson, a partir da qual toda a informação eletrostática sobre um determinado sistema de cargas pode ser obtida.

O Campo Magnético

Metas da aula

- Definir a força de Lorentz;
- discutir o movimento de cargas na presença de campo magnético;
- desenvolver a teoria da força magnética sobre fios que transportam corrente elétrica.

Objetivos

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

- obter as equações de movimento de cargas na presença de campos magnéticos;
- determinar a força magnética que atua sobre um fio elétrico arbitrário.

Introdução

Observando casualmente a natureza enquanto caminhava (nos idos de 900 a.C.!), Magnus, pastor grego, notou que certas pedras atraíam a ponta de ferro do seu cajado e os pregos de sua sandália (hoje em dia, sabemos que essas pedras eram ricas em magnetita, ou seja, Fe_3O_4 , o óxido de ferro, um ímã natural). Durante muito tempo – milênios –, ninguém foi capaz de imaginar que a curiosa propriedade *magnética* que algumas substâncias apresentavam estaria, de algum modo, ligada ao mundo dos fenômenos elétricos. Foi apenas no século XIX que o acaso novamente entrou em cena, no momento em que Oersted observou, para sua grande surpresa, que correntes elétricas produzia efeitos semelhantes aos de tais substâncias. Oersted descobriu que um fio que transporta corrente era capaz de perturbar a agulha de uma bússola, como o faria um ímã colocado em suas proximidades. A partir desta constatação, outros resultados experimentais foram obtidos no mesmo século por meio de estudos mais sistemáticos, culminando com os trabalhos de Ampère, Henry

e Faraday, que irão fornecer uma base empírica suficientemente sólida dos fenômenos elétricos e magnéticos para a unificação teórica de Maxwell.

Podemos dizer, sinteticamente, que cargas elétricas em movimento – correntes elétricas – produzem *campos magnéticos*. Os campos magnéticos, por sua vez, atuam sobre cargas elétricas em movimento. Observe a analogia que há com a teoria eletrostática: como sabemos, cargas elétricas geram campos elétricos e estes, por outro lado, exercem influência sobre cargas elétricas. A palavra-chave que nos permite sair do domínio de fenômenos puramente elétricos e entrar no “reino” do magnetismo é *movimento*.

Afinal, o que é o campo magnético? O propósito desta aula é caracterizá-lo pela maneira segundo a qual atua sobre cargas elétricas em movimento. Reservaremos para a aula seguinte a discussão de como as cargas em movimento, em situações inicialmente mais simples, produzem campos magnéticos.

A força de Lorentz

Imaginemos uma carga pontual q em movimento, com trajetória dada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e velocidade $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$. A presença de um *campo magnético* $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ é responsável pela ação de uma força sobre esta partícula, chamada *força de Lorentz*, ou *força magnética*, definida como o seguinte produto vetorial:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (7.1)$$

Tal como a força elétrica, a força de Lorentz é proporcional à carga elétrica e ao campo na posição da partícula. A novidade principal, agora, é que a força magnética depende da velocidade da carga. Uma carga elétrica em repouso não sofrerá qualquer influência de um campo magnético! Outro aspecto interessante é que a força de Lorentz, devido à sua forma de produto vetorial, é sempre perpendicular ao vetor velocidade, ou, o que dá no mesmo, ao deslocamento infinitesimal de uma partícula no intervalo de tempo dt . Isto implica, imediatamente, o fato de que o campo magnético não realiza trabalho sobre cargas em movimento. Note que a força de Lorentz também é perpendicular ao campo magnético. A **Figura 7.1** ilustra o triedro velocidade-campo-força associado ao movimento de uma partícula carregada no campo magnético.

Por enquanto, não estamos preocupados em saber como o campo magnético é produzido. Importa, provisoriamente, saber como estes campos agem sobre cargas elétricas. Além disso, a nossa discussão será restrita, ao longo de

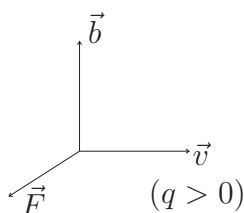


Figura 7.1: Uma partícula de carga q move-se com velocidade \vec{v} sob a influência de um campo magnético \vec{B} . A força que atua sobre a partícula é \vec{F} .

algumas aulas, ao caso de campos magnéticos estáticos, isto é, independentes do tempo, representados genericamente por $\vec{B}(\vec{r})$.

A unidade de medida de campo magnético, no SI, é o *Tesla* (T). De acordo com (7.1), temos

$$1T = \frac{1N \times s}{C \times m} . \quad (7.2)$$

Uma unidade de campo magnético relevante em aplicações geofísicas é o *Gauss* (G), definido por $1G = 10^{-4}T$. O campo magnético terrestre possui intensidade da ordem de $0.5G$. Atualmente, em alguns laboratórios de pesquisa, campos magnéticos bastante intensos, da ordem de dezenas de teslas, são produzidos para o estudo de fenômenos da matéria condensada.

Movimento de uma carga elétrica na presença de campo magnético

O problema mais simples que podemos tratar, sem dúvida, é aquele do movimento de uma partícula de carga q e massa m submetida à presença de um campo magnético uniforme que tomamos, sem perda de generalidade, paralelo ao vetor \hat{z} , isto é, fazemos $\vec{B} = B\hat{z}$. Este problema é exatamente solúvel e de grande importância, pois contém informações essenciais a respeito do movimento de cargas elétricas sob influência de campos magnéticos. A partir de (7.1) escrevemos a equação geral de movimento

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (7.3)$$

Substituindo $\vec{B} = B\hat{z}$ e $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ na Equação (7.3) e decompondo-a em componentes, obtemos

$$m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y, \quad (7.4)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x, \quad (7.5)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (7.6)$$

Da Equação (7.6) se obtém imediatamente que o movimento é retilíneo e uniforme ao longo da direção determinada pelo campo magnético, isto é, o eixo z . Escrevemos, então,

$$z = z_0 + v_z t, \quad (7.7)$$

onde v_z é constante e z_0 é a posição z inicial da partícula.

A parte menos óbvia do movimento corresponde à projeção do movimento no plano xy . Não é difícil, entretanto, mostrar que no plano xy temos o caso de movimento circular uniforme. Note que as equações (7.4) e (7.5) formam um sistema fechado que pode ser resolvido exatamente. Tomando a derivada temporal da Equação (7.4) segue que

$$m\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt}. \quad (7.8)$$

Usando, agora, a Equação (7.5) para substituir dv_y/dt em (7.8), encontramos

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x. \quad (7.9)$$

A componente v_y do vetor velocidade satisfaz a uma equação análoga a (7.9). Formalmente, esta equação não é nada mais nada menos do que aquela de um oscilador harmônico unidimensional de frequência angular $\omega = qB/m$, chamada *frequência de ciclotron* (você já deve ter notado que, em Física, as mesmas equações aparecem em contextos completamente diferentes). Dessa forma, a solução geral de (7.9) pode ser escrita como

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t). \quad (7.10)$$

Analogamente, a solução para $v_y(t)$ é dada por

$$v_y(t) = C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t). \quad (7.11)$$

É importante observarmos que as constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 não são completamente independentes entre si. Substituindo (7.10) e (7.11) em (7.4), obtemos

$$m[-C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t)] = qB[C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t)] , \quad (7.12)$$

Assim, comparando os coeficientes dos cossenos e senos que aparecem na relação anterior, segue que

$$C_1 m\omega = -C_4 qB , \quad (7.13)$$

$$C_2 m\omega = C_3 qB . \quad (7.14)$$

Dessa forma, usando a expressão para a frequência de ciclotron, $\omega = qB/m$, achamos

$$C_4 = -C_1 , \quad (7.15)$$

$$C_3 = C_2 . \quad (7.16)$$

Este resultado nos dá, a partir de (7.10) e (7.11),

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) , \quad (7.17)$$

$$v_y(t) = C_2 \cos(\omega t) - C_1 \sin(\omega t) . \quad (7.18)$$

Até aqui, nossas soluções fazem uso de 4 constantes arbitrárias (z_0, v_z, C_1, C_2). Entretanto, ainda não finalizamos a discussão do problema do movimento. Devemos integrar as Equações (7.17) e (7.18) na variável de tempo, para obtermos a projeção da trajetória da partícula no plano xy . Encontramos

$$x(t) = X_0 + \frac{C_1}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{C_2}{\omega} \cos(\omega t) , \quad (7.19)$$

$$y(t) = Y_0 + \frac{C_2}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{C_1}{\omega} \cos(\omega t) . \quad (7.20)$$

A trajetória, no plano xy , definida pelas duas equações acima corresponde a uma circunferência centrada em X_0 e Y_0 . De fato, não é difícil verificar que

$$[x(t) - X_0]^2 + [y(t) - Y_0]^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2}{\omega^2} . \quad (7.21)$$

Observe, agora, usando (7.17) e (7.18), que

$$v_{\perp}^2 \equiv v_x^2 + v_y^2 = C_1^2 + C_2^2 . \quad (7.22)$$

Substituindo este resultado em (7.21) vem que

$$[x(t) - X_0]^2 + [y(t) - Y_0]^2 = \frac{v_{\perp}^2}{\omega^2} . \quad (7.23)$$

Esta é a equação de uma órbita circular, cujo raio r , chamado *raio de ciclotron*, é dado por

$$r = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB} . \quad (7.24)$$

A partícula carregada executa, portanto, movimento circular uniforme no plano xy , centrado em (X_0, Y_0) , enquanto se desloca com velocidade uniforme ao longo do eixo z . A sua trajetória, ilustrada na **Figura 7.2**, corresponde a uma hélice.

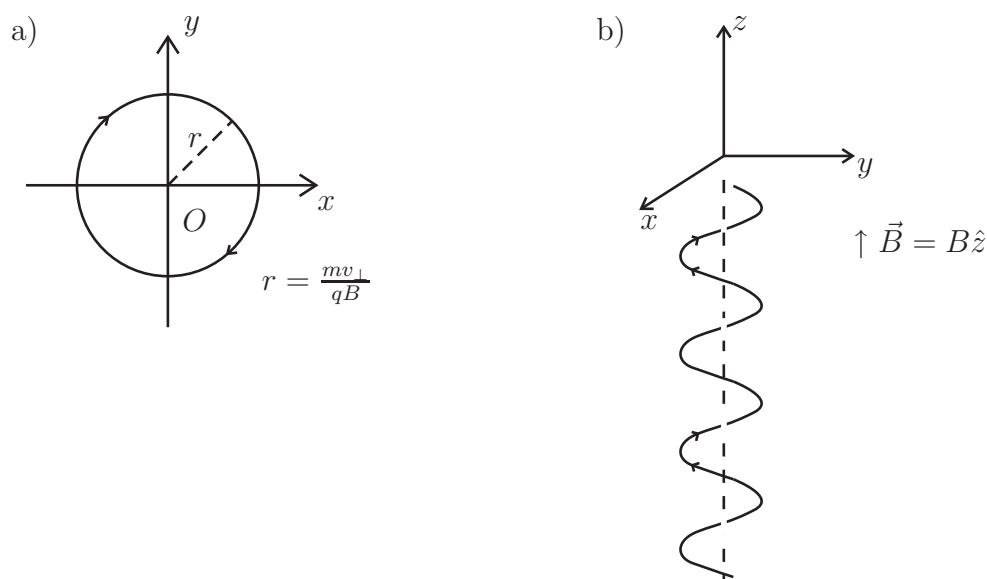


Figura 7.2: Uma partícula de carga $q > 0$ move-se em um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. a) A projeção de sua trajetória no plano xy é um movimento circular uniforme, percorrido no sentido horário (o sentido seria trocado se tomássemos $q < 0$ ou se o campo fosse invertido). b) No espaço tridimensional, a trajetória tem a forma de hélice.

O movimento de partículas carregadas na presença de campos magnéticos produz fenômenos naturais de grande interesse científico: feixes de radiação em sistemas astrofísicos; interações entre o vento solar e a atmosfera terrestre; dinâmica turbulenta de fluidos carregados (magnetoidrodinâmica) etc. A relevância tecnológica da força de Lorentz é igualmente inestimável. As mais notórias aplicações talvez sejam o motor elétrico e o tubo de raios catódicos (entre os quais o tubo comum de televisão é um exemplo). Destacamos também o uso de campos magnéticos em diversos equipamentos médicos; como defletores em aceleradores de partículas; no desenho de espectrômetros de massa; como base de dispositivos de aprisionamento de plasmas (gases fortemente ionizados) e sistemas atômicos frios (de enorme importância na física da matéria condensada atual).

Correntes elétricas

Na seção anterior, discutimos o movimento de uma única partícula sujeita à ação de um campo magnético. Um problema de grande interesse prático refere-se à força magnética exercida sobre fios que transportam corrente elétrica. É útil, portanto, discorrermos brevemente sobre sistemas que contêm um grande número de cargas elétricas em movimento. Em muitas aplicações, a carga elétrica transportada está distribuída de forma aproximadamente contínua pelo espaço. Seja $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ a densidade de carga elétrica (isto é, carga por unidade de volume), na posição \vec{r} do espaço, no instante de tempo t . Suponha que o campo de velocidade do “fluido carregado” seja denotado por $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$. Definimos a *densidade de corrente elétrica* por

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t). \quad (7.25)$$

O vetor densidade de corrente pode ser usado para se calcular a quantidade de carga elétrica que atravessa uma determinada superfície Σ por unidade de tempo – isto é, a **corrente** que atravessa Σ . Veja a **Figura 7.3**.

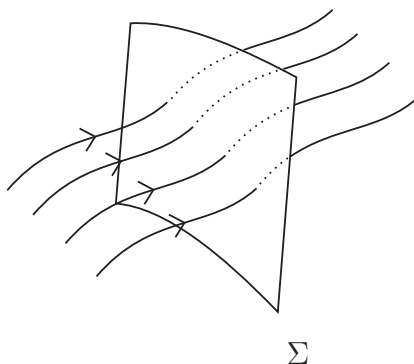


Figura 7.3: Linhas de corrente elétrica atravessam a superfície Σ .

A corrente elétrica infinitesimal di que atravessa um elemento de superfície $d^2\vec{s} \equiv \hat{n}dA$ é dada pelo produto escalar entre \vec{j} e $d^2\vec{s}$:

$$di = \vec{j} \cdot d^2\vec{s}. \quad (7.26)$$

Dessa forma, a corrente que atravessa a superfície Σ será dada pela integral de superfície

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{s}, \quad (7.27)$$

ou seja, o fluxo de \vec{j} através de Σ .

A unidade de corrente elétrica, no SI, é o Ampère. Um Ampère equivale ao fluxo de carga de um Coulomb por segundo:

$$1A = 1 \frac{C}{s} . \quad (7.28)$$

Note que a definição de Tesla pode ser implementada em termos da unidade de corrente Ampère. De fato, a (7.2) implica, imediatamente, em $1T = 1N/(A \times m)$.

A lei de conservação da carga elétrica implica que variações da carga elétrica total contida no interior de um volume qualquer Ω são devidas apenas ao fluxo de carga que ocorre através da superfície fechada Σ que encerra Ω , como mostrado na **Figura 7.4**.

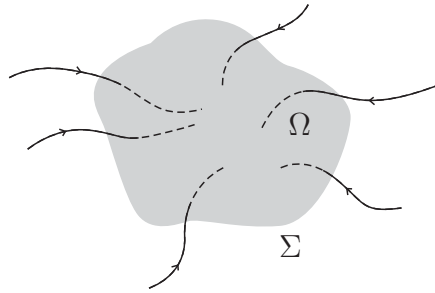


Figura 7.4: Uma região Ω , limitada pela superfície fechada Σ . Cargas elétricas são transportadas para dentro e para fora de Ω com trajetórias que atravessam Σ .

A carga total em Ω pode ser escrita como

$$Q = \int_{\Omega} d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t) . \quad (7.29)$$

O fluxo total de carga através de Σ é, por outro lado,

$$i = \int_{\Sigma} d^2\vec{s} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) . \quad (7.30)$$

Observe que $i > 0$ e $i < 0$ correspondem, respectivamente, à perda e ao ganho de carga em Ω . Usando as Equações (7.29) e (7.30) e a lei de conservação da carga elétrica, somos levados a

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\Omega} d^3\vec{r} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\Sigma} d^2\vec{s} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) . \quad (7.31)$$

O Teorema de Gauss (confira a Aula 2) permite-nos escrever a integral superficial de $\vec{j}(\vec{r}, t)$ como uma integral de volume:

$$\int_{\Sigma} d^2\vec{s} \cdot \vec{j} = \int_{\Omega} d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} . \quad (7.32)$$

Assim, de (7.31) e (7.32) decorre que

$$\int d^3\vec{r} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] = 0 . \quad (7.33)$$

Agora, note que a relação (7.33) deve valer para qualquer região Ω do espaço. Este fato implica que o integrando deve se anular. Encontramos, portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 , \quad (7.34)$$

a chamada *equação de continuidade* da carga elétrica. Equações de continuidade podem ser escritas em contextos diversos, para quantidades físicas conservadas, porém distribuídas continuamente no espaço (exemplos: massa de fluido em escoamentos clássicos; energia eletromagnética; densidade de probabilidade quântica) e fornecem as versões locais de leis de conservação. A Equação (7.34), em particular, será utilizada, como veremos daqui a algumas aulas, como uma condição verdadeiramente importante para a formulação correta das equações de Maxwell.

Atividade 1

Considere um campo de densidade de corrente dado por

$$\vec{j} = \begin{cases} J_0 \hat{z}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases} \quad (7.35)$$

(a) Esboce o campo \vec{j} .

(b) Calcule a corrente $i = i(r)$ que atravessa um círculo de raio r , paralelo ao plano xy e centrado na origem. Esboce $i = i(r)$.

Resposta comentada

(a) O campo \vec{j} está confinado a um cilindro de raio R , paralelo ao eixo z , como indicado na **Figura 7.5**.

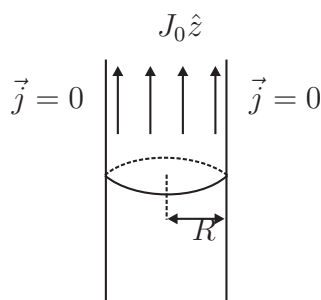


Figura 7.5: Esboço do campo \vec{j} .

(b) A corrente elétrica $i(r)$ é obtida pelo fluxo de \vec{j} através de um círculo de raio r que possui o eixo z como eixo de simetria:

$$i(r) = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} d^2\vec{s} \cdot \vec{j}. \quad (7.36)$$

Para $r \leq R$, temos

$$i(r) = J_0 \int_0^r 2\pi r dr = J_0 \pi r^2. \quad (7.37)$$

Se $r > R$, a corrente terá saturado em seu valor máximo $J_0 \pi R^2$. A curva de $i(r)$ é esboçada na **Figura 7.6**.

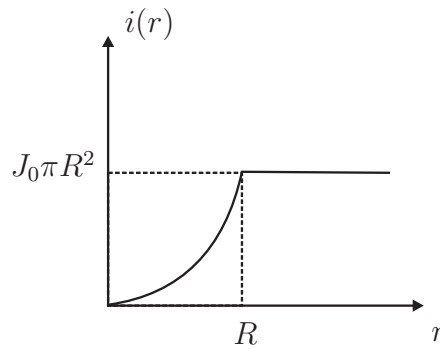


Figura 7.6: Esboço de $i = i(r)$.

Força magnética sobre fios elétricos

Fios que transportam corrente elétrica, como nas situações do dia-a-dia, estão associados a densidades de corrente elétrica confinadas a tubos, como representado na **Figura 7.7**.

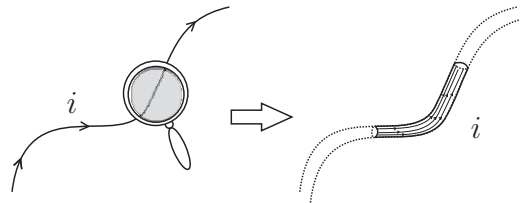


Figura 7.7: Um segmento de fio elétrico é ampliado com uma “lupa” fictícia, revelando a estrutura da densidade de corrente elétrica em seu interior.

Uma pergunta interessante que podemos fazer diz respeito à força magnética que atua sobre um fio que transporta corrente elétrica i na presença de um campo magnético \vec{B} . Considere, assim, um trecho de fio elétrico,

entre os pontos P_1 e P_2 , sujeito a um campo magnético $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$, não necessariamente uniforme. Veja a **Figura 7.8**.

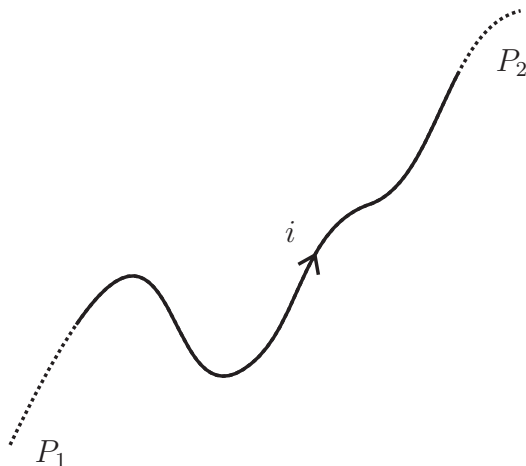


Figura 7.8: Segmento de fio elétrico, entre as posições P_1 e P_2 , que transporta corrente i , na presença de campo magnético \vec{B} .

Uma vez que a força magnética que age sobre uma carga q que se desloca com velocidade \vec{v} é $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, a força total sobre todas as N cargas contidas entre P_1 e P_2 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F} = \sum_{l=1}^N q\vec{v}_l \times \vec{B}_l, \quad (7.38)$$

onde o índice l identifica cada uma das cargas do sistema. Suponha, agora, que o caminho de P_1 a P_2 tenha sido particionado em um grande número de pequenos cilindros de comprimento δ , todos de seção reta igual a A . Apesar de diminutos, queremos que os cilindros sejam objetos macroscópicos, contendo uma quantidade considerável de cargas elétricas, para que a aproximação de sistema contínuo seja ainda pertinente. Um desses cilindros é mostrado na **Figura 7.9**.

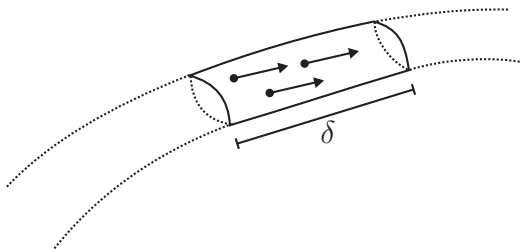


Figura 7.9: Cilindro de comprimento δ contendo cargas elétricas em movimento.

É útil designar cada um dos cilindros por um índice k . Dessa forma, podemos reescrever a soma em (7.38) como uma soma em duas etapas.

Primeiro somamos todas as cargas que estão contidas dentro do k -ésimo cilindro, nomeado aqui como C_k . Depois, executamos a soma das contribuições devidas a cada um dos cilindros. Obtemos

$$\vec{F} = \sum_k \sum_{l \in C_k} q \vec{v}_l \times \vec{B}_l . \quad (7.39)$$

Levando em conta a pequena extensão dos cilindros, supomos que tanto a velocidade quanto o campo magnético sejam aproximadamente uniformes nestas regiões. Isto nos permite trocar o índice l pelo índice k em (7.39). Encontramos

$$\vec{F} = \sum_k \vec{v}_k \times \vec{B}_k \sum_{l \in C_k} q = \sum_k Q_k \vec{v}_k \times \vec{B}_k , \quad (7.40)$$

onde Q_k é a carga total contida no cilindro C_k . Denotando por ρ_k a densidade de carga elétrica no cilindro C_k , podemos escrever $Q_k \equiv A \delta \rho_k$. Teremos, então, usando adicionalmente a Equação (7.25),

$$Q_k \vec{v}_k = A \delta \rho_k \vec{v}_k = A \delta \vec{j}_k = A |\vec{j}_k| \frac{\vec{j}_k}{|\vec{j}_k|} \delta = i \delta \frac{\vec{j}_k}{|\vec{j}_k|} . \quad (7.41)$$

Notemos que $\vec{j}_k/|\vec{j}_k|$ é o vetor unitário paralelo ao fio e que aponta no sentido da corrente elétrica. Definimos, portanto,

$$\delta \frac{\vec{j}_k}{|\vec{j}_k|} = \Delta \vec{r}_k , \quad (7.42)$$

onde $\Delta \vec{r}_k$ é o vetor deslocamento sobre o fio elétrico, com $|\Delta \vec{r}_k| = \delta$. Reunindo (7.41) e (7.42), obtemos, a partir de (7.40),

$$\vec{F} = i \sum_k \Delta \vec{r}_k \times \vec{B}_k . \quad (7.43)$$

No limite em que $|\Delta \vec{r}_k| = \delta \rightarrow 0$, a soma acima transforma-se em uma integral:

$$\vec{F} = i \int_{P_1}^{P_2} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) , \quad (7.44)$$

a nossa expressão final para a força magnética que atua sobre um trecho de fio elétrico que transporta corrente i .

Na situação em que o campo magnético é homogêneo, \vec{B} é um vetor constante, e a (7.44) pode ser simplificada:

$$\vec{F} = i \left[\int_{P_1}^{P_2} d\vec{r} \right] \times \vec{B} = i \vec{L} \times \vec{B} , \quad (7.45)$$

onde \vec{L} é o vetor que une os extremos P_1 e P_2 do trecho de fio elétrico sob estudo.

Atividade 2

Considere um fio em circuito fechado (isto é, uma espira) que transporta corrente i , na presença de um campo magnético uniforme. Mostre que a força magnética total é nula.

Resposta comentada

Uma espira é um trecho de fio elétrico onde $P_1 = P_2$ e, portanto, $\vec{L} = 0$. Assim, usando (7.45), obtemos $\vec{F} = 0$. Note que o fato de a força magnética se anular não significa que nenhum tipo de ação ocorrerá sobre o fio. A força total pode ser nula, mas pode haver torque total não-nulo. Esta observação será discutida com mais detalhe em uma aula posterior.

Atividades finais

1. Em uma determinada experiência de Física Atômica, átomos ionizados são produzidos em uma colisão e suas trajetórias são observadas, tais como indicadas na **Figura 7.10**.

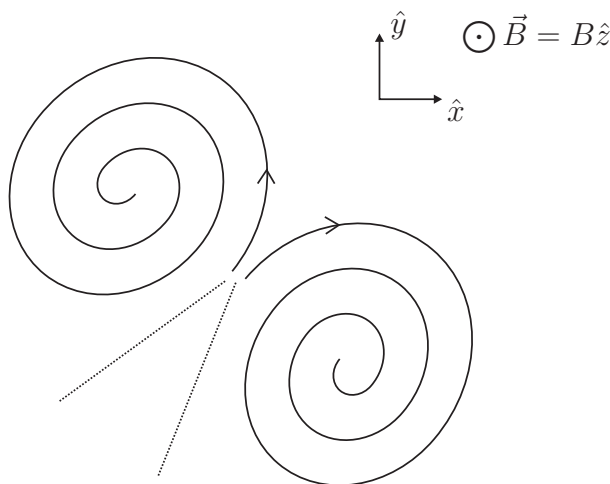


Figura 7.10: Trajetórias de átomos ionizados de cargas q_1 e q_2 . As linhas tracejadas indicam as trajetórias (não registradas pelo detector) antes da colisão.

Suponha que o campo magnético seja uniforme e paralelo a \hat{z} . Determine o sinal das cargas q_1 e q_2 . Por que as trajetórias mostradas são espiraladas?

2. Uma carga elétrica q de massa m move-se sob a presença de um campo magnético dado por

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{z}, & \text{se } |y| \geq L \\ 0, & \text{se } |y| < L \end{cases} \quad (7.46)$$

No instante inicial a carga está na posição $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ com velocidade $v_0 \hat{y}$. Determine após quanto tempo a carga retornará à origem.

3. O “vento solar” que atinge a Terra proveniente de descargas elétricas solares é constituído, tipicamente, de um feixe de elétrons de densidade $n = 10 \text{ cm}^{-3}$, movendo-se com velocidade de aproximadamente 500 km/s. Determine a corrente elétrica total, em Ampères, que atinge a Terra. Sugestão: modele a Terra como uma esfera de raio $R = 6.000 \text{ km}$.

4. Uma distribuição de corrente é descrita pela densidade de corrente

$$\vec{j} = J_0 \exp(-r/a) \hat{z}, \quad (7.47)$$

onde r é a distância ao eixo z . Determine a corrente elétrica que atravessa uma superfície circular de raio r centrada no eixo z .

5. Calcule o módulo da força magnética que atua sobre uma semicircunferência de comprimento L que transporta corrente i , nos seguintes casos:

a) Campo magnético \vec{B} uniforme e perpendicular ao plano da semicircunferência.

b) Campo magnético \vec{B} uniforme, paralelo ao plano da semicircunferência e fazendo um ângulo θ com o arco que une os seus extremos.

6. Um segmento retilíneo de fio de comprimento L é colocado sobre o eixo x . A corrente elétrica i flui no sentido positivo de x . O campo magnético aplicado sobre o fio depende da posição e é dado por

$$\vec{B} = Ax \hat{y}. \quad (7.48)$$

Determine a força que atua sobre o fio.

Respostas comentadas

- De acordo com a expressão para a força de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, obtemos $q_1 < 0$ e $q_2 > 0$. As trajetórias são espiraladas devido à perda de energia cinética dos íons: de fato, o raio de ciclotron $r = mv/qB$ é proporcional à velocidade da partícula carregada.
- Um esboço da configuração de campo é dado na **Figura 7.11**.

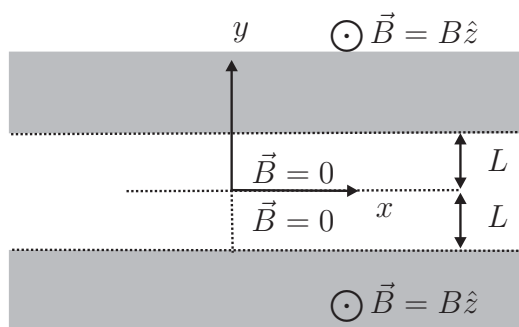


Figura 7.11: Esboço do campo magnético para a atividade final (2).

A partícula leva um tempo $T_1 = L/v_0$ para chegar até a região onde há campo magnético. Após entrar nesta região, ela executa uma órbita semicircular de raio $r_c = mv_0/qB$, durante o intervalo de tempo $T_2 = \pi r_c/v_0 = m\pi/qB \equiv \pi/\omega_c$. O primeiro retorno da partícula à $y = 0$ ocorrerá após o intervalo de tempo

$$T = 2T_1 + T_2 . \quad (7.49)$$

No segundo retorno a $y = 0$ a partícula retornará à origem. O tempo total de percurso é, portanto,

$$2T = 4T_1 + 2T_2 = \frac{4L}{v_0} + \frac{2m\pi}{qB} . \quad (7.50)$$

- O feixe de elétrons será absorvido pela Terra, cuja seção reta é πR^2 . Assim, a corrente total que atinge a Terra é

$$\begin{aligned} i &= (env)\pi R^2 \\ &= [1.6 \times 10^{-19}C] \times [10^7 m^{-3}] \times [5 \times 10^5 m/s] \times \pi \times [6 \times 10^6 m] \\ &\simeq 15A . \end{aligned} \quad (7.51)$$

- A corrente elétrica que irá passar por uma coroa circular de raio r e espessura dr é

$$di = J_0 \exp(-r/a) 2\pi r dr . \quad (7.52)$$

A corrente total que passa através de um disco de raio r é, portanto,

$$\begin{aligned} i(r) &= \int di = 2\pi J_0 \int_0^r dr r \exp(-r/a) \\ &= 2\pi a^2 J_0 [1 - (r/a) \exp(-r/a) - \exp(-r/a)] . \end{aligned} \quad (7.53)$$

5. Obtemos, usando diretamente a Equação (7.45),

a) iLB/π .

b) $iLB \sin(\theta)/\pi$.

Note que o diâmetro da semicircunferência é L/π .

6. De acordo com a (7.44), a força que atua sobre o segmento será

$$\vec{F} = i \int_0^L ds [\hat{x} \times A s \hat{y}] , \quad (7.54)$$

onde usamos $dx = ds \hat{x}$ e $\vec{B} = A s \hat{y}$. Em outras palavras, a variável $0 \leq s \leq L$ parametriza o segmento de fio. Obtemos:

$$\vec{F} = i A \hat{z} \int_0^L ds s = \frac{i A L^2}{2} \hat{z} . \quad (7.55)$$

Resumo

Cargas elétricas em movimento estão sujeitas à ação de forças devidas à presença de campos magnéticos. A *força de Lorentz* depende linearmente da carga elétrica e possui a forma matemática de um produto vetorial simples entre a velocidade e o campo magnético. A existência deste tipo de força faz com que fios elétricos que transportam corrente sejam forçados quando colocados em uma região onde há campo magnético. A força magnética total, nestes casos, é obtida como uma integração de linha ao longo do trecho de fio elétrico sob consideração.

A Lei de Biot-Savart

Metas da aula

- Formular a Lei de Biot-Savart;
- discutir o campo magnético produzido por configurações estacionárias de corrente elétrica;
- definir o conceito de momento de dipólo magnético.

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- obter uma expressão para o campo magnético produzido por correntes elétricas estacionárias;
- determinar o momento de dipólo magnético de uma espira arbitrária.

Introdução

Na aula anterior, estudamos o movimento de partículas carregadas na presença de campos magnéticos arbitrários. O nosso foco, agora, é discutir de que modo cargas em movimento, isto é, correntes, produzem campos magnéticos. O problema mais geral que podemos propor consiste em se obter o campo magnético em todo o espaço, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, a partir do conhecimento completo da densidade de corrente elétrica $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$. Este problema pode ser resolvido exatamente, de fato, mas sua solução será apresentada em aulas posteriores. Faremos aqui duas hipóteses convenientes que nos permitirão desenvolver um tratamento simplificado e, portanto, instrutivo, do problema da determinação do campo magnético. A primeira hipótese é a de que a densidade de corrente é independente do tempo:

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0, \quad (8.1)$$

isto é, estaremos interessados em configurações estacionárias de corrente. A segunda hipótese é a de que as configurações de corrente corresponderão a fios elétricos que transportam corrente fixa i , como mostrado na **Figura 8.1**.



Figura 8.1: Qual é o campo magnético produzido em P pelo trecho AB de fio elétrico que transporta corrente i ?

A lei de Biot-Savart

A pergunta colocada na legenda da **Figura 8.1** é respondida de forma completa pela *lei de Biot-Savart*, a análoga magnética da lei de Coulomb da eletrostática. Considerando ainda a mesma a figura, imagine que o trecho de fio entre os pontos A e B tenha sido particionado em deslocamentos infinitesimais $d\vec{s}$. A lei de Biot-Savart afirma, de modo geral, que o campo gerado em P será a soma das contribuições devidas a cada um dos segmentos infinitesimais descritos por $d\vec{s}$. A **Figura 8.2** indica o campo $d\vec{B}$ produzido em P , devido a apenas um dos segmentos infinitesimais $d\vec{s}$.

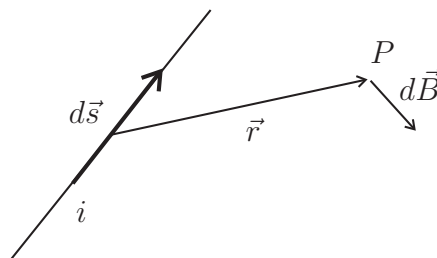


Figura 8.2: O segmento de fio $d\vec{s}$ que transporta corrente i gera um campo magnético infinitesimal $d\vec{B}$ em P .

Denotando por \vec{r} o vetor que o une o elemento de fio $d\vec{s}$ com o ponto

P , a lei de Biot-Savart estabelece que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8.2)$$

é o campo magnético infinitesimal produzido pelo segmento $d\vec{s}$, por onde passa corrente i , na posição P do espaço. Note que $d\vec{s}$ deve ser orientado de acordo com o sentido da corrente elétrica. Dois fatos muito importantes estão contidos na Relação (8.2): esta nos diz que o campo $d\vec{B}$ é

- (a) proporcional à corrente i ;
- (b) perpendicular à $d\vec{s}$ e \vec{r} .

A constante μ_0 chama-se “constante de permeabilidade magnética do vácuo” e vale, no SI,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tesla} \times \text{metro}}{\text{Ampère}}. \quad (8.3)$$

Pode parecer estranho que o valor de π seja usado na definição da constante física dimensional μ_0 . A razão essencial é “comodidade numérica” para se escrever a lei de Ampère, a ser discutida em uma aula posterior. O campo magnético gerado em P , devido ao trecho AB será, portanto, obtido pela integração de (8.2):

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (8.4)$$

Aplicaremos, agora, a lei de Biot-Savart, determinando o campo magnético gerado por fios elétricos em duas situações importantes: (i) segmento retilíneo e (ii) espira circular.

(i) Campo magnético gerado por um segmento retilíneo de fio

Considere um segmento retilíneo de fio elétrico, por onde passa corrente i , colocado sobre o eixo z , com extremos de coordenadas $z = -L/2$ e $z = L/2$. Queremos calcular o campo magnético $\vec{B}(P)$ em um ponto P situado a uma distância a sobre a mediatriz do segmento. A **Figura 8.3** ilustra a construção. Devido à presença de simetria cilíndrica, podemos tomar o ponto P sobre o eixo y , sem perda de generalidade.

Observe que de acordo com as propriedades vetoriais da definição de \vec{B} via lei de Biot-Savart, sabemos, antes mesmo de fazer o cálculo detalhado, que o campo magnético será paralelo a $-\hat{x}$, para pontos situados no plano yz . Pontos sobre o segmento de corrente podem ser parametrizados pela variável s , com $-L/2 \leq s \leq L/2$. Podemos escrever, então, $d\vec{s} = ds\hat{z}$ e $\vec{r} = -s\hat{z} + a\hat{y}$, onde, como discutido anteriormente, \vec{r} é o vetor que liga o

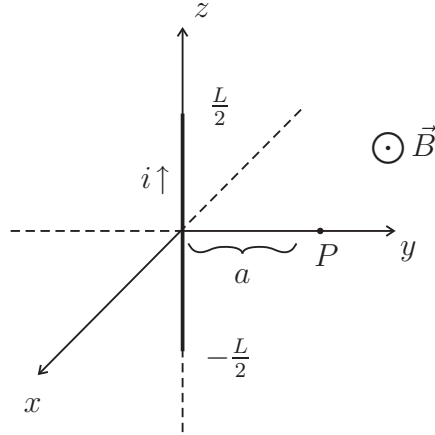


Figura 8.3: Configuração de corrente para o cálculo do campo magnético em P devido ao segmento de fio de comprimento L .

elemento infinitesimal $d\vec{s}$ ao ponto P . Usando a Equação (8.4), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{ds \hat{z} \times (-s\hat{r} + a\hat{y})}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 i a \hat{x}}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{ds}{(s^2 + a^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (8.5)$$

A integral acima pode ser resolvida exatamente por substituição trigonométrica, fazendo $s \equiv a \tan(\theta)$. Obtemos

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= -\frac{\mu_0 i \hat{x}}{2\pi a} \int_0^{\theta_L} d\theta \cos(\theta) \\ &= -\frac{\mu_0 i L \hat{x}}{2\pi a \sqrt{4a^2 + L^2}},\end{aligned}\quad (8.6)$$

onde $\theta_L \equiv \arctan(L/2a)$. O resultado obtido aqui pode ser escrito de forma mais geral e elegante em coordenadas cilíndricas, onde substituímos $-\hat{x}$ por $\hat{\theta}$ e a por r :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i L}{2\pi r \sqrt{4r^2 + L^2}} \hat{\theta}.\quad (8.7)$$

Atividade 1

Obtenha o campo magnético gerado por um fio retilíneo infinito. Esboce as linhas de campo magnético.

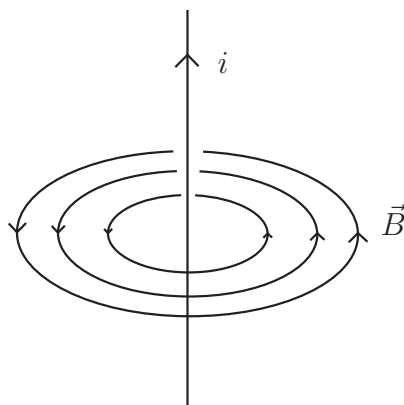


Figura 8.4: Linhas de campo magnético geradas por um fio retilíneo que transporta corrente i .

Resposta comentada

O caso do fio retilíneo infinito corresponde a $L \rightarrow \infty$ em (8.7). Acharmos, neste limite,

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\theta} . \quad (8.8)$$

As linhas de campo magnético são circunferências concêntricas centradas no fio elétrico, como mostrado na **Figura 8.4**.

Fim da atividade

(ii) Campo magnético gerado por uma espira circular

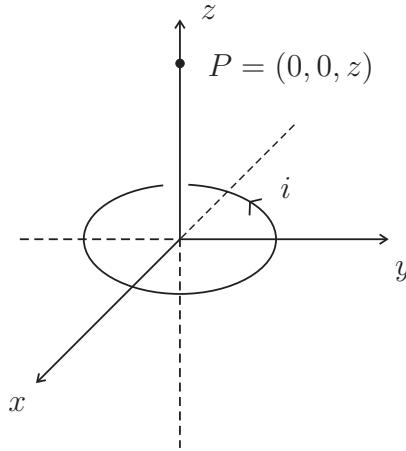
Uma espira não é nada mais do que um fio elétrico que forma um circuito fechado. Neste caso, os extremos de integração A e B em (8.4) representam o mesmo ponto no espaço. Escrevemos, então,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (8.9)$$

Estudamos aqui, como um ponto de partida para uma discussão mais geral, o campo gerado por uma espira circular que transporta corrente i . A geometria do sistema está ilustrada na **Figura 8.5**. Estamos interessados em calcular o campo magnético em um ponto P sobre o eixo de simetria da espira (tomado como o eixo z).

A espira possui raio R , seu plano é paralelo ao plano xy e está centrada na origem. A corrente circula no sentido anti-horário. A espira pode ser parametrizada de maneira bastante simples em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\phi) , \\ y &= R \sin(\phi) , \\ z &= 0 , \end{aligned} \quad (8.10)$$


Figura 8.5: Uma espira circular transporta corrente i .

onde $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O elemento de deslocamento infinitesimal sobre a espira é representado, portanto, como

$$d\vec{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} = -Rd\phi[\sin(\phi)\hat{x} - \cos(\phi)\hat{y}] . \quad (8.11)$$

O vetor que liga um ponto arbitrário da espira, de coordenadas $R(\cos(\phi), \sin(\phi), 0)$, ao ponto P , de coordenadas $(0, 0, z)$, fica dado por

$$\vec{r} = -R\cos(\phi)\hat{x} - R\sin(\phi)\hat{y} + z\hat{z} . \quad (8.12)$$

Substituindo (8.11) e (8.12) em (8.9), encontramos

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{[\sin(\phi)\hat{x} - \cos(\phi)\hat{y}] \times [-R\cos(\phi)\hat{x} - R\sin(\phi)\hat{y} + z\hat{z}]}{(z^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (8.13)$$

Não é difícil concluir, da expressão acima, que os únicos termos no integrando que irão contribuir para o campo magnético provém de produtos vetoriais que fornecem vetores paralelos (ou antiparalelos) a \hat{z} . Esperamos, de fato, tendo em vista a simetria cilíndrica da configuração de corrente, que o campo magnético gerado em P tenha a forma $\vec{B}(z) = B(z)\hat{z}$. Obtemos,

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (8.14)$$

O momento de dipólo magnético

Note que, para pontos muito afastados da espira, isto é, pontos para os quais $z \gg R$, isto é, assintoticamente, a Expressão (8.14) nos dá

$$\vec{B}(z) \simeq \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3}, \quad (8.15)$$

onde

$$\vec{m} \equiv i(\pi R^2) \hat{z} \quad (8.16)$$

é o chamado vetor “momento dipólo magnético” da espira circular. A motivação de se denotar \vec{m} por “momento de dipólo magnético” segue, naturalmente, da comparação entre (8.15) e o campo elétrico assintótico gerado por um dipólo elétrico sobre o seu eixo de simetria (confira a Equação (3.19), de onde se conclui que expressões elétricas e magnéticas são formalmente análogas). É interessante observar que enquanto a dimensão do momento de dipólo elétrico é *carga* \times *comprimento*, no caso magnético a dimensão é *corrente* \times *área*.

Se estivéssemos tratando o caso de uma espira planar simples (sem intersecções de fio elétrico) de formato arbitrária, que circunda a origem e não é necessariamente circular, iríamos obter um campo magnético assintótico com a mesma forma que (8.15), com $\vec{m} = iA\hat{z}$, onde A é a área da espira. Este resultado pode ser entendido de modo muito simples, representando uma espira planar deste tipo como uma superposição de minúsculas (infinitesimais!) espiras circulares adjacentes. Como resolver, entretanto, o problema de espiras planares com intersecções de fio elétrico (por exemplo, uma espira com o formato do número 8)? Nesse caso, deve-se particionar a espira em setores fechados (“sub-espiras”) onde não há intersecções e calcular o momento de dipólo magnético para cada um destes setores. O momento de dipólo total será, então, a soma dos sub-momentos. Não é muito difícil ver que nesse caso o momento de dipólo magnético pode ser nulo! (como no caso de uma espira com formato de número 8, se os dois lóbulos tiverem a mesma área e os fios cruzarem-se na intersecção).

Atividade 2

Esboce as linhas de campo magnético produzidas por uma espira circular que transporta corrente estacionária i .

Resposta comentada

Nas proximidades de um segmento qualquer da espira, as linhas de campo magnético são, essencialmente, idênticas àsquelas associadas a um fio elétrico infinito (circunferências concêntricas). Unindo a este fato o resultado exato (8.14), produzimos o esboço mostrado na **Figura 8.6**.

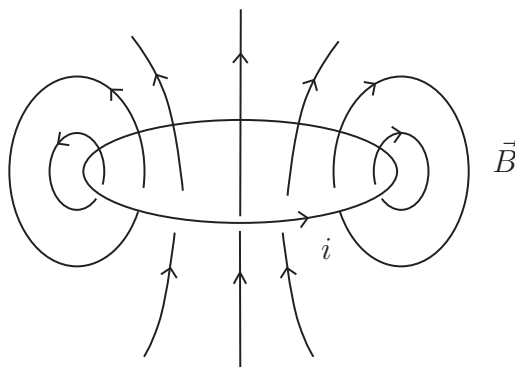


Figura 8.6: Linhas de campo magnético produzidas pela espira circular.

Note que as linhas de campo magnético produzidas por um ímã são semelhantes àsquelas de uma espira. Um ímã é, na realidade, um exemplo de “dipólo magnético”. Qual é a origem deste dipólo? Essa pergunta será investigada mais à frente, quando discutirmos em mais detalhe a física de campos elétricos e magnéticos em meios materiais. Já podemos adiantar, entretanto, que a magnetização macroscópica está ligada, geralmente, a contribuições devidas ao movimento orbital de partículas carregadas bem como ao momento de dipólo magnético *intrínseco*, de natureza quântica, que estas partículas podem possuir.

Fim da atividade

Iremos mostrar agora que a analogia entre dipólos elétricos e magnéticos é, de fato, mais forte do que pudemos apreciar até aqui. Considere uma espira de forma completamente arbitrária por onde passa corrente i , como indicado na **Figura 8.7**. Queremos obter a expressão assintótica dominante para o campo magnético em um ponto P muito distante da espira. Escolhemos, agora, um ponto arbitrário O sobre a espira para desempenhar o papel de origem do sistema de coordenadas. O vetor que une O ao ponto P será denotado por \vec{r}_P . Já o vetor que une O a um outro ponto qualquer da espira será denotado por \vec{r} .

A lei de Biot-Savart nos diz, então, que o campo magnético em P é

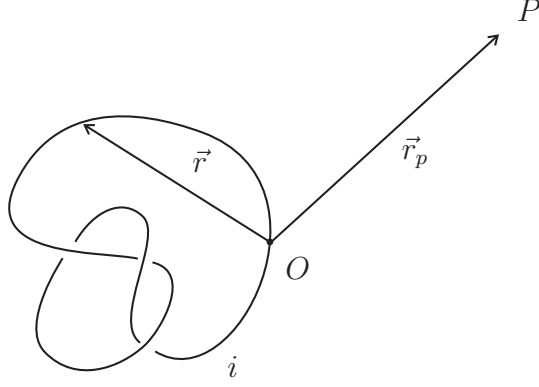


Figura 8.7: Espira arbitrária (não necessariamente plana).

dado por

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_p - \vec{r})}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3}. \quad (8.17)$$

O significado matemático de afirmarmos que o ponto P está muito afastado da espira é dado pela condição de que $r_p \equiv |\vec{r}_p| \gg r \equiv |\vec{r}|$ em (8.17). Isto nos sugere, de imediato, o uso de expansão em série de Taylor para o fator $|\vec{r}_p - \vec{r}|^{-3}$ que aparece no integrando de (8.17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} &= \frac{1}{r_p^3} \left[1 + \frac{r^2}{r_p^2} - 2 \frac{\vec{r}_p \cdot \vec{r}}{r_p^2} \right]^{-3/2} \\ &\simeq \frac{1}{r_p^3} \left[1 - \frac{3r^2}{2r_p^2} + \frac{3\vec{r}_p \cdot \vec{r}}{r_p^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Substituindo (8.18) em (8.17) e retraindo apenas os termos dominantes, obtemos

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r_p^3} \left[\oint \vec{r} \times d\vec{r} + \frac{3}{r_p^2} \oint (d\vec{r} \times \vec{r}_p) \vec{r}_p \cdot \vec{r} \right]. \quad (8.19)$$

A segunda integral em (8.19) pode ser escrita de maneira alternativa como (veja o Apêndice A para uma demonstração matemática, ao final da aula)

$$\oint (d\vec{r} \times \vec{r}_p) \vec{r}_p \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{r}_p \cdot \oint \vec{r} \times d\vec{r} - \frac{1}{2} r_p^2 \oint \vec{r} \times d\vec{r}. \quad (8.20)$$

Definindo, agora, o momento de dipólo magnético como

$$\vec{m} \equiv \frac{i}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r}, \quad (8.21)$$

a Expressão (8.20) leva a

$$i \oint (d\vec{r} \times \vec{r}_p) \vec{r}_p \cdot \vec{r} = \vec{r}_p (\vec{r}_p \cdot \vec{m}) - r_p^2 \vec{m}. \quad (8.22)$$

Substituindo (8.21) e (8.22) em (8.19), obtemos

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r_p^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r}_p) \hat{r}_p - \vec{m}) . \quad (8.23)$$

A comparação entre (8.23) e (3.23) mostra que a analogia entre os campos estáticos gerados por dipólos magnéticos e elétricos é perfeita. A definição dada aqui para o momento de dipólo magnético é mais geral do que aquela discutida anteriormente para o caso de espiras planares (veja a atividade final 4, para apreciar a equivalência entre as duas definições).

Uma observação importante é que na Equação (3.23) o campo eletrostático contém assintoticamente uma contribuição coulombiana que não aparece, em analogia, na Relação (8.23). Este resultado está ligado a inexistência de *monopólos magnéticos* – a expansão assintótica de campo magnético sempre se inicia por termos de dipólo. Deve-se mencionar, entretanto, que algumas teorias modernas especulam sobre a existência de partículas desta natureza.

É o resultado (8.23) que nos faz entender porque o campo magnético terrestre já na região da superfície é, em ótima aproximação, um campo dipolar (observa-se o mesmo em estrelas e planetas, em geral). De fato, as correntes elétricas que produzem o campo, extremamente complexas, estão confinadas no interior da terra, em regiões que podem ser consideradas suficientemente afastadas da superfície terrestre.

A analogia entre dipólos magnéticos e elétricos não pára por aqui. Sabemos que um dipólo elétrico \vec{p} , se submetido à presença de um campo elétrico uniforme \vec{E} , está sujeito ao torque mecânico $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$. Investiguemos o problema análogo na magnetostática. Suponha, então, que uma espira qualquer, por onde passa corrente i , seja submetida a um campo magnético uniforme \vec{B} . Como discutimos na aula anterior, a força magnética sobre um segmento $d\vec{r}$ de fio é dada por $d\vec{F} = i d\vec{r} \times \vec{B}$. O torque total sobre a espira será, portanto,

$$\vec{\tau} = \oint \vec{r} \times d\vec{F} = i \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) . \quad (8.24)$$

Levando em conta (veja a demonstração matemática no Apêndice B, ao final da aula) que

$$\oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \left[\oint \vec{r} \times d\vec{r} \right] \times \vec{B} , \quad (8.25)$$

podemos re-escrever (8.24) como

$$\vec{\tau} = \frac{i}{2} \left[\oint \vec{r} \times d\vec{r} \right] \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} , \quad (8.26)$$

o que nos mostra que a expressão para o torque sobre uma espira, devido a um campo magnético uniforme, possui uma forma análoga à expressão eletrostática para dipólos elétricos.

Uma generalização da lei de Biot-Savart

Nossos desenvolvimentos foram realizados sempre sob a hipótese de que as cargas elétricas movem-se no interior de fios elétricos, sendo responsáveis pela existência de correntes elétricas estacionárias. Podemos nos perguntar como obter o campo magnético no caso de configurações de corrente mais gerais, porém ainda estacionárias. Observe, então, que devemos descrever as correntes em uma situação deste tipo, por meio do campo de densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$. A combinação $id\vec{s}$ que aparece na lei de Biot-Savart deve ser substituída por $\vec{J}dA$, onde dA é um elemento de superfície normal ao fluxo de corrente. Note, agora, que dA pode ser escrito como $dx dy dz = d^3\vec{r}$. Dessa maneira, a lei de Biot-Savart, é generalizada diretamente para configurações estacionárias de corrente, como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (8.27)$$

Atividades finais

1. Considere dois fios elétricos retilíneos paralelos, infinitos, separados por uma distância d . Determine a força por unidade de comprimento que atua sobre cada um dos fios, nas seguintes situações (não se esqueça de discutir os sentidos das forças):
 - (i) ambos os fios transportam corrente i no mesmo sentido;
 - (ii) os fios transportam corrente i em sentidos opostos.
2. Obtenha o campo magnético gerado sobre o eixo de simetria de um disco de raio R , uniformemente carregado com densidade superficial de carga σ , que gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, onde \hat{z} é o vetor unitário normal ao disco.
3. Obtenha o momento de dipólo magnético de uma esfera de raio R , com densidade de carga uniforme ρ , que gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

4. Mostre que o momento magnético de uma espira circular de raio R , pela qual passa corrente i pode ser escrito, de fato, como

$$\vec{m} = \frac{i}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r}, \quad (8.28)$$

onde \vec{r} é o vetor posição sobre a espira.

Respostas comentadas

1. O campo magnético gerado por um fio infinito tem módulo $B = \mu_0 i / 2\pi r$, de acordo com a Equação (8.8). Em ambos os casos (i) e (ii), o campo gerado por qualquer um dos fios será perpendicular ao outro fio. Um segmento de comprimento L de um dos fios estará sujeito, portanto, a uma força (confira a aula 7) de módulo $F = \mu_0 i L / 2\pi d$. Este resultado vale para os casos (i) e (ii), entretanto, no caso (i) há força de atração entre os fios enquanto no caso(ii) há força de repulsão (como pode ser verificado usando-se a regra da mão-direita).
2. Um disco de raio R pode ser pensado como a união de coroas circulares, cada uma delas de espessura dr e raio r , com $0 \leq r \leq R$. Cada uma destas coroas possui carga total $dq = \sigma 2\pi r dr$. Como o período de revolução do disco é $T = 2\pi / \omega$, cada coroa pode ser interpretada como uma espira circular de raio r que transporta corrente $di = dq / T = \sigma \omega r dr$. Usando a Equação (8.14), obtemos que o campo magnético gerado por uma destas coroas, em um ponto de altura z sobre o eixo de simetria, é

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2 (di)}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (8.29)$$

O campo total, portanto, é obtido através da integração da expressão acima:

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega \hat{z}}{2} \int_0^R dr \frac{r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \mu_0 \sigma \omega [\sqrt{z^2 + R^2} - z - R^2 / 2\sqrt{z^2 + R^2}] \hat{z}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

3. Analogamente à discussão da atividade anterior, podemos considerar uma esfera carregada em rotação como a união de “espiras circulares” que transportam corrente elétrica infinitesimal. Cada espira possui, em

coordenadas esféricas, latitude θ e distância r ao centro, com $0 \leq r \leq R$. O volume de cada espira é

$$dV = 2\pi \sin(\theta) r^2 dr d\theta . \quad (8.31)$$

Dessa forma, a carga contida em cada espira é

$$dq = \rho dV = 2\pi \rho \sin(\theta) r^2 dr d\theta . \quad (8.32)$$

Como o período de revolução da esfera é $T = 2\pi/\omega$, cada espira estará associada ao transporte de corrente

$$di = dq/T = \rho \omega \sin(\theta) r^2 dr d\theta . \quad (8.33)$$

Note, agora, que o raio de uma espira de latitude θ é $r' = r \sin(\theta)$. Assim, o momento de dipólo magnético devido a esta espira será

$$\begin{aligned} d\vec{m} &= (di) \pi r'^2 \hat{z} \\ &= \rho \omega \pi r^4 \sin^3(\theta) dr d\theta \hat{z} . \end{aligned} \quad (8.34)$$

O momento magnético total é obtido a partir da integração da expressão acima:

$$\vec{m} = \rho \omega \pi \hat{z} \int_0^R dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta) = \frac{4}{15} \rho \omega \pi R^5 \hat{z} . \quad (8.35)$$

4. Vamos supor que a espira circular esteja centrada na origem e seja paralela ao plano xy . Considere circulação de corrente no sentido anti-horário. Escrevemos, então, em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R[\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}] , \\ d\vec{r} &= R[-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}] . \end{aligned} \quad (8.36)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r} &= \frac{iR^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta [\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}] \times [-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}] \\ &= i\pi R^2 \hat{z} = \vec{m} . \end{aligned} \quad (8.37)$$

Resumo

Fios elétricos que transportam corrente elétrica estacionária produzem campos magnéticos dados pela lei de Biot-Savart. O campo magnético produzido por um elemento de fio $d\vec{s}$ em um ponto P é proporcional à corrente

elétrica e é perpendicular à $d\vec{s}$ e ao vetor \vec{r} que une o elemento de fio ao ponto P . O campo magnético pode ser calculado de forma exata em algumas situações específicas (fios retilíneos e sobre o eixo de simetria de espiras circulares, entre outros exemplos). Para posições muito distantes das correntes, o comportamento assintótico dominante do campo magnético tem o perfil análogo ao do campo elétrico gerado por um dipólo elétrico. A uma espira arbitrária pode-se associar um momento de dipólo magnético, desempenhando um papel análogo ao correspondente eletrostático, no que se refere a torques e à energia potencial de rotação na presença de campos externos. A lei de Biot-Savart pode ser generalizada, sem muita dificuldade, ainda no domínio da magnetostática, para configurações de corrente que não estão necessariamente confinadas a fios elétricos.

Apêndice A

Para provar a Expressão (8.20), é útil discutirmos brevemente, como uma preparação, integrais de área, da forma

$$A_{\alpha\beta} \equiv \oint x_{\alpha} dx_{\beta} . \quad (8.38)$$

Note que $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$: por exemplo, tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, temos

$$A_{12} = \oint x dy = \oint [d(xy) - y dx] = \oint d(xy) - \oint y dx = - \oint y dx = -A_{21} . \quad (8.39)$$

Provaremos (8.20) por meio do cálculo explícito dos dois lados daquela equação. Como se trata de uma equação vetorial, covariante por rotações, basta considerarmos apenas uma de suas componentes, digamos \hat{x} . Seja, em (8.20),

$$\begin{aligned} \vec{r}_p &= a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} , \\ \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} . \end{aligned} \quad (8.40)$$

Temos, então, para a componente \hat{x} no lado esquerdo da Equação (8.20),

$$\oint (cdy - b dz)(ax + by + cz) = acA_{12} - (b^2 + c^2)A_{23} - abA_{13} . \quad (8.41)$$

O lado direito da Equação (8.20) possui dois termos. O primeiro é

$$-\frac{r_p^2}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r} \Big|_x = -\frac{1}{2} \oint (y dz - z dy) = -r_p^2 A_{23} = -(a^2 + b^2 + c^2)A_{23} , \quad (8.42)$$

e o segundo,

$$\frac{1}{2} \vec{r}_p \cdot \oint \vec{r} \times d\vec{r} \Big|_x = \frac{a}{2} \oint [a(ydz - zdy) + b(zdx - xdz) + c(xdy - ydx)] = a^2 A_{23} - ab A_{13} + ac A_{12} . \quad (8.43)$$

A soma das contribuições do lado direito é, portanto,

$$-(a^2 + b^2 + c^2) A_{23} + a^2 A_{23} - ab A_{13} + ac A_{12} = ac A_{12} - (b^2 + c^2) A_{23} - ab A_{13} , \quad (8.44)$$

o que confirma a igualdade ao lado esquerdo da equação, dado por (8.41).

Apêndice B

A prova de (8.25) apoia-se no uso da relação vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) . \quad (8.45)$$

Dessa forma, aplicando (8.45), o integrando no lado esquerdo de (8.25) pode ser escrito como

$$\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2} d(\vec{r}^2) . \quad (8.46)$$

Este resultado implica em

$$\oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) . \quad (8.47)$$

Por outro lado, o integrando no lado direito de (8.25) vem escrito, usando novamente (8.45), como

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B} &= -\vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{r}) = -\vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B}) + d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= -d[\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})] + 2d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) , \end{aligned} \quad (8.48)$$

o que nos dá

$$\oint (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B} = 2 \oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) . \quad (8.49)$$

A comparação entre (8.47) e (8.49) tem como consequência imediata a relação (8.25), concluindo-se a prova.

ISBN 978-85-7648-645-9



9 788576 486459



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

